Solución:

a)
$$H(s)=\frac{1}{K_4 s}\left(H_V H_C H_S H(s)-K_5 A(s)\right)$$
$$\Rightarrow\ H(s)\left(K_5 s-H_V H_C H_S\right)=-K_5 A(s)$$
$$\Rightarrow\ G_{CL}(s)=\frac{K_5}{H_V H_C H_S-K_4 s}$$

b) Si la entrada es un escalón entonces $A(s)=\frac{A_0}{s}$ y en Laplace la salida será

$$H(s)=G_{CL}(s).\frac{A_0}{s}=\frac{K_5}{H_V H_C H_S-K_4 s}\frac{A_0}{s}$$

Los polos de sH(s) son los polos de G_{CL}, pero como el sistema es estable todos los polos de G_{CL} tienen parte real negativa, por lo tanto podemos aplicar el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=\lim_{s\to 0} H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K_5}{H_V\frac{H'_C}{s^n}H_S-K_4 s}A_0=\lim_{s\to 0}\frac{s^n s K_5 A_0}{H_V(0)H'_C(0)H_S(0)}=0$$

donde n es el orden del polo en el origen de H_C.

Sabemos que $H_V(0)H_S(0)\neq 0$ porque H_S y H_V no tienen ceros en el origen, de lo contrario cancelarían un polo de H_C.

c) Es fácil ver que la transferencia de lazo abierto es $''-A\beta''=\frac{H_V H_C H_S}{K_4 s}$.

H_S y H_V están dadas en la letra, por lo que solo resta hallar H_C.

El circuito son simplemente dos inversores en cascada por lo que su transferencia es sencilla de calcular:

$$H_C=\frac{V_c}{V_s}=-\frac{R+\frac{1}{Cs}}{\frac{R}{k_3}}=-K_3\frac{1+RCs}{RCs}=-K_3\frac{\frac{\omega_0}{10}+s}{s}$$

Por lo tanto la transferencia completa es:

$$-''A\beta''=\frac{K_1\frac{\omega_0^2}{s^2+\sqrt{2}\,\omega_0 s+\omega_0^2}K_2\frac{100\,\omega_0^2}{s^2+10\,\omega_0 s+100\,\omega_0^2}\left(-K_3\frac{\frac{\omega_0}{10}+s}{s}\right)}{K_4 s}=$$
$$-100\,K\,\omega_0^4\frac{\frac{\omega_0}{10}+s}{\left(s^2+\sqrt{2}\,\omega_0 s+\omega_0^2\right)\left(s^2+10\,\omega_0 s+100\,\omega_0^2\right)s^2}$$

Los diagramas de Bode de $A\beta(j\omega)$ se ven en la figura 4 y el diagrama de Nyquist correspondiente en la figura 5.

Para que el sistema sea estable el número de vueltas del diagrama de Nyquist de $A\beta$ debe ser 0 dado que el número de polos de $A\beta$ encerrados por la curva es cero.

Por lo tanto para que el sistema sea estable es necesario que
$\alpha < 1$

Hallamos α.
$H(j\omega) = -\alpha$

Como las raíces están separadas a una década es razonable suponer que el punto α se da para $\omega = \omega_0$.

