

Solución segundo parcial de Sistemas Lineales 2 2006

Andrés Alcarraz

13 de febrero de 2007

1. Ejercicio 2

1.1. 2

1.1.1. a

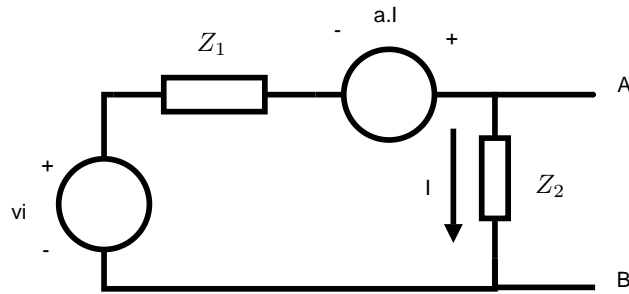


Figura 1: Cálculo de V_{AB}

Planteando la malla de la figura 1.1.1 obtenemos

$$V_i = (Z_2 + Z_1 - a) I = (Z_2 + Z_1 - a) \frac{V_{AB}}{Z_2} \Rightarrow V_{AB} = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1 - a} V_i \quad (1)$$

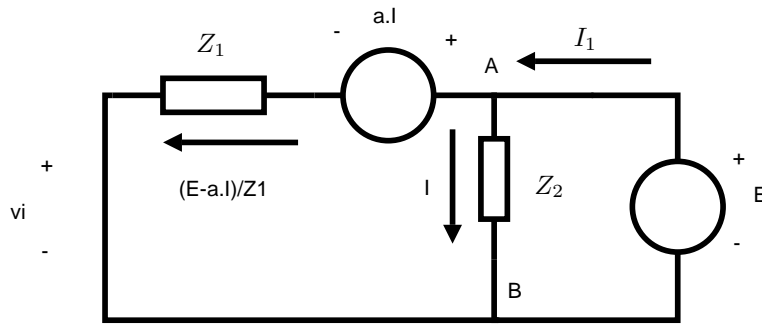


Figura 2: Cálculo de Z_{AB}

Para calcular la impedancia de vacío Z_{AB} anulamos la única fuente independiente V_i , conectamos una fuente E entre los terminales A y B como se muestra en la figura 1.1.1 y calculamos la corriente I_1

Planteando la ley de Ohm en Z_2 obtenemos la ecuación 2, y el nudo A nos da la ecuación 3:

$$E = Z_2 I V_i \quad (2)$$

$$I_1 = \frac{E}{Z_2} + \frac{E - \frac{aE}{Z_2}}{Z_1} = E \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1} - \frac{a}{Z_2 Z_1} \right) \quad (3)$$

$$\Rightarrow Z_{AB} = \frac{E}{I_1} = \frac{Z_2 Z_1}{Z_1 + Z_2 - a} \quad (4)$$

El equivalente Thevenin entonces queda como en la figura 1.1.1

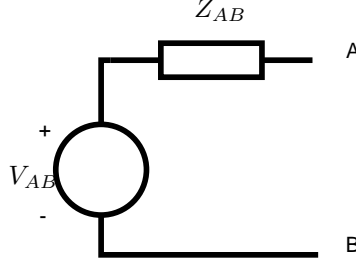


Figura 3: Equivalente Thevenin

1.1.2. b

En la figura 1.1.2 abrimos el lazo a la salida del operacional 1, substituímos el circuito de la parte a, por su equivalente Thevenin donde $e_i = v_i$, $Z_1 = L_1 s + R_1$, $Z_2 = L_2 s + R_2 + \frac{1}{Cs}$

El amplificador 2 está en configuración inversora de donde sale la ecuación 5:

$$v_o = -\frac{Z}{Z_{AB} + Z_1} V_{AB} \quad (5)$$

El amplificador 1 también está en configuración inversora:

$$e_o = -k e_1 \quad (6)$$

e_1 lo podemos calcular como un divisor entre v_o y tierra:

$$e_1 = \frac{R \parallel R}{R \parallel R + R} v_o = \frac{R/2}{R/2 + R} v_o = \frac{v_o}{3} \quad (7)$$

De 7, 6 y 5:

$$e_o = -k e_1 = -\frac{k}{3} v_o = \frac{k}{3} \frac{Z}{Z_{AB} + Z_1} V_{AB} \quad (8)$$

