Sistemas Lineales 2
Marzo del 2001

Ejercicio 1

1) En el circuito de la Figura 1, hallar la transferencia $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{E(s)}$

   Si la fuente e(t) es el diente de sierra de la Figura 2:

2) Llamando $v_o(t)$ a la solución permanente del voltaje de salida, calcular el valor de continua de $v_o(t)$.

3) Hallar la función $v_o(t)$.

4) Describir otro posible método para resolver la parte 3).

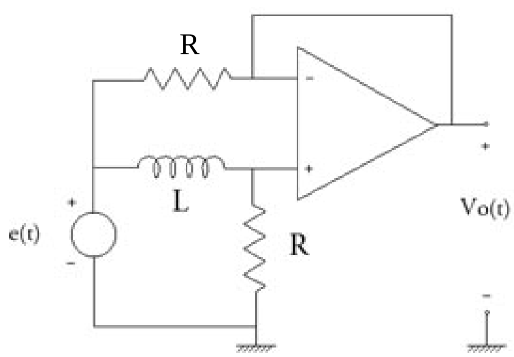


figura 1

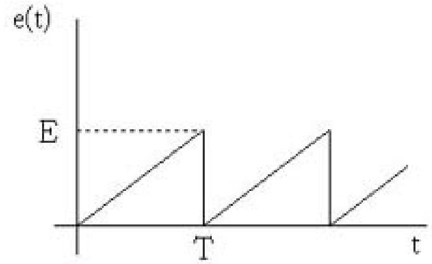


figura 2

Sistemas Lineales 2
Marzo del 2001

Ejercicio 2

a) En el circuito de la figura 1 hallar, Z_v en función de Z.

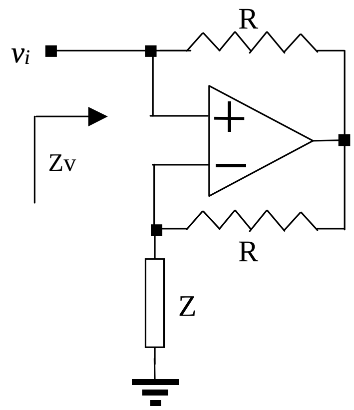


Figura 1

b)

i) En el circuito de la figura 2 hallar la transferencia $H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

ii) ¿Es el circuito estable?

iii) Demostrar que si $C=\frac{1}{L.\omega_1^2}$ y $R=L.\omega_1.\left(10-\frac{1}{10}\right)$,

$$H(s)=\frac{s^2+\omega_1^2}{\left(s+\frac{\omega_1}{10}\right)(s-10.\omega_1)}$$

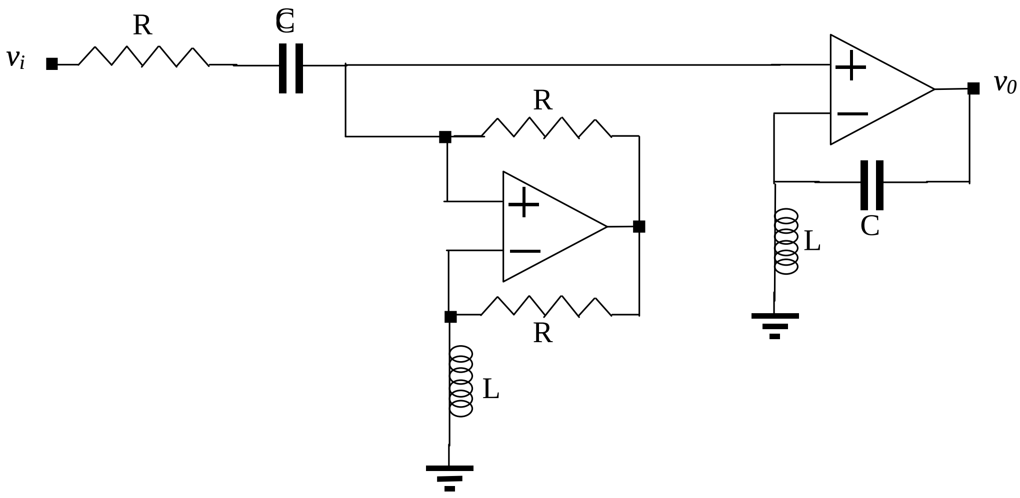


Figura 2

c) En las condiciones de la parte b)iii) estudiar por Nyquist la estabilidad del sistema de la figura 3.

