Haz doble clic (o pulsa Intro) para editar

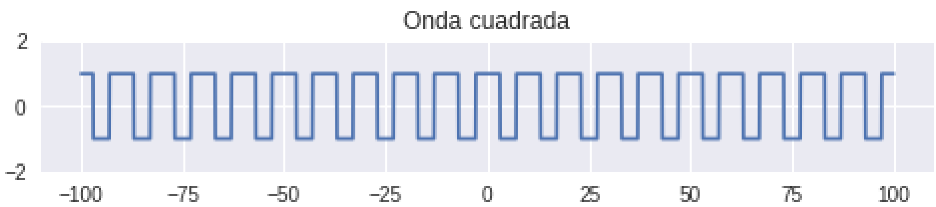
Construcción de la Transformada de Fourier de Tiempo Continuo a partir de la Serie de Fourier

Este Notebook parte de la definición de la Serie de Fourier de tiempo continuo de la onda cuadrada y construye la Transformada de Fourier del pulso por el procedimiento de hacer tender el período a infinito. La generalización de este ejemplo lleva a la definición de la Transformada de Fourier.

Ya trabajamos con la Serie de Fourier de tiempo continuo, la cual requiere la hipótesis de periodicidad en el tiempo de la señal. Esta hipótesis es muy restrictiva para las señales con las que queremos trabajar en ingeniería eléctrica, por que que la inetentaremos levantar. Con las series de Fourier transformamos la señal $x(t)$ en una señal $a[k] = a_k$ de variable discreta, donde la variable k está relacionada con la frecuencia, de tal modo que si a_k es grande entonces $x(t)$ tiene una componente significativa en esa frecuencia. Conservaremos esta intuición al construir la Transformada de Fourier según el ejemplo a continuación.

Consideremos una señal periódica onda cuadrada de período T y ancho $2t_0 < T$, es decir que vale $x(t) = 1$ para $t \in [-t_0, t_0]$, y $x(t) = 0$ para $t \in [-T/2, T/2]$, repitiendose periódicamente con período T. El siguiente ejemplo grafica esta señal con $t_0 = 3$ y $T = 10$.

```
#Señales y Sistemas, 2019. IIE-FIng-Udelar.
#@author: Juan Bazerque

# Importar funciones necesarias
from scipy import signal
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

# ============================================================================
# Onda cuadrada de ancho t_0 y período T
# ============================================================================
def ondaCuadrada(t, T, t0):
    return signal.square( 2 * np.pi * 1/T* (t+t0), 2*t0/T)

t = np.linspace(-100, 100, 5000)
T=10
t0=3

x=ondaCuadrada(t,T,t0)
fig, ax = plt.subplots()
plt.plot(t, x)
plt.title('Onda cuadrada')
plt.ylim(-2, 2);
ax.set_aspect(8.0)
```



Coeficientes de la Serie de Fourier

La Serie de Fourier de esta señal cuadrada tiene coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-t_0}^{t_0} dt = 2t_0/T$$

y

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega_k t}dt = \frac{1}{T}\int_{-t_0}^{t_0} e^{-j\omega_k t}dt = \frac{2}{T\omega_k}\sin(\omega_k t_0), \quad \omega_k = \frac{2\pi}{T}k.$$

En la siguiente figura se muestra nuevamente la onda cuadarada para $T = 10$ y $t_0 = 3$, junto a la serie a_k, y una tercera gráfica que se explica a continuación.

