Sistemas Lineales 2
Examen, 13 de marzo del 2003

Te solicitamos:

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- **resolver problemas diferentes en hojas separadas**.

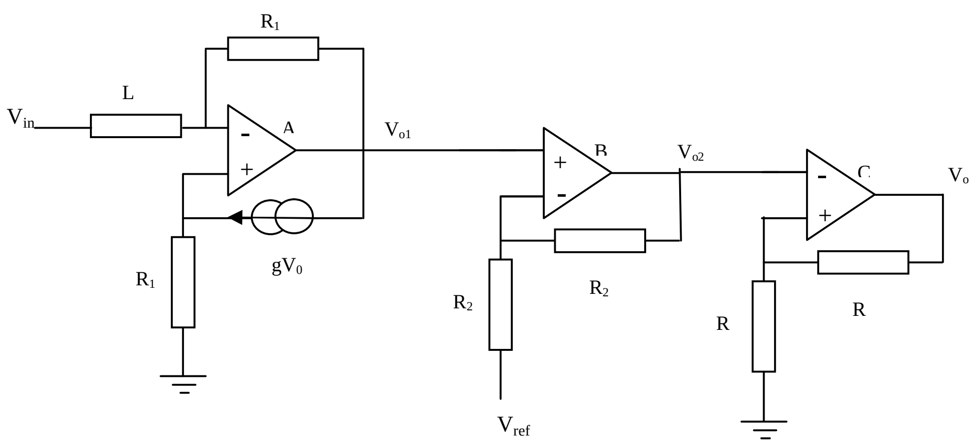
Se recuerda que la prueba es individual y **dura 3 horas**. No olvides de administrar el tiempo de la mejor manera. Para pasar a la instancia de oral es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

Ejercicio 1

En el circuito de la figura, los operacionales A y B se suponen ideales, con $R_{in} = \infty$, $R_o = 0$ y ganancia infinita. El operacional C opera en su zona no lineal, de tal modo que:

$$v_{c+} > v_{c-} \Rightarrow V_o = V_{cc}$$
$$v_{c+} < v_{c-} \Rightarrow V_o = 0$$



En el instante $t = 0$ se aplica en la entrada V_{in} un escalón de amplitud V_E.
Se suponen además las siguientes relaciones válidas:

$L / R_1 = 2 \cdot t$

$g \cdot R_1 = 2 \cdot V_E / V_{cc}$ $\qquad$ $8.V_E < V_{cc}$.

$V_{ref} = -V_{cc}$

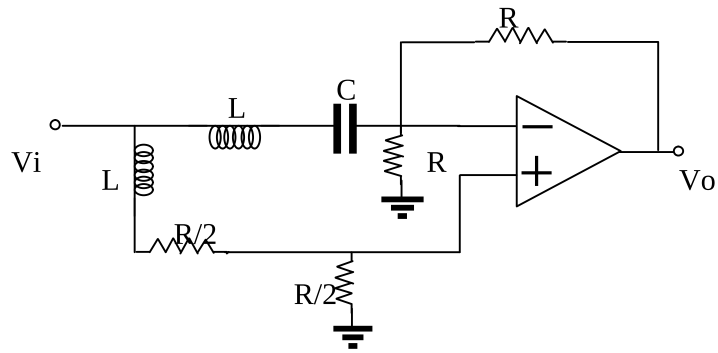
Se pide:

a) Graficar $V_o(t)$ y $V_{o1}(t)$ en función de V_E, V_{cc}, t, calculando además los instantes en los que $V_o(t)$ cambia de estado, hasta que el circuito alcance el régimen. Justificar las hipótesis hechas sobre el comparador.

b) Hallar la relación que debe cumplirse entre V_E y V_{CC} para que el circuito oscile a $f_{osc}=1/(3t)$.