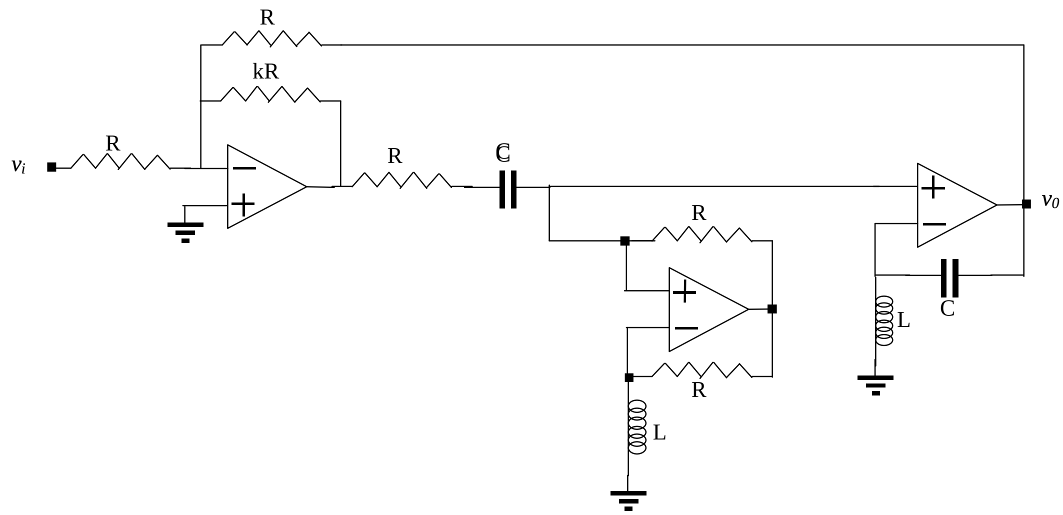


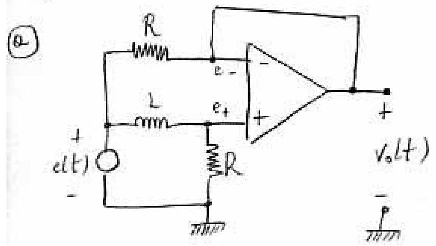
Figura 3

SISTEMAS LINEALES 2: MARZO 2001

1

Ejercicio 1:

(a)



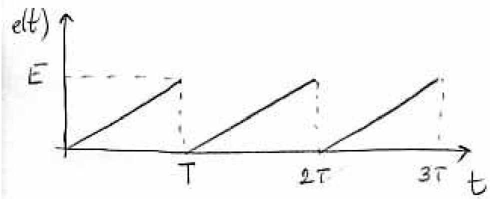
Con el A.O. ideal trabajando en zona lineal tenemos $e_+ = V_o(s)$

Como no toma corriente, del divisor de tensiones resulta:

$$V_o(s) = \frac{R}{R+Ls}E(s) \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{\omega_o}{s+\omega_o}},\ \omega_o = \frac{R}{L}$$

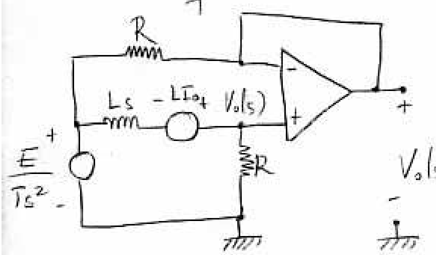
(b) $H(j\omega) = \frac{\omega_o}{j\omega+\omega_o}$. Sea $c_o(e)$ el valor medio de la entrada $e(t)$.

$$\Rightarrow c_o(v_o) = c_o(e)\,H(j0) = c_o(e)$$



$$\Rightarrow c_o(e) = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt = \frac{E}{2} \Rightarrow \boxed{c_o(v_o) = \frac{E}{2}}$$

