Sistemas Lineales 2
Examen, 16 de julio del 2004

Te solicitamos:

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.

- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.

- **resolver problemas diferentes en hojas separadas**.

Se recuerda que la prueba es individual y **dura 3 horas**. No olvides de administrar el tiempo de la mejor manera. Para pasar a la instancia de oral es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

Ejercicio 1

a) Se considera el cuadripolo *girador* de la Figura 1, definido por las siguientes relaciones: $\begin{cases} V_1 = -rI_2 \\ V_2 = rI_1 \end{cases}$.

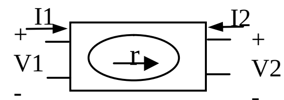


Figura 1

Notar que puede caracterizarse por un único parámetro $r > 0$.

1. Hallar la impedancia vista Z_V desde el primario, cuando el secundario se carga con una impedancia Z.
2. El secundario se carga con una impedancia inductiva, ¿qué tipo de impedancia se ve desde el primario?

b) Sea el circuito de la Figura 2, donde los amplificadores operacionales son ideales. Mostrar que se trata de un cuadripolo ***girador*** y hallar r en función de los parámetros.

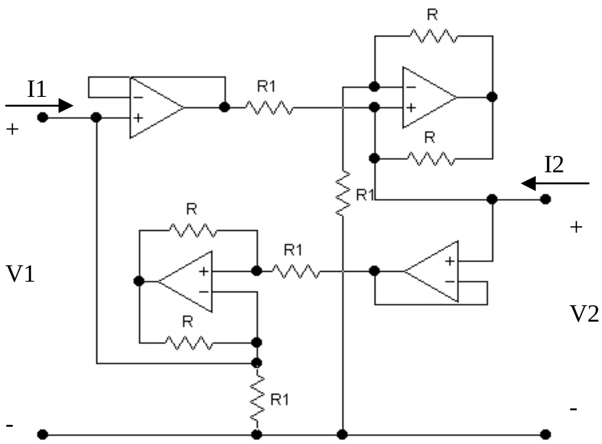


Figura 2

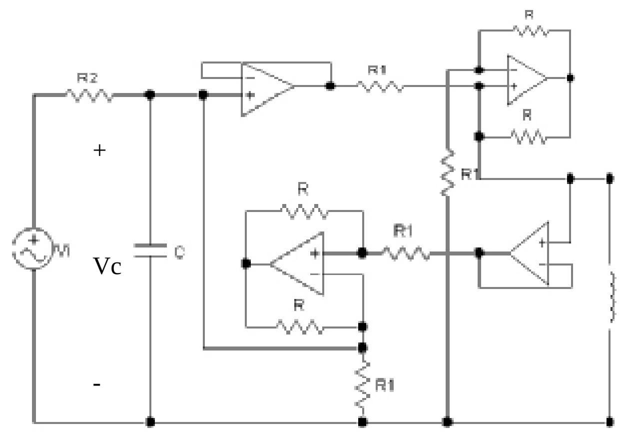


Figura 3

c) Sea el sistema de la Figura 3 de entrada $v_i(t)$ y salida $v_c(t)$, tensión en el condensador C.

1. ¿Es dicho sistema BIBO estable? **Justifique.**
2. Hallar y graficar la respuesta exacta en régimen del sistema, ante la entrada periódica que se muestra en la Figura 4. Se cumplen $2C = \frac{L}{R_1^2}$ y $T = 3R_2C$.

   (Sugerencia: recordar la expresión de carga y descarga de un condensador con tensión continua: $v_f + (v_0 - v_f).e^{-t/t}$).