Para obtener la transferencia de lazo abierto solo resta substituir V_{AB} y Z_{AB} .

$$e_o = \frac{k}{3} \frac{Z}{\frac{Z_2 Z_1}{Z_1 + Z_2 - a} + Z_1} \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1 - a} e_i \Rightarrow \quad (9)$$

$$-A\beta = \frac{k}{3} \frac{Z Z_2}{Z_1 (Z_1 + 2Z_2 - a)} = \frac{k}{3} \frac{(Ls + R) \left(\frac{L}{1600}s + \frac{R}{40} + \frac{1}{Cs} \right)}{\left(\frac{3L}{800}s + \frac{3R}{8000} \right) \left(\frac{3L}{800}s + \frac{3R}{8000} + 2 \left(\frac{L}{1600}s + \frac{R}{40} + \frac{1}{Cs} \right) - a \right)} \quad (10)$$

$$= \frac{k}{3} \frac{(Ls + R) \left(\frac{LC}{1600}s^2 + \frac{RC}{40}s + 1 \right)}{\left(\frac{3L}{800}s + \frac{3R}{8000} \right) \left(LC \left(\frac{3}{800} + \frac{1}{800} \right) s^2 + RC \left(\frac{3}{8000} + \frac{1}{20} - \frac{16443}{8000} \right) s + 2 \right)} \quad (11)$$

$$= \frac{8000k}{9} \frac{(Ls + R) \left(\frac{LC}{1600}s^2 + \frac{RC}{40}s + 1 \right)}{(10Ls + R) \left(\frac{1}{200}LCs^2 - \frac{401}{200}RCs + 2 \right)} \quad (12)$$

1.1.3. c

Es fácil ver que el término $Ls+R$ en el numerador introduce un cero en $-\frac{R}{L}$ y que el término $10Ls+R$ en el denominador introduce un polo en $-\frac{R}{10L}$.

Para estudiar la estabilidad primero llevamos $A\beta$ a una forma más manejable.

Sea $\omega_0 = \frac{R}{L}$ entonces $RC = R\frac{L}{R^2} = \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0}$ y $LC = \frac{L^2}{R^2} = \frac{1}{\omega_0^2}$. Sustituyendo en 12:

$$A\beta = -\frac{8000k}{9} \frac{\left(\frac{s}{\omega_0} + 1\right) \left(\frac{s^2}{1600\omega_0^2} + \frac{s}{40\omega_0} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_0/10} + 1\right) \left(\frac{s^2}{200\omega_0^2} - \frac{401s}{200\omega_0} + 2\right)} \quad (13)$$

$$= -\frac{8000k}{9} \frac{\frac{\omega_0}{10} (200\omega_0^2) (s + \omega_0) (s^2 + 40\omega_0 s + 1600\omega_0^2)}{\omega_0 (1600\omega_0^2) \left(s + \frac{\omega_0}{10}\right) (s^2 - 401\omega_0 s + 400\omega_0^2)} \quad (14)$$

Halleemos los ceros y polos restantes, veamos los discriminantes, en el numerador el discriminante da $(40^2 - 4 \times 1600) \omega_0^2 = -4800\omega_0^2 < 0$ por lo tanto el numerador tiene dos raíces complejas conjugadas de módulo $\sqrt{1600\omega_0^2} = 40\omega_0$. En el denominador el discriminante es $(401^2 - 1600) \omega_0^2 = 159201\omega_0^2 > 0$ por lo que tenemos dos polos reales, $\frac{401 \pm \sqrt{159201}}{2} \omega_0 = \frac{401 \pm 399}{2} \omega_0 = \{400, 1\} \omega_0$.

Reescribiendo $A\beta$:

$$A\beta = -\frac{100k}{9} \frac{(s + \omega_0) (s^2 + 40\omega_0 s + (40\omega_0)^2)}{\left(s + \frac{\omega_0}{10}\right) (s - \omega_0) (s - 400\omega_0)} \quad (15)$$

En la ecuación 15 se ve claramente que el ζ del numerador en el término de los ceros complejos conjugados es 1.