(c) Para obtener $v_o(t)$ en régimen, supongo que ha pasado mucho tiempo de forma de asegurarme que el transitorio se ha extinguido, y fijo mi origen de tiempo en el arranque de un período. En dicho instante hay un dato previo de corriente por la bobina I_o.
El circuito equivalente a estudiar en Laplace resulta:



$$\Rightarrow V_o(s) = \frac{\omega_o}{s+\omega_o}\left[\frac{E}{Ts^2} + LI_o\right] = \frac{E}{T}\frac{\omega_o}{s^2(s+\omega_o)} + LI_o\frac{\omega_o}{s+\omega_o}$$

Antitransformando cada una de las expresiones:

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = \left[\frac{E}{T\omega_o}\left(\omega_o t - 1 + e^{-\omega_o t}\right) + LI_o\omega_o e^{-\omega_o t}\right] Y(t).}$$

Para imponer que sea la solución en régimen se debe verificar: $I_o = \frac{v_o(T)}{R}$

$$\Rightarrow I_o = \frac{E}{RT\omega_o}\left(\omega_o T - 1 + e^{-\omega_o T}\right) + I_o e^{-\omega_o T} \Rightarrow \boxed{I_o = \frac{E}{RT\omega_o}\left(\frac{\omega_o T - 1 + e^{-\omega_o T}}{1 - e^{-\omega_o T}}\right)}$$

2

Por lo tanto $v_o(t)$ en régimen es la prolongación T-periódica de v_o hallada para un período. El valor de I_0 es el calculado.

1) Otra forma consiste en obtener la representación en Series de Fourier de $v_o(t)$.

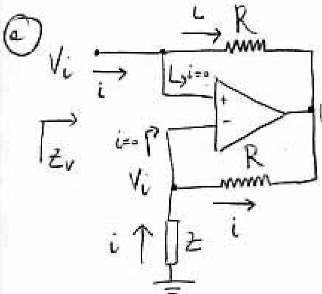
Sea $e(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(e)\, e^{j n \frac{2\pi}{T} t}$ la representación en Series de Fourier de $e(t)$.

Luego sabemos que $\boxed{v_o(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H\left(j n \frac{2\pi}{T}\right) c_n(e)\, e^{j n \frac{2\pi}{T} t}}$ donde $H\left(j n \frac{2\pi}{T}\right) c_n(e) = c_n(v_o)$

Recordar que esta expresión es sólo válida para la solución permanente en régimen de la salida

Ejercicio 2:

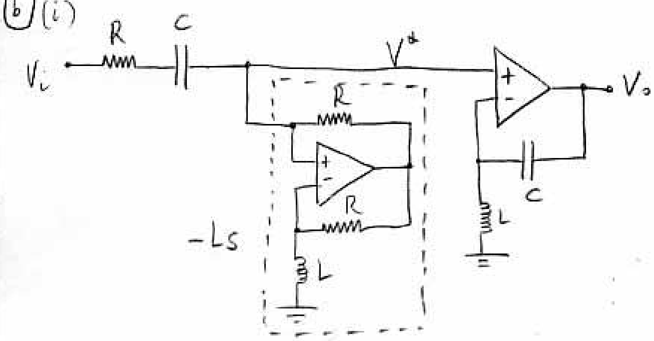
(a)



Siendo el A.O. ideal trabajando en zona lineal, por el cortocircuito virtual tenemos que $e_- = V_i$

Sea $i = \frac{V_i - V_o}{R}$, como el A.O. no toma corriente se cumple que $V_i = -Zi \Rightarrow \boxed{Z_v = -Z}$

(b) (i)



Planteando un par de divisores de tensión:

$$V^\alpha = \frac{-Ls}{R + \frac{1}{Cs} - Ls} V_i$$

$$V^\alpha = \frac{Ls}{\frac{1}{Cs} + Ls} V_o$$

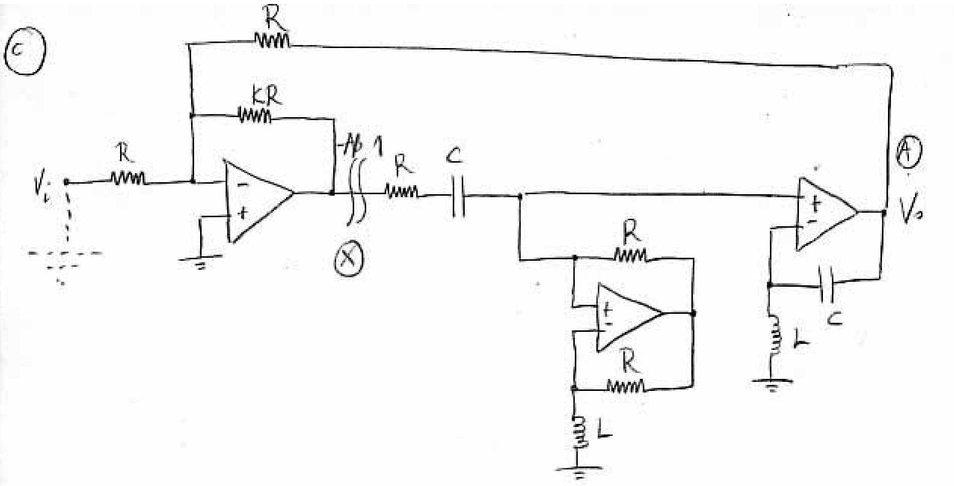
$$\Rightarrow \frac{-V_i}{-LCs^2 + RCs + 1} = \frac{V_o}{LCs^2 + 1} \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 - \frac{R}{L}s - \frac{1}{LC}}}$$

(ii) Los polos del sistema son $s = \frac{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}}{2}$. Los polos son reales y se observa que siempre, al menos uno de ellos será positivo. El sistema es inestable BIBO.

(iii) $\omega_1^2 = \frac{1}{LC}$ y $\frac{R}{L} = \omega_1\left(10 - \frac{1}{10}\right) \Rightarrow H(s) = \frac{s^2 + \omega_1^2}{s^2 - \omega_1\left(10 - \frac{1}{10}\right)s - \omega_1^2}$

Efectivamente puede factorizarse como: $\boxed{H(s) = \frac{s^2 + \omega_1^2}{\left(s + \frac{\omega_1}{10}\right)\left(s - 10\omega_1\right)}}$

(c) (4)



Abro el lazo e inyecto una señal unitaria en (X). Se que a la vuelta tengo $-A\beta(s)$.
Reconociendo el bloque ya estudiado, en (A) tengo $H(s)$. Reconociendo la etapa inversora de ganancia $-K$, tenemos que

$$\boxed{-A\beta(s) = -K\,\frac{s^2+\omega_1^2}{\left(s+\frac{\omega_1}{10}\right)(s-10\omega_1)}}$$

Realicemos los diagramas de Bode de

$$A\beta(j\omega) = K\,\frac{(j\omega)^2+\omega_1^2}{\left(j\omega+\frac{\omega_1}{10}\right)(j\omega-10\omega_1)}$$