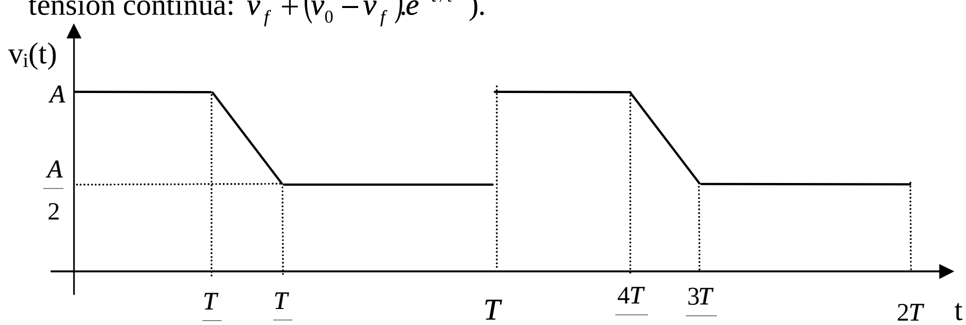
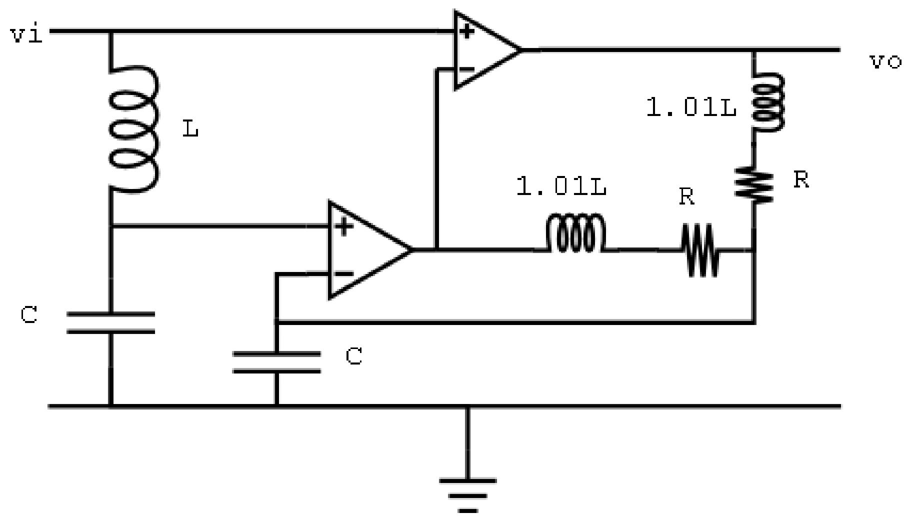


Figura 4

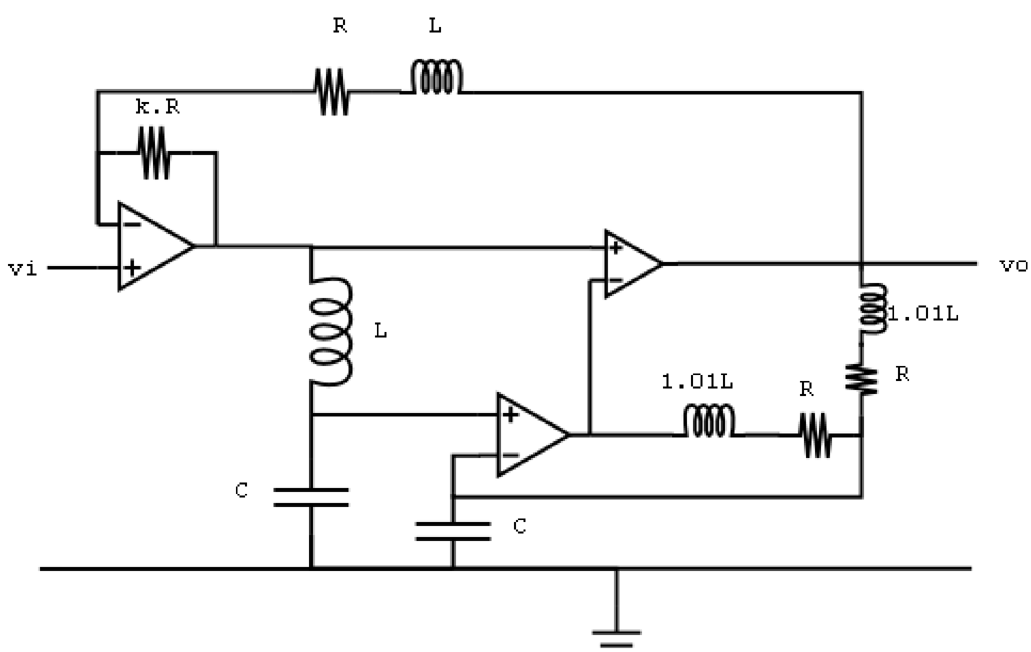
Ejercicio 2

En todo el ejercicio los operacionales son ideales.

