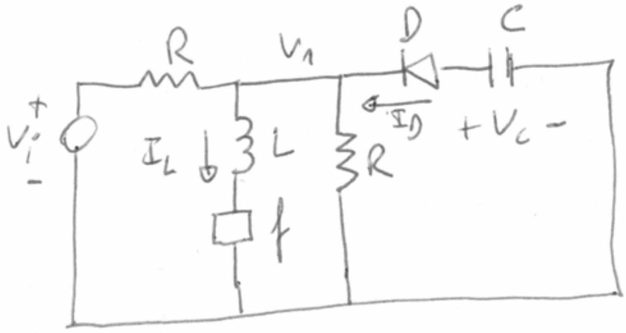
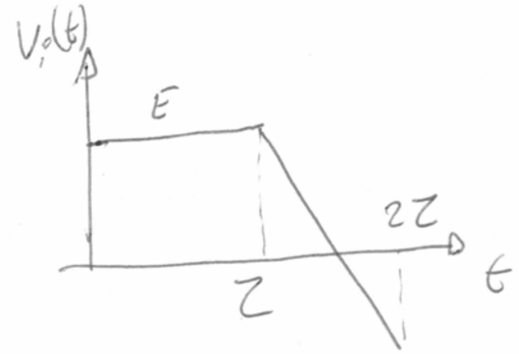
Exámen 21/07/06

Ejercicio 1:





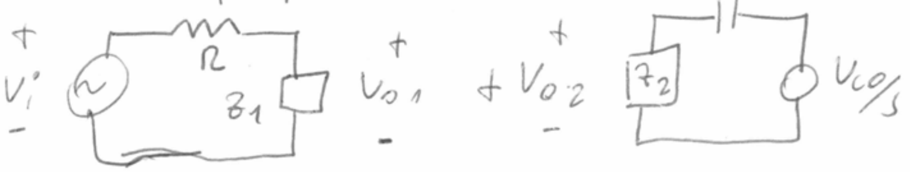
a)

Para calcular I_{corte}, debemos calcular I_L en el instante $t=\tau$.

En Laplace $I_L(s) = \dfrac{V_1(s)}{LS}$

Para calcular $V_1(s)$ pasamos el circuito a Laplace, suponemos D ON ($\Delta V_{DIODO} = 0$). Tenemos condiciones iniciales en el capacitor, que se comportan como una fuente independiente en Laplace.

Aplicando superposición tenemos:



$V_{co} = \dfrac{3E}{4}$

$V_i = \dfrac{E}{s}$

La superposición de los dos circuitos es equivalente al circuito original, siendo:

$V_1 = V_{o1} + V_{o2}$ (V_1 es el del circuito original)

$$Z_1 = LS // R // 1/Cs = \frac{LRS}{LRCS^2+LS+R} \underset{\uparrow}{=} \frac{LS}{\tau^2 s^2 + 2S + 1}$$

$(\tau = \frac{L}{R} = RC)$

$$Z_2 = R//R//LS = \frac{RLS}{R+2LS} = \frac{LS}{2\tau S+1}$$

Por divisor de tensión calculamos V_{o1} y V_{o2}:

$$V_{o1} = \frac{Z_1}{Z_1+R} V_i = \frac{\tau}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1} E$$

$$V_{o2} = \frac{Z_2}{Z_2 + 1/Cs} \frac{V_{co}}{s} = \frac{3}{4} \frac{\tau^2 s}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1} E$$

$$\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1 = (\tau s+1)^2 = \tau^2 (s + 1/\tau)^2$$

$V_1 = V_{o1} + V_{o2}$

$$V_1 = \frac{1}{\tau} \frac{1}{(s+1/\tau)^2} E + \frac{3}{4} \frac{s}{(s+1/\tau)^2} E$$

Ejercicio 1:

a) Continuación

Ahora podemos calcular I_L:

$$I_L(s) = \frac{V_1(s)}{Ls} \underset{\substack{\uparrow \\ (L=RZ,\ C=Z/R)}}{=} \frac{E}{RZ^2}\frac{1}{s(s+1/Z)^2} + \frac{3}{4}\frac{E}{RZ}\frac{1}{(s+1/Z)^2}$$

$$I_L(s) = \frac{E}{RZ^2}\left(\frac{Z^2}{s} - \frac{Z}{(s+1/Z)^2} - \frac{Z^2}{(s+1/Z)}\right) + \frac{3}{4}\frac{E}{RZ}\frac{1}{(s+1/Z)^2}$$

Antitransformando y reordenando términos:

$$i_L(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{4}\frac{t}{Z}\right)e^{-1/Z\,t}\right]Y(t) \qquad t \in [0,t)$$

Calculamos ahora Icorte:

$$I_{corte} = i_L(Z) = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{5}{4}e^{-1}\right) \approx 0{,}54\frac{E}{R} \Rightarrow \boxed{I_{corte} = 0{,}54\frac{E}{R}}$$

b) Esta parte complementa la parte (a), ya que para que tenga validez el resultado hallado en la parte anterior se debe verificar que el diodo conduce en el tramo $[0,Z)$. Para que esto sea cierto, se debe cumplir $I_{DIODO} = I_D > 0$.