Para estudiar al estabilidad del sistemas aplicamos el criterio de Nyquist. Tenemos que mapear $A\beta$ a través de la curva Γ de la figura 1.1.3. Para estar seguros de abarcar todo el semiplano derecho con la curva tenemos que hacer tender R a infinito.

Como el grado del numerador es igual al del denominador el tramo 2-3 se mapea a un punto, que coincide con el final del diagrama de bode que usaremos para ver como se mapea el tramo 1-2.

Diagrama de Bode:

$$\omega \ll \frac{\omega_0}{10} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{100k}{9} \frac{\omega_0 \times 1600\omega_0^2}{\frac{\omega_0}{10} \times 400\omega_0^2} = -\frac{4000k}{9} \arg: \pi, \text{ mod: } 72\text{db} + 20 \log\left(\frac{k}{9}\right) \quad (16)$$

$$\frac{\omega_0}{10} \ll \omega \ll \omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{100k}{9} \frac{\omega_0 \times 1600\omega_0^2}{j\omega \times 400\omega_0^2} = \frac{400jk\omega_0}{9\omega} \arg: \frac{\pi}{2}, \text{ mod: } -20\text{db/dec} \quad (17)$$

$$\omega_0 \ll \omega \ll 40\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{100k}{9} \frac{j\omega \times 1600\omega_0^2}{(j\omega)^2 \times 400\omega_0} = -\frac{400jk\omega_0}{9\omega} \arg: -\frac{\pi}{2} \text{ o } 3\frac{\pi}{2}, \text{ mod: } -20\text{db/dec} \quad (18)$$

para determinar el argumento evaluamos en ω_0

$$A\beta(j\omega_0) \simeq -\frac{100k}{9} \frac{\omega_0(j+1) \times 1600\omega_0^2}{j\omega_0 \times \omega_0(j-1)(-400\omega_0)} = \frac{400k}{9} \frac{j+1}{j(j-1)} = \frac{400k}{9} \frac{j+1}{-1-j} = -\frac{400k}{9} \quad (19)$$

$\arg(A\beta(j\omega_0)) \simeq \pi \Rightarrow$ el argumento aumenta a $3\frac{\pi}{2}$

$$40\omega_0 \ll \omega \ll 400\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{100k}{9} \frac{(j\omega)^3}{(j\omega)^2 (-400\omega_0)} = \frac{jk\omega}{36\omega_0} \arg: \frac{\pi}{2} \text{ o } 5\frac{\pi}{2}, \text{ mod: } 20\text{db/dec} \quad (20)$$

para determinar el argumento evaluamos en $40\omega_0$

$$A\beta(40j\omega_0) \simeq -\frac{100k}{9} \frac{40j\omega_0 (-(40\omega_0)^2 + 40\omega_0 \times 40j\omega_0 + (40\omega_0)^2)}{(40j\omega_0)^2 (-400\omega_0)} = \frac{10k}{9} \quad (21)$$

$\arg(A\beta(40j\omega_0)) \simeq 2\pi \Rightarrow$ el argumento aumenta a $5\frac{\pi}{2}$

$$40\omega_0 \ll \omega \ll 400\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{100k}{9} \frac{(j\omega)^3}{(j\omega)^2 (-400\omega_0)} = -\frac{100k}{9} \arg: \frac{3\pi}{2} \text{ o } 5\frac{\pi}{2}, \text{ mod: } 40\text{db} + 20 \log\left(\frac{k}{9}\right) \quad (22)$$