1 – En el circuito de la figura siguiente hallar la transferencia H(s) = Vo(s)/V_I(s).



2 –
a) En el circuito de la figura siguiente hallar la transferencia de lazo abierto.

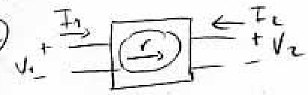


b) Realizar el diagrama de Bode de “Aβ” sabiendo que $R = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

3 – Estudiar la estabilidad según el criterio de Nyquist para el circuito de la parte 2. Si realiza alguna aproximación, justifíquela.

SISTEMAS LINEALES 2 : JULIO 2004 (1)

Ejercicio 1:

a) 

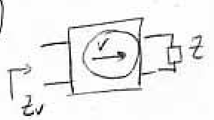
$$\begin{cases} V_1 = -r I_2 \\ V_2 = r I_1 \end{cases}$$

.1) $\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$

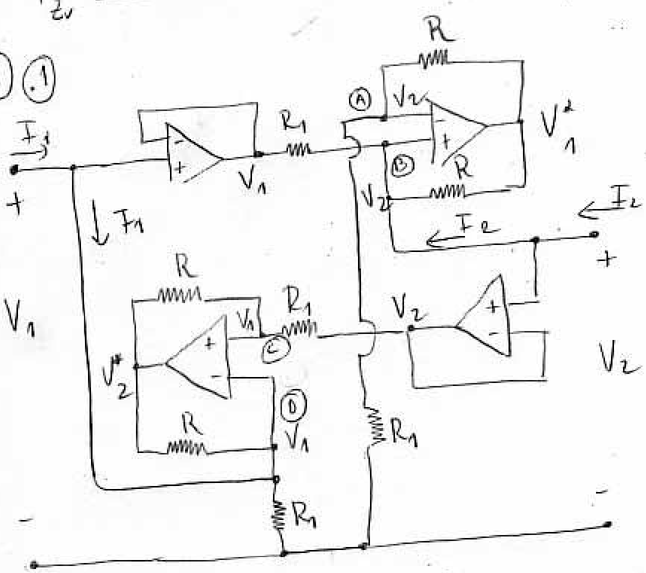
$\Rightarrow A = \left.\dfrac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \Rightarrow \boxed{A = 0}$, $B = \left.\dfrac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} \Rightarrow \boxed{B = r}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow C = \left.\dfrac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{1}{r}}$, $D = -\left.\dfrac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \Rightarrow \boxed{D = 0}$

.2) 

$$Z_v = \frac{V_1}{I_1} = \frac{-r I_2}{\frac{V_2}{r}} = -r^2 \frac{I_2}{V_2} = \frac{r^2}{Z} \Rightarrow \boxed{Z_v = \frac{r^2}{Z}}$$

b) .1) 

Amplificadores operacionales ideales

Planteando la ecuación de nudos en (A):

$$\frac{V_1^* - V_2}{R} = \frac{V_2}{R_1}$$

Lo mismo en (B):

$$\frac{V_1^* - V_2}{R} + \frac{V_1 - V_2}{R_1} = -I_2$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{V_2}}{\cancel{R_1}} + \frac{V_1 - \cancel{V_2}}{R_1} = -I_2 \Rightarrow \boxed{V_1 = -R_1 I_2}$$

Planteando la ecuación de nudos en (C):

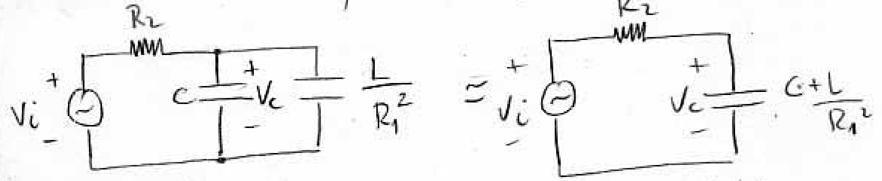
$$\frac{V_2 - V_1}{R_1} = \frac{V_1 - V_2^*}{R}$$