Para lo que sigue, es conveniente graficar los coeficientes a_k multiplicados por el período T, y colocarlos sobre los valores ω_k como indica la tercera gráfica, por ejemplo, en cero colocamos $Ta_0 = 2t_0$, luego en $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ colocamos $Ta_1 = \frac{2}{\omega_1}\sin(\omega_1 t_0)$, y así sucesivamente

$$Ta_k = \frac{2}{\omega_k}\sin(\omega_k t_0) \tag{1}$$

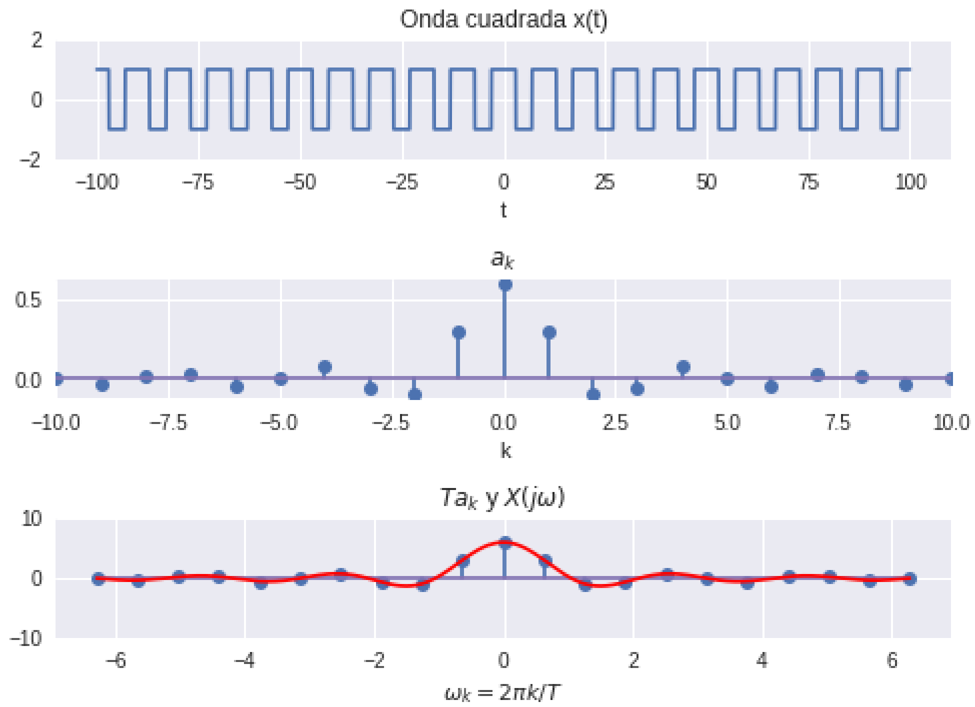
Además de los puntos azules, que representan Ta_k, se muestra en rojo la función envolvente de variable continua

$$X(j\omega) := \frac{2}{\omega}\sin(\omega t_0), \tag{2}$$

que se obtiene al considerar una variable continua ω substituyendo ω_k en la ecuación (1) . Véase que $X(j\omega)$ está definida como la función que pasa por los puntos Ta_k, lo que escribimos como $Ta_k = X(j\omega_k)$. Decimos entonces que Ta_k son muestras de $X(j\omega)$ en los puntos $\omega = \omega_k$.

```
# ============================================================================
# Coeficientes de la SdeF de la onda cuadrada y su envolvente
# ============================================================================

#La siguiente función grafica la  onda  cuadrada, y  sus coeficientes a[k]
#También grafica T a[k] en funcción de omega_k = 2pi/T k

def transformadaFourierOndaCuadrada(t, T, t0):
    x=ondaCuadrada(t,T,t0)
    k = np.linspace(-T, T, 2*T+1)
    wk = 2*np.pi * k / T
    # wk[T] = 1 #just to avoid not  a number
    Tak = 2*np.sin(wk*t0)/wk
    Tak[T]=2*t0
    w = np.linspace(-2*np.pi,2*np.pi, 1001)
    Xjw = 2*np.sin(w*t0)/w
    Xjw[500]=2*t0

    #primero la onda como función del tiempo t continuo
    plt.subplot(3,1,1)
    plt.plot(t, x)
    plt.title('Onda cuadrada x(t)')
    plt.ylim(-2, 2)
    plt.xlabel('t')

    #Luego la secuencia a[k] enfunción de la variable discreta k
    plt.subplot(3,1,2)
    plt.stem(k, Tak/T)
    plt.title('$a_k$')
    plt.xlim(-10,10)
    plt.xlabel('k')

    #Por último Ta[k] sobre los valores omega_k junto a su envolvente X(jomega)
    plt.subplot(3,1,3)
    plt.stem(wk, Tak)
    plt.title('$T a_k$ y $X(j\omega)$')
```

```
    plt.ylim(-10, 10)
    plt.plot(w, Xjw ,'r')
    plt.xlabel('$\omega_k=2\pi k/T$')
    plt.subplots_adjust(hspace = 1)

    plt.show()

transformadaFourierOndaCuadrada(t, T, t0)
```