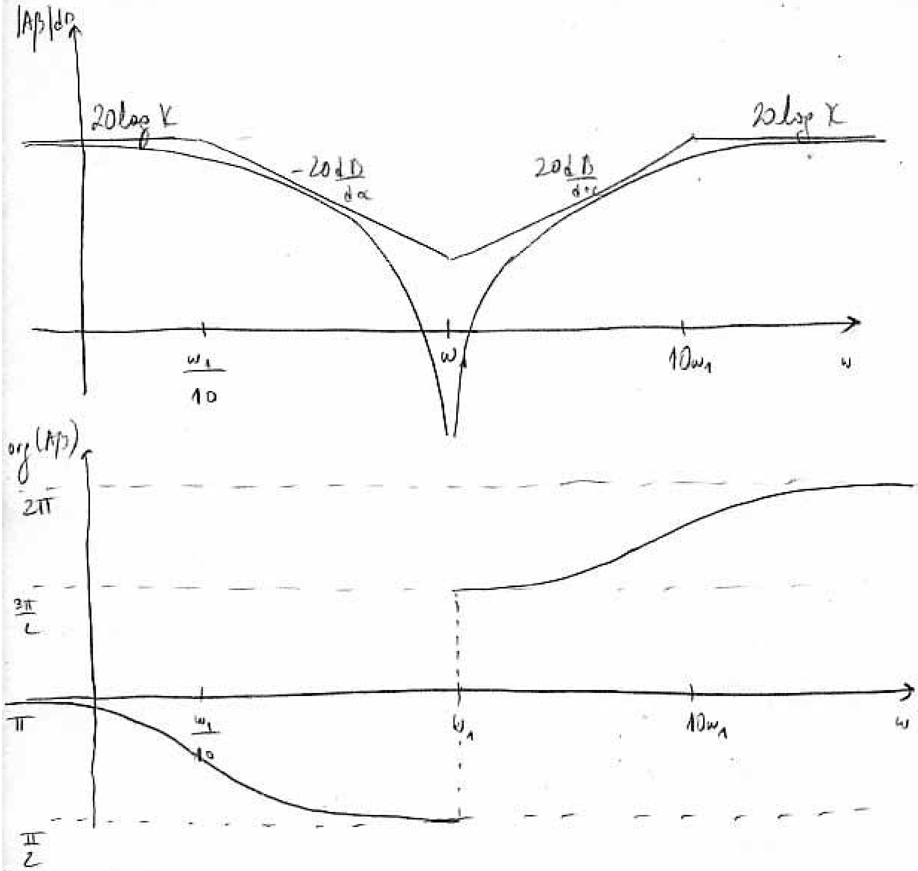
Para $\omega \ll \frac{\omega_1}{10} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -K \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \simeq 20\log K \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \simeq \pi \end{cases}$

Para $\frac{\omega_1}{10} \ll \omega \ll \omega_1 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{-K\omega_1}{10j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{\omega_1 K}{10}\right) - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

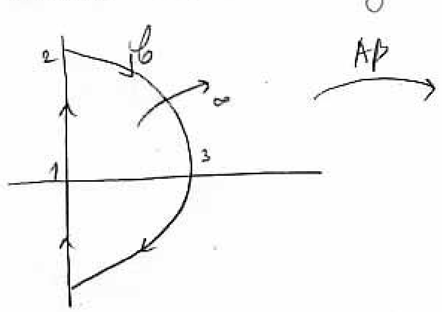
Para $\omega_1 \ll \omega \ll 10\omega_1 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{-K\,j\omega}{10\omega_1} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{K}{10\omega_1}\right) + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \simeq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

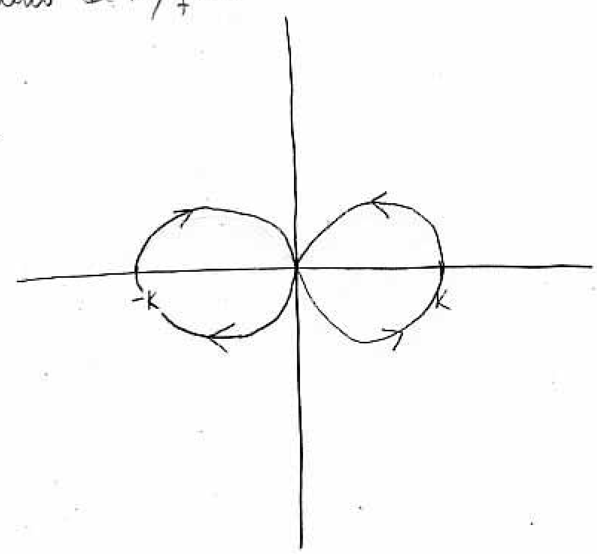
Para $\omega \gg 10\omega_1 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq K \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \simeq 20\log K \\ \arg(A\beta) \simeq 2\pi \end{cases}$

5



Estudiemos la estabilidad según el criterio de Nyquist





De 1 a 2 utilizo la información del Bode

De 2 a 3 se mapea a K.

El resto, simétrico respecto al eje real.

Para la curva $\mathcal{C}$ elegida $\Rightarrow P = 1 \Rightarrow N = Z - P$ y para estabilidad $Z = 0$

$\Rightarrow N = -1$

Se distinguen dos zonas $\begin{cases} -K < -1 \Rightarrow K > 1,\ N = 1 \\ -K \geq -1 \Rightarrow K \leq 1,\ N = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Es <u>INESTABLE $\forall K \geq 0$</u>