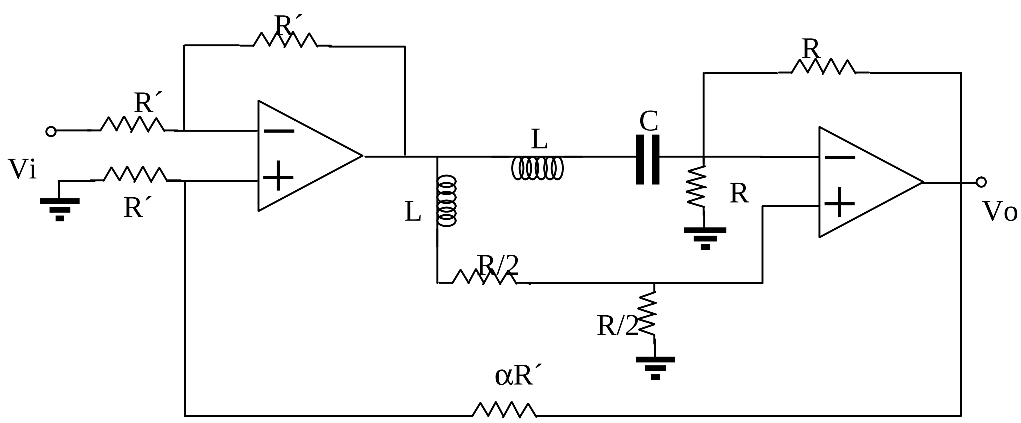
Ejercicio 2

a) **i -** Considerando el operacional ideal de la figura la transferencia H(s)=Vo(s)/Vi(s) del circuito:



ii – Decir si el sistema es BIBO estable, justificar.

b) Hallar la transferencia de lazo abierto del siguiente circuito, con las mismas hipótesis sobre los operacionales que las realizadas en la parte **a)**.

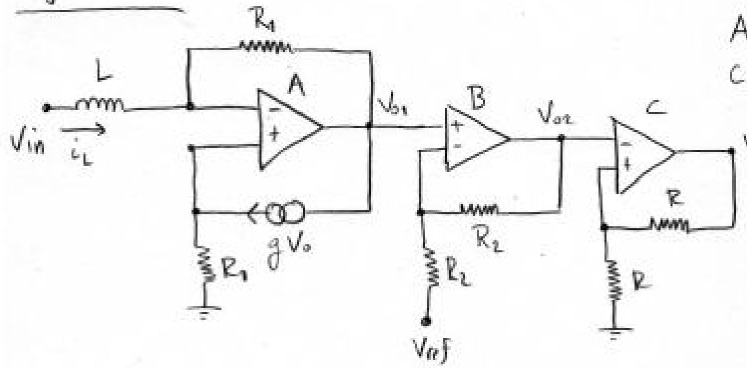


c) Estudiar la estabilidad del circuito de la parte b) utilizando el criterio de Nyquist. Discutir según α.

Asumir que se cumple que $R/L = 100\omega_0$ y $1/LC = \omega_0^2$.

SISTEMAS LINEALES 2 : MARZO 2003 (1)

Ejercicio 1:



A, B ideales en zona lineal
C ideal en zona no lineal entre niveles 0, V_{cc}

Datos: $\frac{L}{R_1} = 2\tau$

$g R_1 = \frac{2V_E}{V_{cc}}$

$8V_E < V_{cc}$

$V_{ref} = -V_{cc}$

En $t=0$ se aplica un escalón de tensión de amplitud V_E a la entrada $\Rightarrow V_{in} = \frac{V_E}{s}$

Supongo inicialmente $V_o = 0$ ($V_{c-} = V_{o2} > V_{c+}$). Además $V_{c+} = 0$ por el divisor a la salida.

Con la fuente de corriente controlada por tensión anulada, la primera etapa es un integrador:

$$\frac{V_{o1}}{V_{in}} = -\frac{R_1}{Ls} = -\frac{1}{2\tau s} \Rightarrow V_{o1} = \frac{-V_E}{2\tau s^2}, \quad \boxed{v_{o1}(t) = \left[-\frac{V_E}{2\tau}t\right]\gamma(t)}$$

De la tierra virtual en B: $\frac{V_{o2}-V_{o1}}{\cancel{R_2}} = \frac{V_{o1}-\frac{V_{ref}}{s}}{\cancel{R_2}} = V_{o1} + \frac{V_{cc}}{s}$

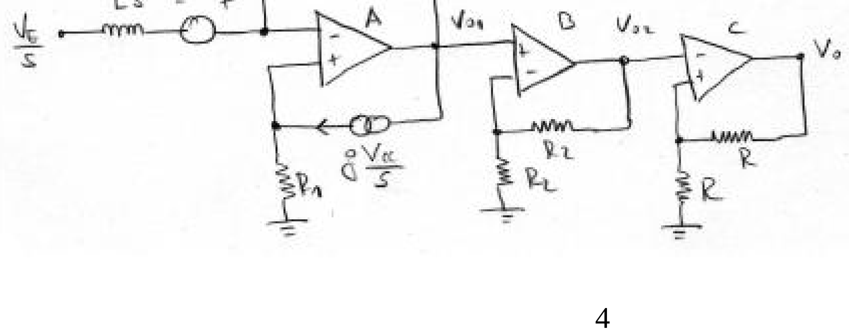
$$\Rightarrow V_{o2} = 2V_{o1} + \frac{V_{cc}}{s}, \quad \boxed{v_{o2}(t) = \left[V_{cc} - \frac{V_E}{\tau}t\right]\gamma(t)}$$