Lo mismo en (D): $I_1 = \dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_1 - V_2^*}{R} \Rightarrow I_1 = \dfrac{V_2}{R_1} \Rightarrow \boxed{V_2 = R_1 I_1}$

Es un girador con $\boxed{r = R_1}$

.2) $Z = Ls \Rightarrow \boxed{Z_v = \dfrac{R_1^2}{Ls}}$ Es una capacidad de valor $C = \dfrac{L}{R_1^2}$

c) 1) El sistema es equivalente a filtro RC : 2

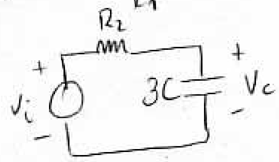


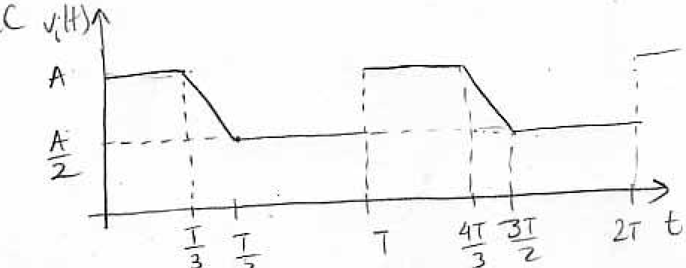
$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{R_2\left(C+\frac{L}{R_1^2}\right)} \frac{1}{s + \frac{1}{R_2\left(C+\frac{L}{R_1^2}\right)}}$$

El polo del sistema es $s_0 = -\frac{1}{R_2\left(C+\frac{L}{R_1^2}\right)}$ que se encuentra en el semiplano izquierdo

$\Rightarrow$ El sistema es BIBO estable.

2) $2C = \frac{L}{R_1^2}$, $T = 3R_2C$





Para obtener $v_c(t)$ en régimen, supongo que ha pasado mucho tiempo de forma de asegurarme que el transitorio se ha extinguido, y fijo mi origen de tiempos en el arranque de un período.

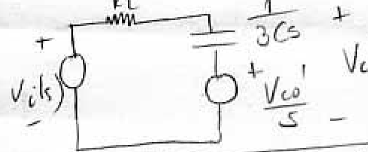
En dicho instante, el condensador está cargado a V_{c0}.

Recordando la fórmula de carga y descarga en un circuito RC se tiene:

$$v_c(t) = \left[A + (V_{c0} - A)\, e^{-\frac{t}{3R_2C}}\right]Y(t) \Rightarrow \boxed{v_c(t) = \left[V_{c0}\, e^{-\frac{t}{T}} + A\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right]Y(t)}$$

$$v_c\left(\frac{T}{3}\right) = V_{c0}\, e^{-\frac{1}{3}} + A\left(1-e^{-\frac{1}{3}}\right) = V_{c0}'$$

Estudiemos para $t' = t - \frac{T}{3} \geq 0$ $\Rightarrow V_i(s) = \frac{A}{s} - \frac{3A}{Ts^2}$



$$\Rightarrow V_c(s) = \frac{A}{Ts\left(s+\frac{1}{T}\right)} - \frac{3A}{T^2s^2\left(s+\frac{1}{T}\right)} + \frac{V_{c0}'}{s+\frac{1}{T}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_c(t') = \left[A\left(1-e^{-\frac{t'}{T}}\right) - 3A\left(\frac{t'}{T} - 1 + e^{-\frac{t'}{T}}\right) + V_{c0}'\, e^{-\frac{t'}{T}}\right]Y(t')}$$

$$v_c\left(\frac{T}{6}\right) = A\left(1-e^{-\frac{1}{6}}\right) - 3A\left(e^{-\frac{1}{6}} - \frac{5}{6}\right) + V_{c0}\, e^{-\frac{1}{2}} + A\left(1-e^{-\frac{1}{3}}\right)e^{-\frac{1}{6}} = V_{c0}''$$