Efecto al agrandar el período T

La primera pregunta que queremos responder es ¿qué sucede si agrandamos el período T dejando fijo el ancho t_0?

Tenemos las siguientes cinco respuestas a esa pregunta que se ilustran en la figura de más abajo.

1. Los pulsos se separan entre sí.
2. Los coeficientes de la Serie de Fourier cambian pues la señal es otra.
3. Las frecuencias ω_k se acercan entre sí, por ejemplo para T la separación entre dos frecuencias consecutivas es

$$\Delta\omega_k := \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi(k+1)}{T} - \frac{2\pi k}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

y análogamente para $\tilde{T} = 2T$

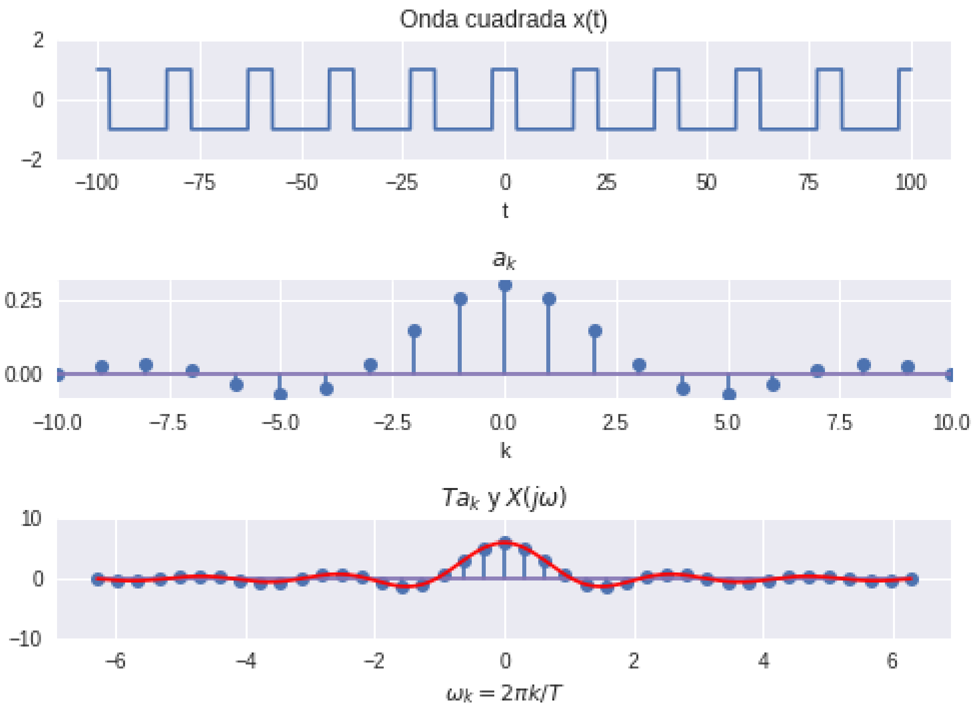
$$\Delta\tilde{\omega}_k := \tilde{\omega}_{k+1} - \tilde{\omega}_k = \frac{2\pi(k+1)}{\tilde{T}} - \frac{2\pi k}{\tilde{T}} = \frac{2\pi}{\tilde{T}}$$

Entonces, dado que $\tilde{T} = 2T$, resulta $\Delta\tilde{\omega}_k = \frac{1}{2}\Delta\omega_k$.