El comparador C conmuta para $t = t_1 / v_{o2}(t_1) = V_{c-} = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{V_{cc}}{V_E}\tau}$

$$v_{o1}(t_1) = -\frac{V_{cc}}{2}; \quad I_o = i_L(t_1) = \frac{-v_{o1}(t_1)}{R_1} \Rightarrow I_o = \frac{V_{cc}}{2R_1}$$

Estudiamos para $t' = t - t_1 \geq 0$

Se tiene que $V_o = V_{cc}$. Además $V_{c+} = \frac{V_{cc}}{2}$ por el divisor a la salida. Lo que queda es:



2

$$V_{A+} = V_{A-} = R_1 g \frac{V_{cc}}{s} = \frac{2V_E}{s} \Rightarrow \frac{V_{in} - \left(-LI_o + \frac{2V_E}{s}\right)}{Ls} = \frac{\frac{2V_E}{s} - V_{o1}}{R_1}$$

$$\Rightarrow V_{o1} = \frac{2V_E}{s} + \frac{2R_1 V_E}{Ls^2} - \frac{V_{cc}}{2s} - \frac{R_1 V_E}{Ls^2}$$

$$\boxed{v_{o1}(t') = \left[2V_E - \frac{V_{cc}}{2} + \frac{V_E}{2\tau} t'\right] Y(t')} \quad v_{o1}(0^+) = 2V_E - \frac{V_{cc}}{2}$$

Notar el salto positivo de tensión en v_{o1}, ya que la actuación de la fuente de corriente, produce una caída en R_1 que levanta la referencia del circuito.

Nuevamente se tiene que $V_{o2} = 2V_{o1} + \frac{V_{cc}}{s} \Rightarrow \boxed{v_{o2}(t') = \left[V_E\left(4 + \frac{t'}{\tau}\right)\right] Y(t')}$

El comparador C conmuta para $t' = t_2 \mid v_{o2}(t_2) = V_{c-} = \frac{V_{cc}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 = \tau \frac{(V_{cc} - 8V_E)}{2V_E}} > 0 \text{ por el dato de letra.}$$

$$v_{o1}(t_2) = -\frac{V_{cc}}{4}, \quad I_o' = i_L(t_2) = \frac{2V_E}{R_1} - \frac{v_{o1}(t_2)}{R_1} \Rightarrow I_o' = \frac{V_{cc} + 8V_E}{4R_1}$$

Estudiamos para $t'' = t' - t_2 \geq 0$. Nuevamente $V_o = 0$ y $V_{c+} = 0$ por el divisor

$$\frac{V_{in} + LI_o'}{Ls} = -\frac{V_{o1}}{R_1} \Rightarrow V_{o1} = -\frac{(V_{cc} + 8V_E)}{4s} - \frac{R_1}{L}\frac{V_E}{s^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{o1}(t'') = \left[-\frac{(V_{cc} + 8V_E)}{4} - \frac{V_E}{2\tau} t''\right] Y(t'')} \quad v_{o1}(0^+) = -2V_E - \frac{V_{cc}}{4}$$

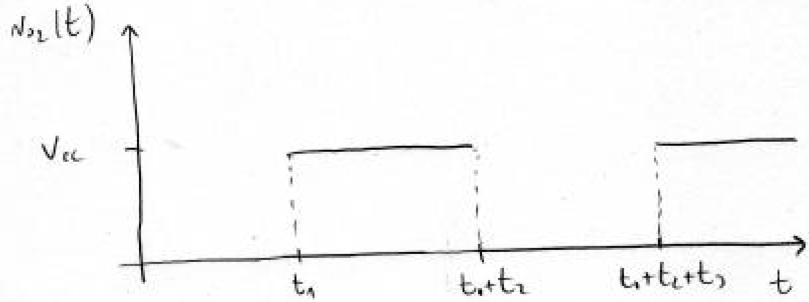
Nuevamente se tiene que: $V_{o2} = 2V_{o1} + \frac{V_{cc}}{s}$, $\boxed{v_{o2}(t'') = \left[\frac{V_{cc} - 8V_E}{2} - \frac{V_E}{\tau} t''\right] Y(t'')}$