③

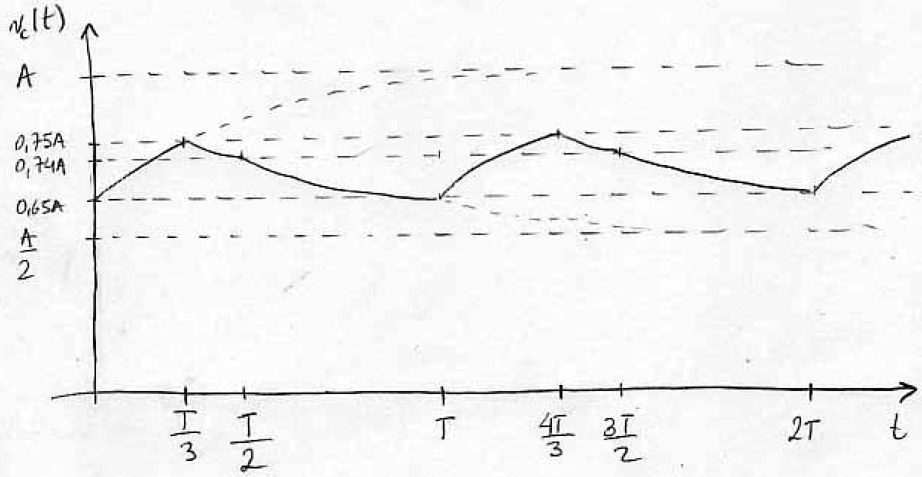
Estudiamos para $t'' = t' - \frac{T}{6} \geq 0$

$$\boxed{v_c(t'') = \left[V_{co}'' e^{-\frac{t''}{T}} + \frac{A}{2}\left(1 - e^{-\frac{t''}{T}}\right)\right] Y(t'')}$$

Imponiendo que sea la solución periódica en régimen tenemos: $V_{co} = v_c\left(t'' = \frac{T}{2}\right)$

$$\Rightarrow V_{co} = \frac{A}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) + V_{co} e^{-1} - A e^{-1} - 3A e^{-\frac{2}{3}} + \frac{7}{2} A e^{-\frac{1}{2}}$$

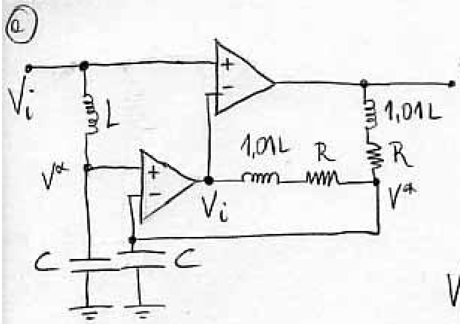
$$\Rightarrow \boxed{V_{co} = A\left(\frac{\frac{1}{2} + 3e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} - 3e^{-\frac{2}{3}}}{1 - e^{-1}}\right)} \approx 0{,}65A$$



4

Ejercicio 2:

(a)



Del divisor de tensión a la entrada:

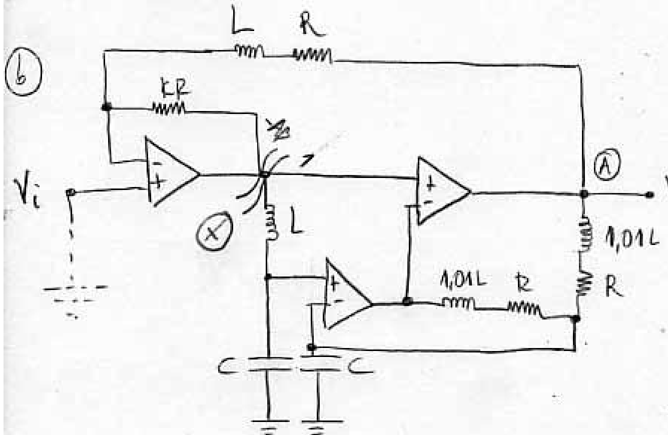
$$V^\alpha = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+Ls}\,V_i \Rightarrow V^\alpha = \frac{V_i}{LCs^2+1}$$

Planteando la ecuación de nudos:

$$\frac{V_i\left(1-\frac{1}{LCs^2+1}\right)}{1{,}01Ls+R} - V_i\frac{Cs}{LCs^2+1} = \frac{\frac{V_i}{LCs^2+1}-V_o}{1{,}01Ls+R}$$