4. La envolvente $X(j\omega)$ es una función de $\omega \in \mathbb{R}$ por lo que no cambia al variar T.
5. Dado que la relación entre las ecuaciones (1) y (2) se estableció para un valor de T genérico, entonces sigue valiendo para los nuevos valores de T, a_k y ω_k, que $Ta_k = X(j\omega_k)$ (Ta_k siguen siendo muestras de $X(j\omega)$ en ω_k). Entonces si repetimos las gráficas de arriba para un nuevo valor $T = 20$, los puntos azules Ta_k volverán a caer sobre la línea roja $X(j\omega)$.

Comprobamos estos cinco puntos en las siguientes gráficas, correspondientes al nuevo $T = 20$, con $t_0 = 3$ sin cambiar.

```
T = 20
transformadaFourierOndaCuadrada(t, T, t0)
```

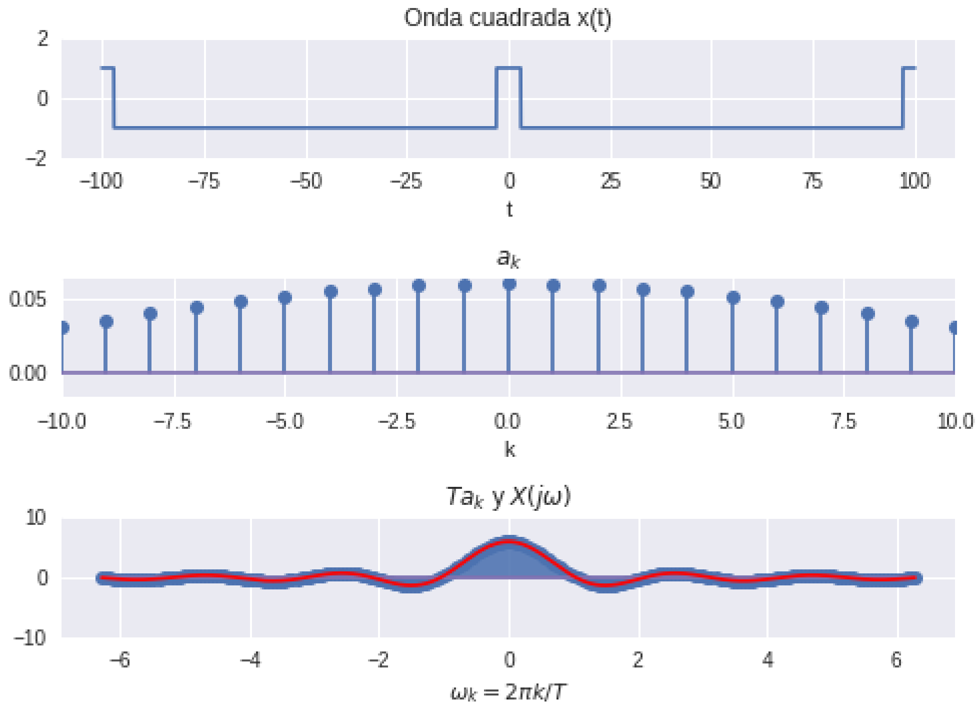


En efecto se puede observar en las figuras anteriores, que al pasar de $T = 10$ a $T = 20$ los pulsos se separaron, y los coeficientes a_k cambiaron. Además la envolvente roja no cambia, y al graficar Ta_k sobre las frecuencias ω_k, que aparecen ahora más juntas entre si, los puntos azules vuelven a coincidir con la envolvente.