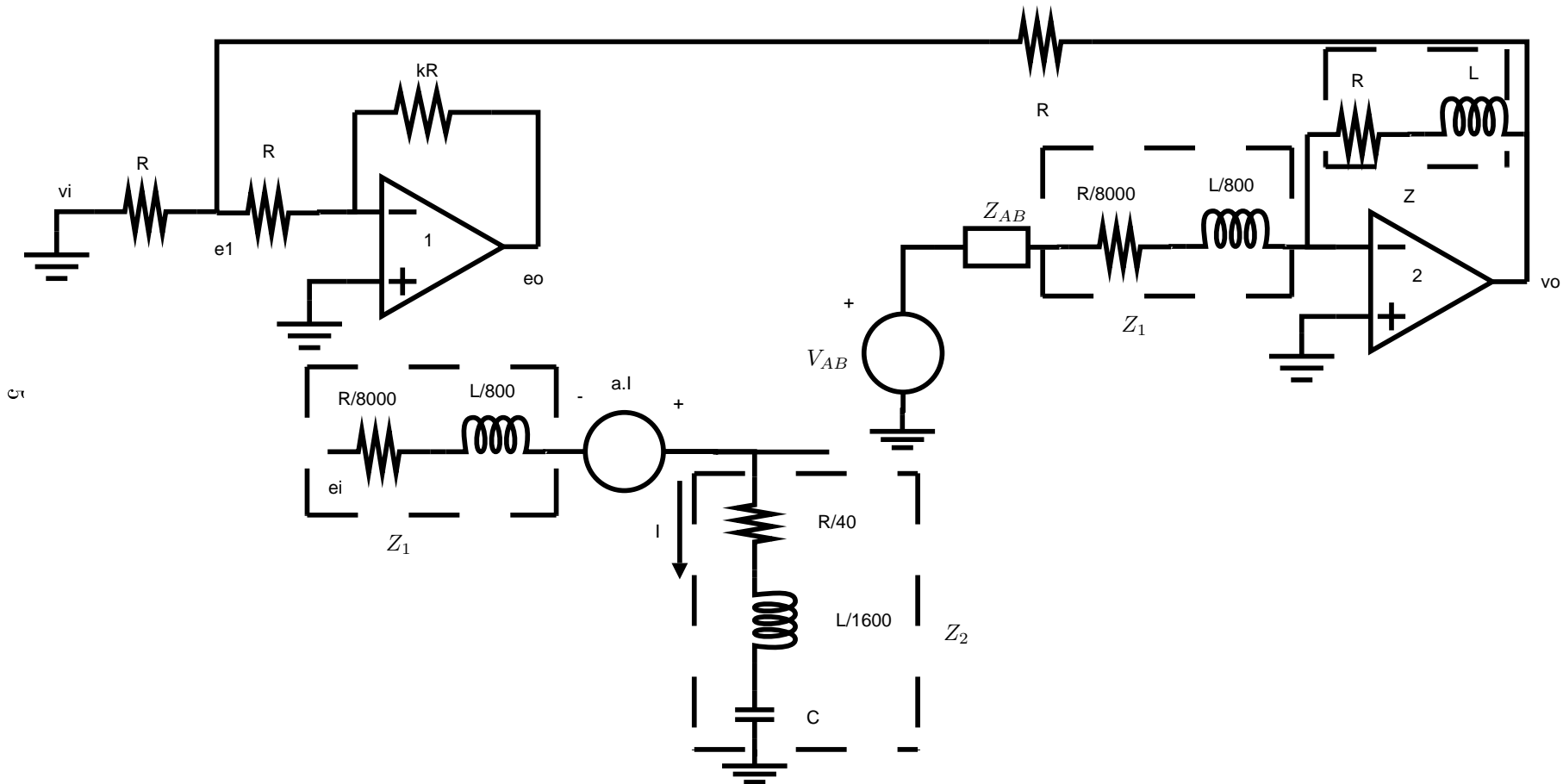
Con esto podemos construir el diagrama de bode que se muestra en la figura 1.1.3. En la figura 1.1.3 está el diagrama de Nyquist, el número de polos de $1 + A\beta$ encerrados por Γ es 2 (los polos complejos conjugados tienen parte real negativa).

El número de ceros es lo que queremos averiguar, y el número de vueltas lo sacamos del diagrama. Por el principio del argumento tenemos $N = Z - P$, o sea $Z = N + P$ donde N es el número de vueltas, Z el número de ceros y P el número de polos de $1 + A\beta$. Para que el sistema sea estable $Z = 0$ por lo tanto en nuestro caso como $P = 2$, N debe ser -2 para que el sistema sea estable.

En el diagrama se ve que hay tres zonas donde puede caer el -1 en una tenemos $N = 1$ con lo que $Z = 3$ por lo tanto si -1 cae en esa zona el sistema es inestable, lo mismo ocurre en la zona donde $N = -1$ ya que queda $Z = 2$.