Operando resulta: $\frac{V_o}{V_i} = \frac{0{,}01LCs^2+RCs+1}{LCs^2+1} \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{1}{100}\,\frac{s^2+100\frac{R}{L}s+\frac{100}{LC}}{s^2+\frac{1}{LC}}}$

(b)



Abro el lazo e inyecto una señal unitaria en ⊗. Se que a la vuelta tengo $-A\beta(s)$. Reconociendo el bloque de la parte anterior, en Ⓐ tengo $H(s)$. Reconociendo la etapa inversora tenemos

$$-A\beta(s) = \frac{-KR}{R+Ls}\,H(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{-A\beta(s) = -\frac{K}{100}\,\frac{R}{L}\,\frac{\left(s^2+100\frac{R}{L}s+\frac{100}{LC}\right)}{\left(s+\frac{R}{L}\right)\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)}}$$

(c) $R = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{L}{C}}$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{10} \Rightarrow A\beta(s) = \frac{K\omega_0}{1000}\,\frac{\left(s^2+10\omega_0 s+100\omega_0^2\right)}{\left(s+\frac{\omega_0}{10}\right)\left(s^2+\omega_0^2\right)}$

Tengo ceros complejos conjugados con $\omega_n = 10\omega_0$, $\zeta = \frac{1}{2}$.

Realizamos los Diagramas de Bode de $A\beta(j\omega)$

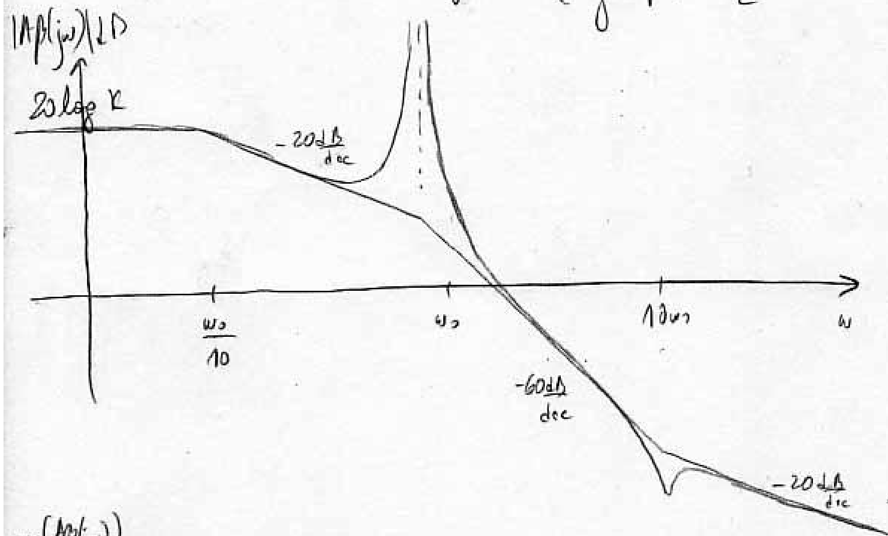
5

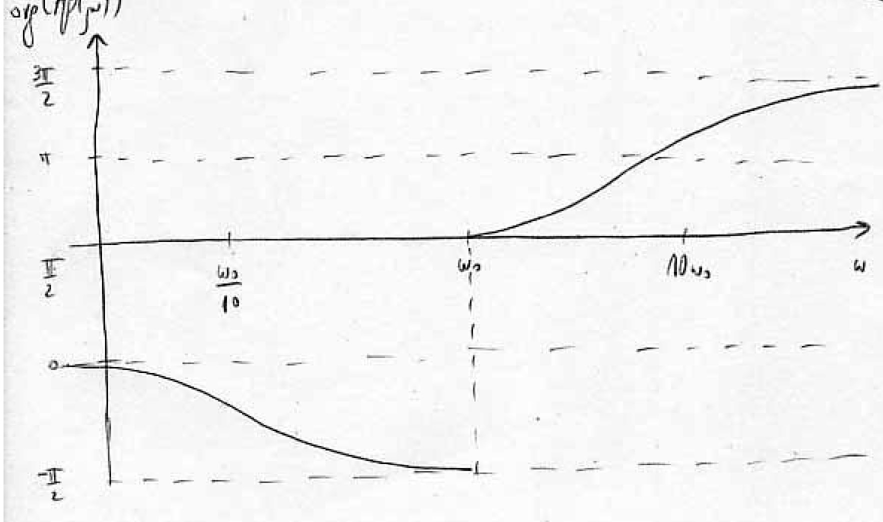
Para $\omega << \frac{\omega_o}{10} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq K \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| \simeq 20\log K \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \simeq 0 \end{cases}$