Calculamos I_D:

$$I_D = \frac{V_{C0} - V_1}{1/Cs} = \frac{3}{4}\frac{E}{s}Cs - Cs\left(\frac{1}{Z}\frac{1}{(s+1/Z)^2}E + \frac{3}{4}\frac{s}{(s+1/Z)^2}E\right)$$

$$I_D \underset{\substack{\uparrow \\ (C=Z/R)}}{=} \frac{3}{4}Z\frac{E}{R} - \frac{s}{(s+1/Z)^2}\frac{E}{R} - \frac{3}{4}Z\frac{s^2}{(s+1/Z)^2}\frac{E}{R}$$

Tenemos que:

$$\frac{s}{(s+1/Z)^2} = \frac{1}{s+1/Z} - \frac{1}{Z}\frac{1}{(s+1/Z)^2}$$

$$\frac{s^2}{(s+1/Z)^2} = 1 - \frac{2}{Z}\frac{1}{(s+1/Z)} + \frac{1}{Z^2}\frac{1}{(s+1/Z)^2}$$

$\Rightarrow$

Ejercicio 1:

b) Continuación:

$$I_D = \frac{3}{4}\cancel{2\frac{E}{R}} - \frac{1}{(s+1/2)}\frac{E}{R} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1/2)^2} - \cancel{\frac{3}{4}2\frac{E}{R}} + \frac{3}{2}\frac{1}{(s+1/2)}\frac{E}{R} - \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1/2)^2}\frac{E}{R}$$

Antitransformando y reordenando términos:

$$i_D(t) = \frac{E}{R}\left[\frac{1}{2}e^{-1/2\,t} + \frac{1}{4}\frac{t}{Z}e^{-1/2\,t}\right]Y(t), \quad \text{con } t \in [0, Z)$$

Se puede ver que $\boxed{i_D(t) > 0 \quad \forall t \in [0, Z)}$

c) Vamos a analizar $V_c(t)$ por tramos:

- En $t \in [0, Z)$ $V_C = V_1$ que ya lo tenemos calculado de la parte (a):

$$V_C = \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1/2)^2}E + \frac{3}{4}\frac{s}{(s+1/2)^2}E$$

Antitransformando y reordenando términos:

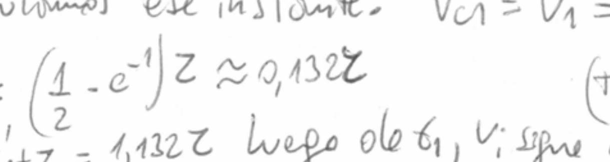
$$\boxed{V_c(t) = \left[\frac{E}{4}\frac{t}{Z}e^{-1/2\,t} + \frac{3}{4}E\,e^{-1/2\,t}\right]Y(t) \qquad 0 \le t < Z}$$

- En el instante $t=Z$ se corta el fusible, por lo que el circuito no contiene más la rama en la que se encuentra L.

Calculamos el dato previo del condensador para el siguiente tramo

$V_{C1} = V_c(t)\big|_{t=Z} = e^{-1}E$

En este tramo suponemos D off, el circuito queda



V_i es una rampa decreciente; en $t=Z$, $V_i = E \Rightarrow \Delta V_D^{(Z)} = V_{C1} - V_1 = \left(e^{-1} - \frac{1}{2}\right)E < 0$

Esto verifica D off. Luego V_i decrece hasta que en $t = t_1$ $\Delta V_D = 0$.

Calculamos ese instante: $V_{C1} = V_1 \Rightarrow e^{-1}E = \frac{V_i'}{2} = -\frac{E}{Z}t_1' + \frac{E}{2}$

$\Rightarrow t_1' = \left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right)Z \approx 0,132Z$ (tomando $t' = t - Z$; $V_i' = -\frac{2E}{Z}t' + E$)

$\Rightarrow t_1 = t_1' + Z = 1,132Z$ luego de t_1, V_i sigue decreciendo, por lo que el diodo vuelve a conducir ($\Delta V_D = 0$), el tramo analizado $V_c = V_{C1} \Rightarrow \boxed{V_c(t) = e^{-1}E \qquad t \in [Z; 1,132Z]}$