Para que el sistema sea estable $-\frac{100k}{9}$ debe estar a la izquierda de -1 por lo tanto el sistema es estable si $k > 0,09$

Figura 4: Apertura del Lazo



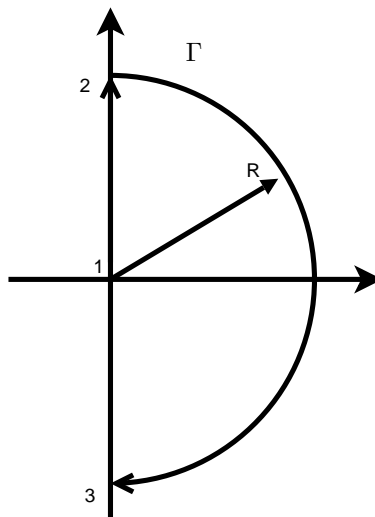


Figura 5: curva Γ

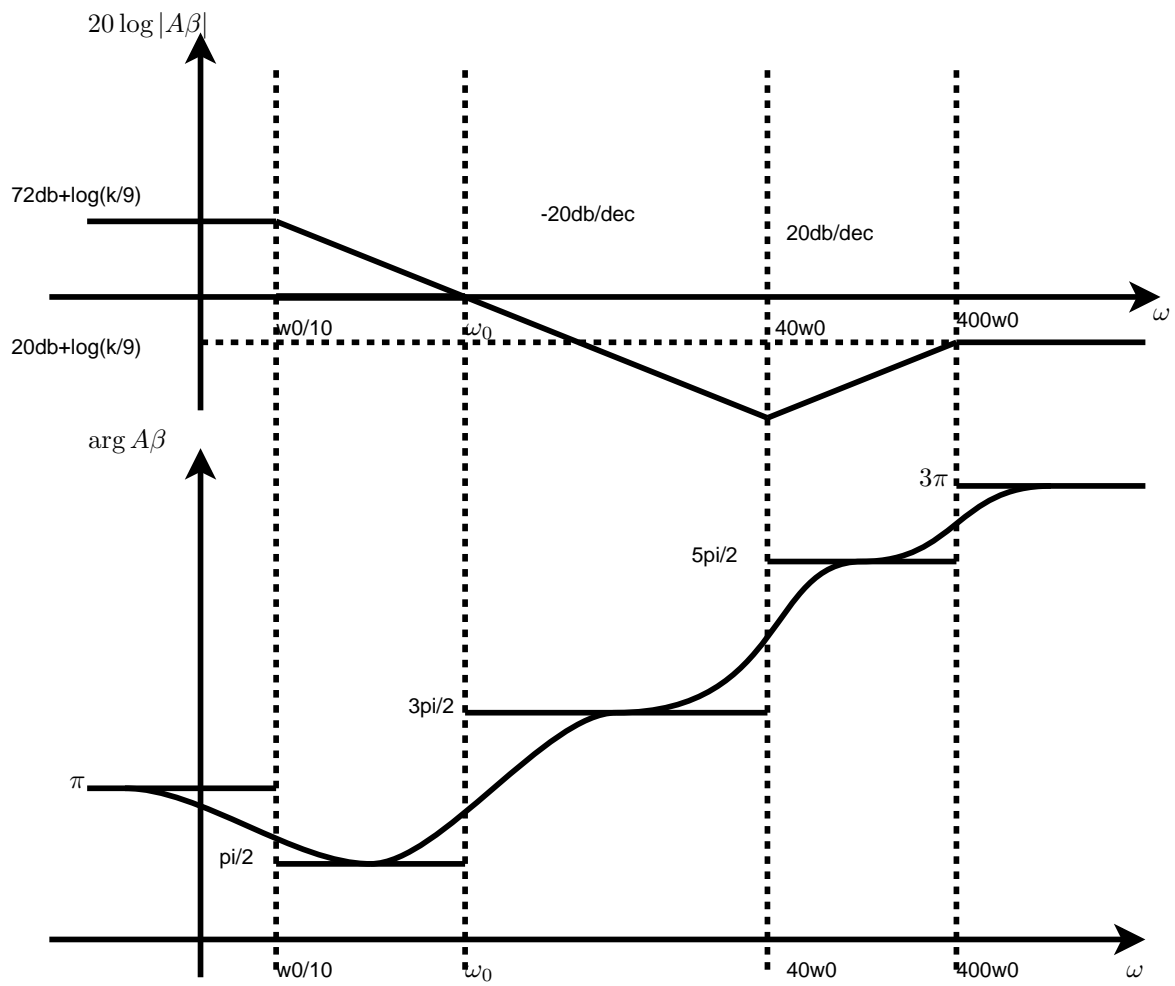


Figura 6: Diagramas de Bode

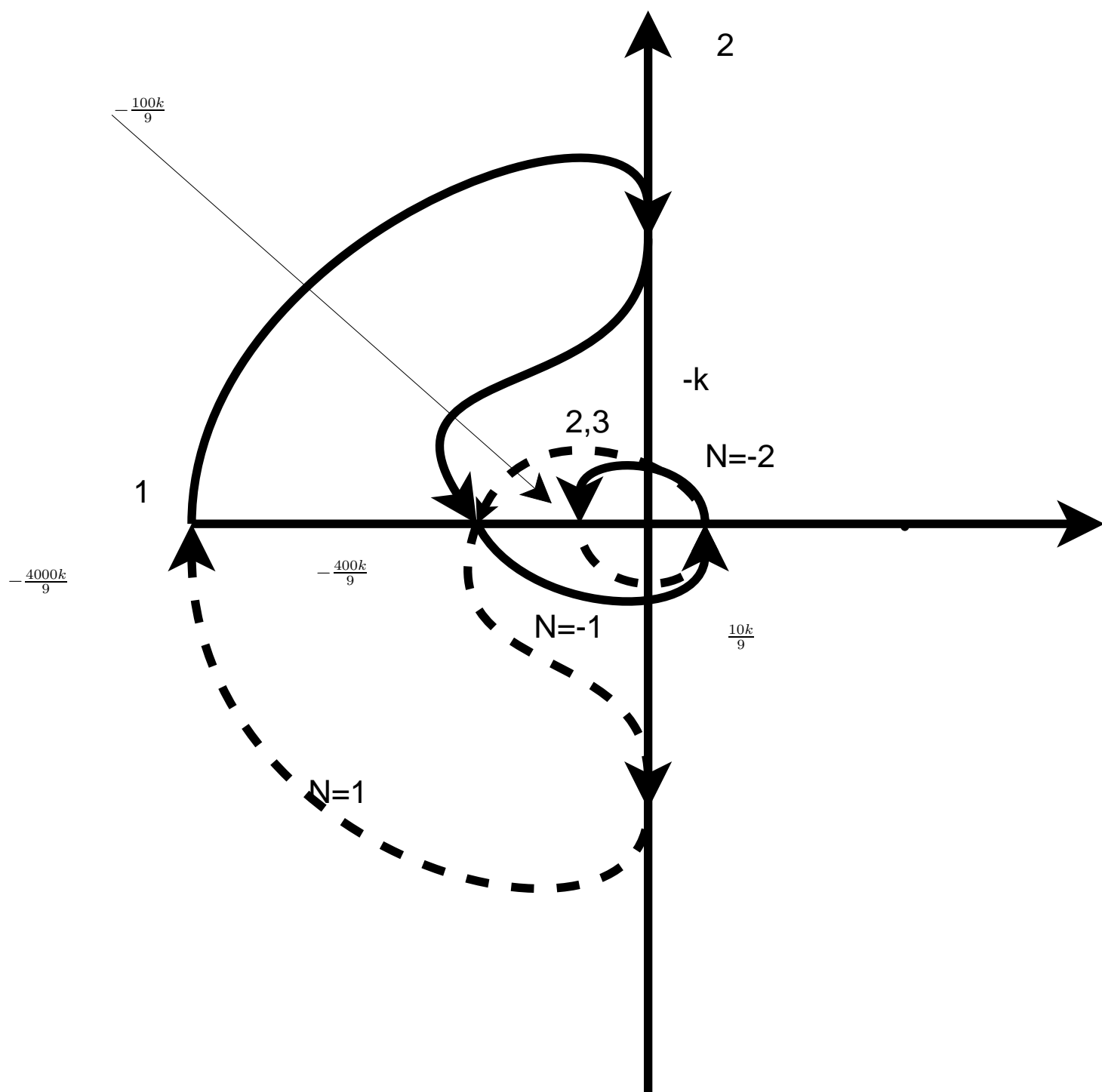


Figura 7: Diagrama de Nyquist