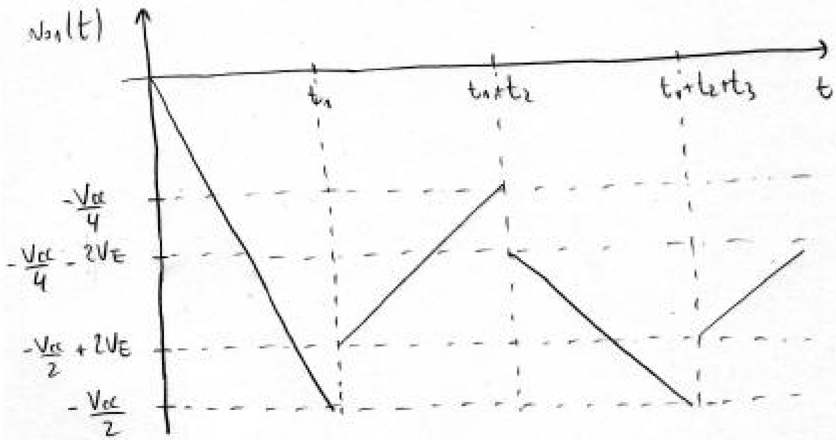
El comparador C conmuta para $t'' = t_3 \mid v_{o2}(t_3) = V_{c-} = 0 \Rightarrow \boxed{t_3 = \tau \frac{(V_{cc} - 8V_E)}{2V_E}}$

$$v_{o1}(t_3) = -\frac{V_{cc}}{2}; \quad I_o'' = i_L(t_3) = -\frac{v_{o1}(t_3)}{R_1} \Rightarrow I_o'' = \frac{V_{cc}}{2R_1} = I_o$$

por lo que alcanza el régimen

3





(b) Debe ser $T = 3\tau$

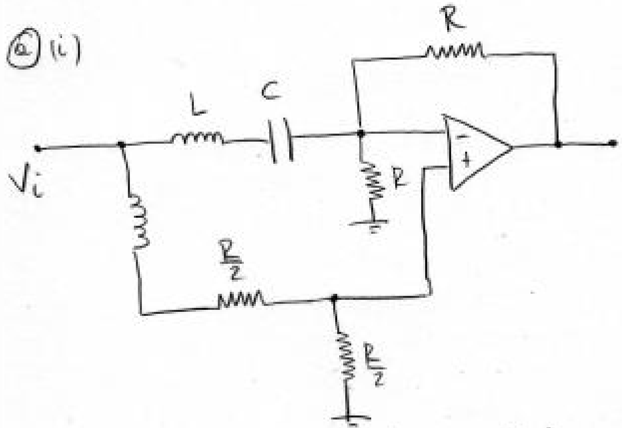
Pero $T = t_2 + t_3 = \tau \dfrac{(V_{cc} - 8V_E)}{V_E} \Rightarrow 3V_E = V_{cc} - 8V_E$

$\Rightarrow \boxed{V_{cc} = 11 V_E}$

4

Ejercicio 2:

a (i)



La tensión en la pata + del operacional resulta $e_+ = \frac{R}{2(R+Ls)} V_i$ por el divisor resistivo