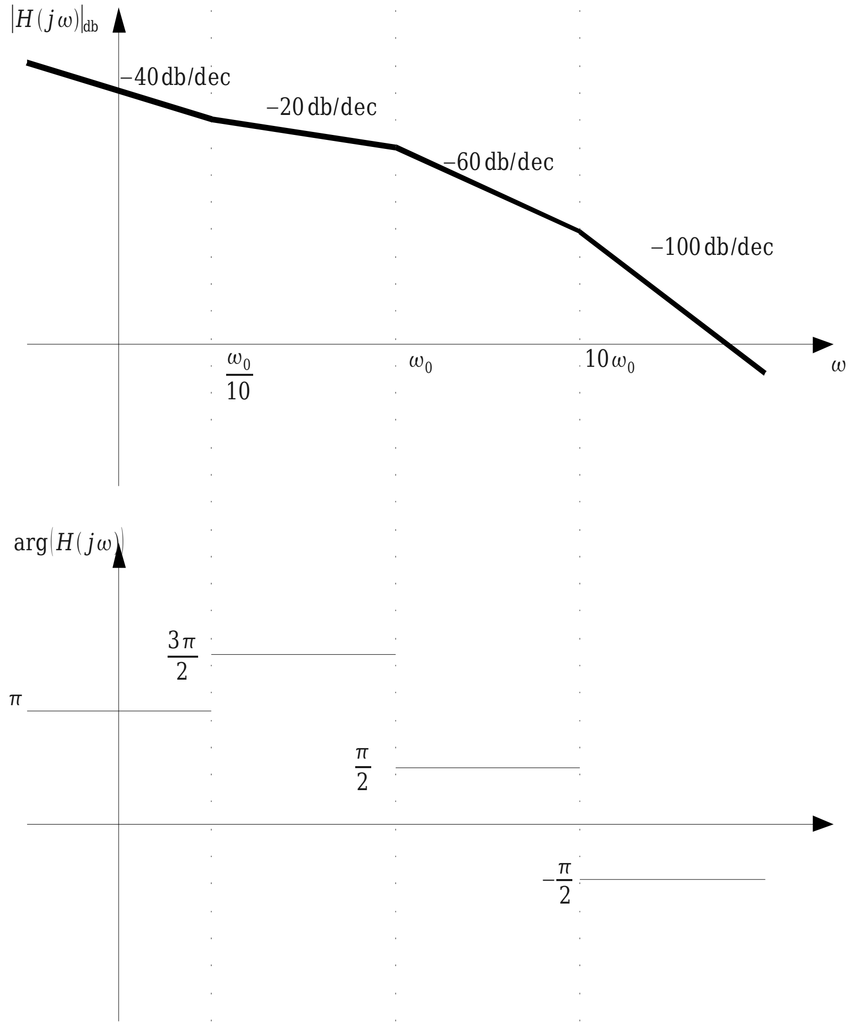

figura 4: Diagrama de Bode

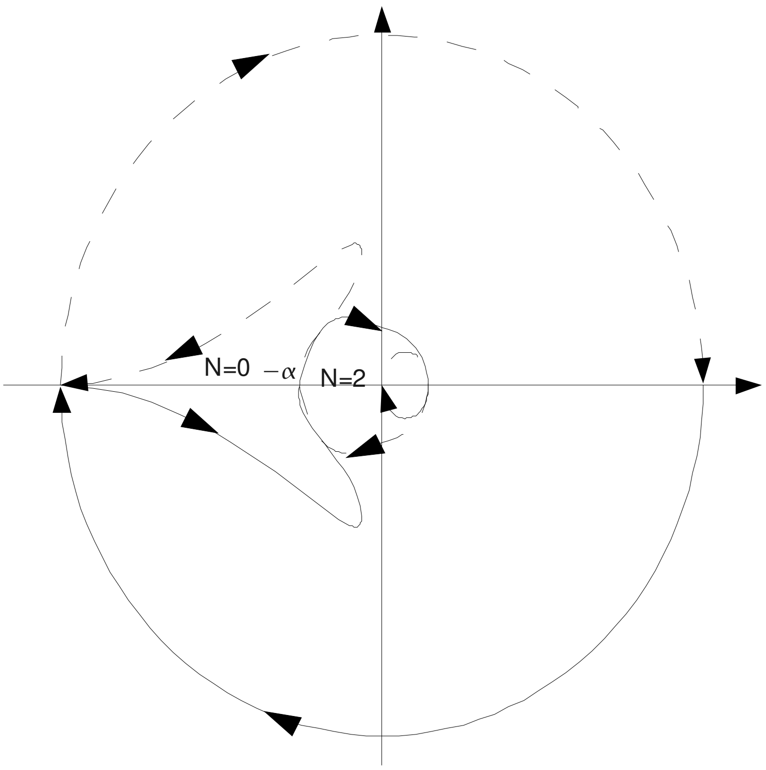

figura 5: Diagrama de Nyquist

$A\beta(j\omega_0) \simeq 100K\omega_0^4 \frac{j\omega_0}{\left(\sqrt{2}\,j\omega_0^2\right)\left(100\,\omega_0^2\right)(j\omega_0)^2} = \frac{-K}{\sqrt{2}\,\omega_0}$ por lo tanto $\alpha = \frac{K}{\sqrt{2}\,\omega_0}$,

$\alpha < 1 \;\Rightarrow\; K < \sqrt{2}\,\omega_0$