Repitamos para $T = 50$ y $T = 100$.

```
T = 50
transformadaFourierOndaCuadrada(t, T, t0)
```


```
T = 100
transformadaFourierOndaCuadrada(t, T, t0)
```



Hacia un modelo para señales no periódicas

La segunda pregunta que nos podemos hacer es ¿qué sucede si hago crecer T hacia infinito?

Las respuestas a esta pregunta se deducen de las respuestas a la pregunta anterior, y se intuyen de la sequencia de gráficas para $T = 10, 20, 50, 100$

1. Solo queda el pulso centrado en 0, que es una señal no periodica definida por $x(t) = 1$ para $|t| \leq t_0$ y $x(t) = 0$ para $|t| > t_0$.
2. Las distancia entre sucesivas frecuencias armónicas ω_k tiende a cero, formando un conjunto denso que aproxima al conjunto de valores continuo $\omega \in \mathbb{R}$.
3. Correspondientemente, las muestras $Ta_k = X(j\omega_k)$ se juntan entre sí pasando a coincidir con la señal de variable continua $X(j\omega)$ representada como la envolvente roja que se muestra en todas las figuras.

Definición de la transformada de Fourier

Del análisis anterior surge naturalmente partir de una señal no periódica $x(t)$ (pulso de ancho t_0), y construir una señal periódica $x_T(t)$ (onda cuadrada) repitiendo x(t) en cada período T, para luego construir la Transformada de Fourier $X(j\omega)$ como el límite cuando $T \to \infty$ de Ta_k, donde a_k son los coeficientes de $x_T(t)$. Para obtener $X(j\omega)$ en un valor de ω dado, hacemos k tender a infinito como función de T de modo que $\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \to \omega$. Además usamos que por definición $x_T(t)$ y $x(t)$ coinciden en el primer período, entonces escribimos

$$X(j\omega) := \lim_{T\to\infty} Ta_k = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega_k t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Según la construcción que hicimos, esta definición corresponde a la ecuación de análisis de las series de Fourier, que se usa para obtener el coeficiente a_k a partir de $x_T(t)$.

La ecuación de síntesis

$$x(t) = \sum_k a_k e^{j\omega_k t}$$

también tiene su correspondiente para señales no periódicas. Recordando que $Ta_k = X(j\omega_k)$ y que $\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = 2\pi/T$, lo que implica que $\frac{1}{T} = \Delta\omega_k/2\pi$ escribimos

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_k t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Ta_k e^{j\omega_k t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega_k) e^{j\omega_k t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega_k) e^{j\omega_k t}\Delta\omega_k.$$

Luego, la suma se convierte en integral al pasar al límite, dado que dado que $\Delta\omega_k = 2\pi/T \to 0$ cuando $T\infty$, y como $x_T(t) \to x(t)$ (los pulsos contiguos desaparecen), entonces

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega_k) e^{j\omega_k t}\Delta\omega_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Finalmente se define la transformada de Fourier de $x(t)$ como

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt} \quad (3)$$

y su antitransformada como

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega} \quad (4)$$

Si bien partiremos de estas ecuaciones (3) y (4) como definición de la Transformada de Fourier y su antitransformada de aquí en más, la construcción anterior es importante porque permite vincularlas con las ecuaciones de análisis y síntesis de las Series de Fourier, y traer de allí toda la intuición acerca de las componentes en frecuencia y respuesta a exponenciales de SLITs.

Para la existencia de $X(j\omega)$ es suficiente con que $x(t)$ sea módulo integrable, es decir que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$. Sin embargo para que la antitransformada de $X(j\omega)$ en la ecuación (4) coincida efectivamente con $x(t)$ se requieren las mismas hipótesis de Dirichlet que para las Series de Fourier. Se obtienen las mismas garantías, en cuanto a que la antitransformada coincide con $x(t)$ en casi todo punto, salvo en los puntos de discontinuidad de $x(t)$ donde (4) no es válida.