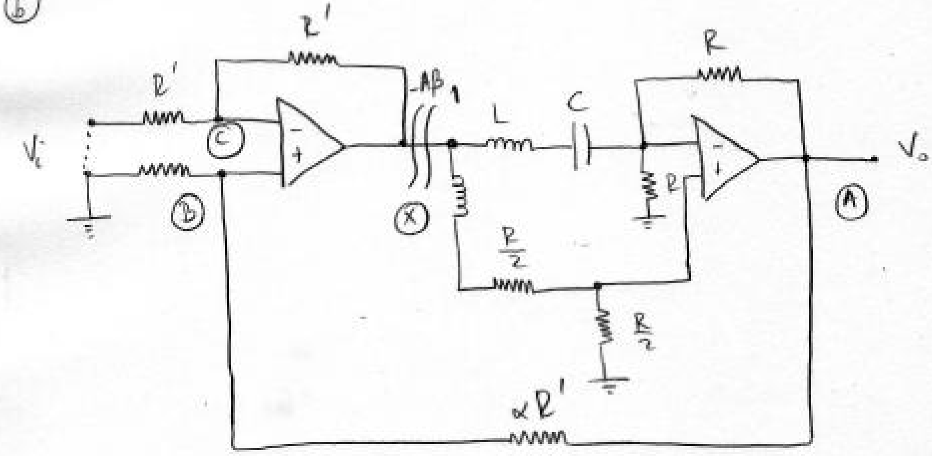
Planteando el nudo: $$\frac{V_i - \frac{R}{2(R+Ls)}V_i}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{V_i}{2(R+Ls)} + \frac{\frac{R\,V_i}{2(R+Ls)} - V_o}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{V_i\,Cs}{LCs^2+1}\,\frac{(R+2Ls)}{2(R+Ls)} = \frac{V_i}{R+Ls} - \frac{V_o}{R}$$

$$\Rightarrow V_i\left[\frac{RCs-2}{2(R+Ls)(LCs^2+1)}\right] = -\frac{V_o}{R} \quad \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R}{2L}\,\frac{RCs-2}{(s+\frac{R}{L})(LCs^2+1)}}$$

(ii) Hallando los polos de la transferencia encontramos que son $s_1 = -\frac{R}{L}$, $s_2 = \frac{j}{\sqrt{LC}}$, $s_3 = \frac{-j}{\sqrt{LC}}$.
Como dos de los polos son imaginarios puros, el sistema es inestable en el sentido BIBO

b



Abro el lazo e inyecto una señal unitaria en X. Sé que a la vuelta tengo $-A\beta$.

5

Reconociendo el bloque ya estudiado, en A tengo $H(s)$. En B tengo $\frac{H(s)}{1+\alpha}$ por el divisor resistivo. Notando que en la apertura de lazo se anula V_{in} y por la tierra virtual, en C tengo $\frac{H(s)}{1+\alpha}$. Finalmente $-\frac{H(s)}{1+\alpha} = \frac{H(s)}{1+\alpha} + A\beta$

$$\Rightarrow \boxed{-A\beta(s) = \frac{2H(s)}{1+\alpha}}$$

c) En primer lugar realizamos los diagramas de Bode asintóticos de $A\beta(j\omega)$.

Usando que $\frac{R}{L} = 100\omega_0$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{100}$

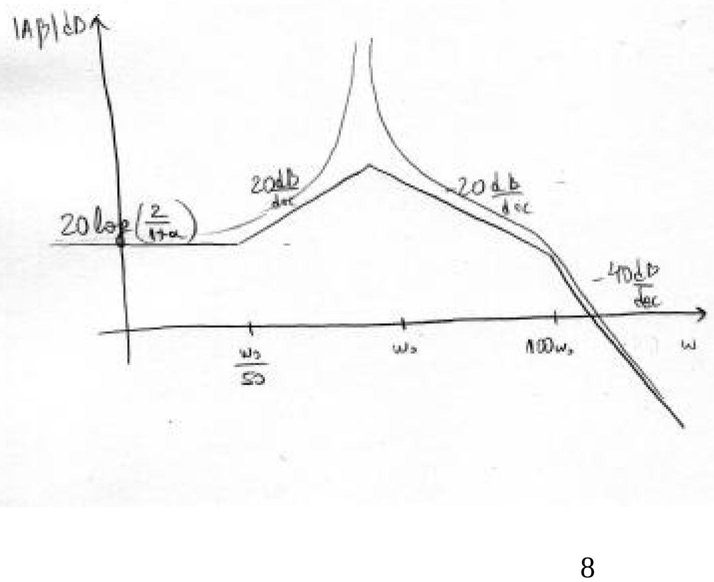
$$A\beta(j\omega) = \frac{10^4\omega_0^2}{1+\alpha}\,\frac{\left(j\omega - \frac{\omega_0}{50}\right)}{(j\omega + 100\omega_0)\left((j\omega)^2+\omega_0^2\right)}$$

Para $\omega \ll \frac{\omega_0}{50} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{2}{1+\alpha} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| \simeq 20\log\frac{2}{1+\alpha}\ dB \\ \arg(A\beta) \simeq \pi \end{cases}$