Para $\frac{\omega_o}{10} << \omega << \omega_o \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{K\omega_o}{10 j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| \simeq 20\log\left(\frac{K\omega_o}{10}\right) - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega_o << \omega << 10\omega_o \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{K\omega_o^3}{10 j\omega^3} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| \simeq 20\log\frac{K\omega_o^3}{10} - 60\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

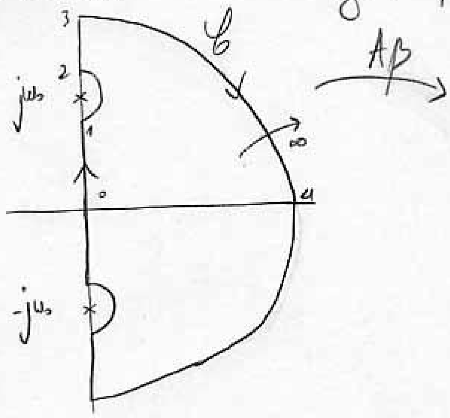
Para $\omega >> 10\omega_o \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{K\omega_o}{1000 j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| \simeq 20\log\frac{K\omega_o}{1000} - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \simeq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

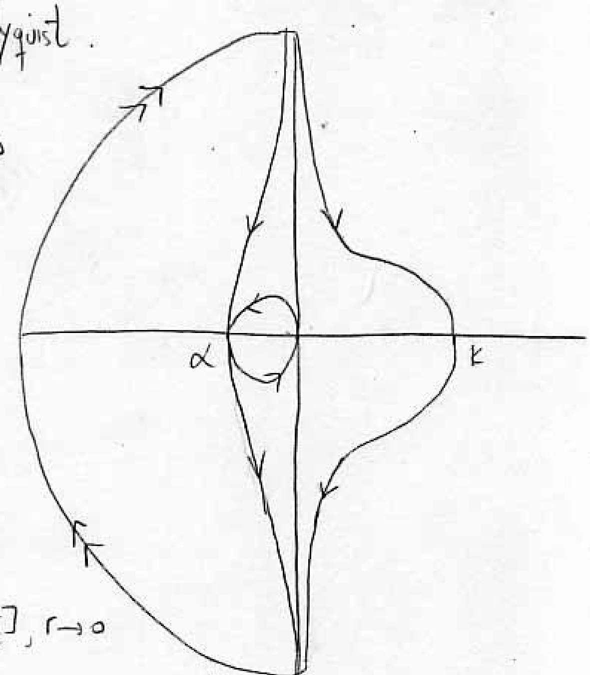




(6)

① Estudio de estabilidad según Nyquist.





De 0 a 1 uso la información del Bode

De 1 a 2: $s = j\omega_0 + re^{j\theta}$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $r \to 0$

$\Rightarrow A\beta(j\omega_0 + re^{j\theta}) \simeq \frac{K\omega_0}{1000} \frac{100\omega_0^2}{j\omega_0(2j\omega_0 re^{j\theta})} = \frac{K\omega_0}{20r} e^{-j(\theta+\pi)}$, un arco de circunferencia con radio $\to \infty$ y voy de $-\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{3\pi}{2}$.

De 2 a 3 uso la información del Bode.

De 3 a 4 se mapea al origen.

El resto, simétrico respecto al eje real.

Para la curva elegida, $P=0 \Rightarrow N = Z - P = 0$ para estabilidad

Para estabilidad $N=0$, que del Nyquist vemos que equivale a $\alpha < -1$

Del Bode, como los polos están separados una década, podemos aproximar $\alpha \approx A\beta(j10\omega_0)$

$\Rightarrow \alpha \approx -\frac{K}{10000}$

Por lo tanto $\alpha < -1 \Rightarrow \frac{-K}{10000} < -1 \Rightarrow \boxed{K > 10000}$ es ESTABLE