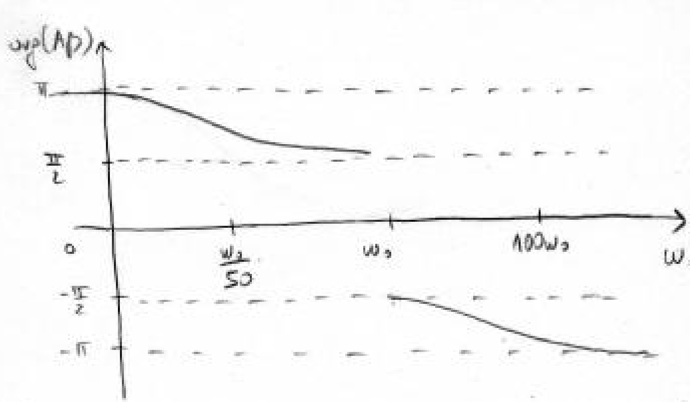
Para $\frac{\omega_0}{50} \ll \omega \ll \omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{100\,j\omega}{(1+\alpha)\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| = 20\log\frac{100}{(1+\alpha)\omega_0} + 20\log\omega\ dB \\ \arg(A\beta) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega_0 \ll \omega \ll 100\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{100\omega_0}{(1+\alpha)j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| = 20\log\frac{100\omega_0}{1+\alpha} - 20\log\omega\ dB \\ \arg(A\beta) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

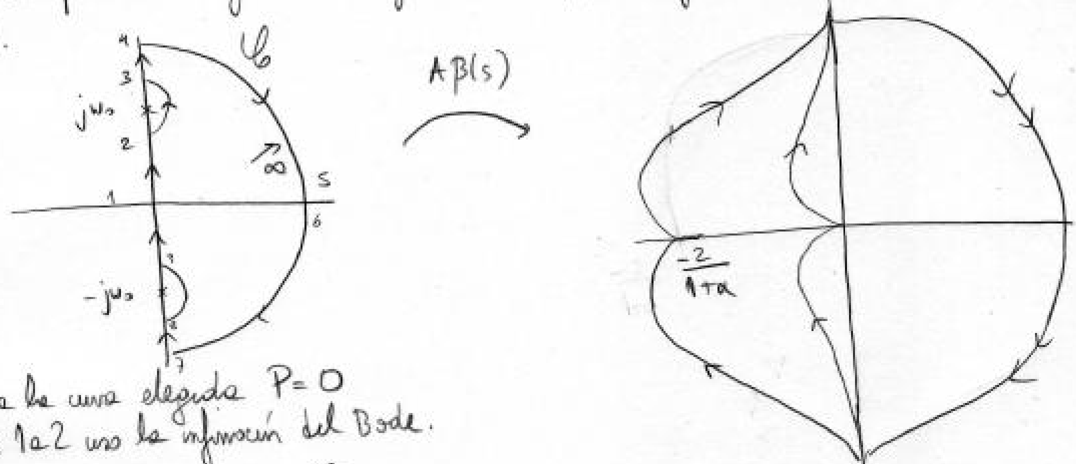
Para $\omega \gg 100\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{10^4\omega_0^2}{(1+\alpha)\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| = 20\log\frac{10^4\omega_0^2}{1+\alpha} - 40\log\omega\ dB \\ \arg(A\beta) \simeq -\pi \end{cases}$



6



Ahora podemos realizar el diagrama de Nyquist y ver cuantos vueltas da alrededor de -1.



Para la curva elegida $P = 0$

De 1 a 2 uso la información del Bode.

De 2 a 3, $s = j\omega_0 + re^{j\theta}$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $r \to 0$

$$\Rightarrow \underset{r\ \text{chico}}{A\beta(s) \simeq} \frac{10^4 \omega_0^2}{1+\alpha} \frac{j\omega_0}{100\omega_0 (2j\omega_0 re^{j\theta})} = \frac{50\omega_0}{(1+\alpha)} \frac{e^{-j\theta}}{r}$$ por lo que describe una

curva de $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$ con radio tendiendo a infinito

De 3 a 4 uso la información del Bode.

De 4 a 5 se mapea al origen

El resto, simétrico respecto al eje real.

Del Nyquist vemos que si $-\frac{2}{1+\alpha} > -1$, no se da ninguna vuelta alrededor de -1.

$\Rightarrow N = Z - P = 0 \Rightarrow Z = 0$ y será ESTABLE.

$\Rightarrow -2 > -1 - \alpha \Rightarrow$ Si $\boxed{\alpha > 1}$ es ESTABLE.