Sistemas Lineales 2
Examen, 18 de febrero del 2005

Te solicitamos:

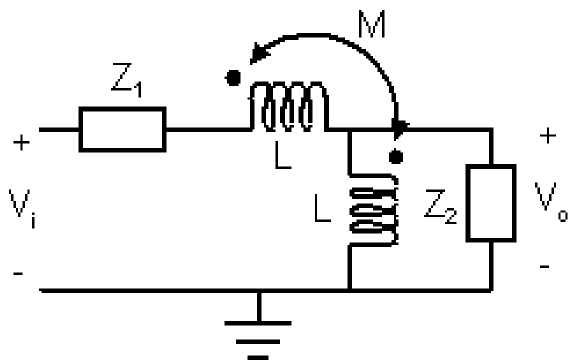
- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- **resolver problemas diferentes en hojas separadas**.

Se recuerda que la prueba es individual y **dura 3 horas**. No olvides de administrar el tiempo de la mejor manera. Para pasar a la instancia de oral es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

Ejercicio 1

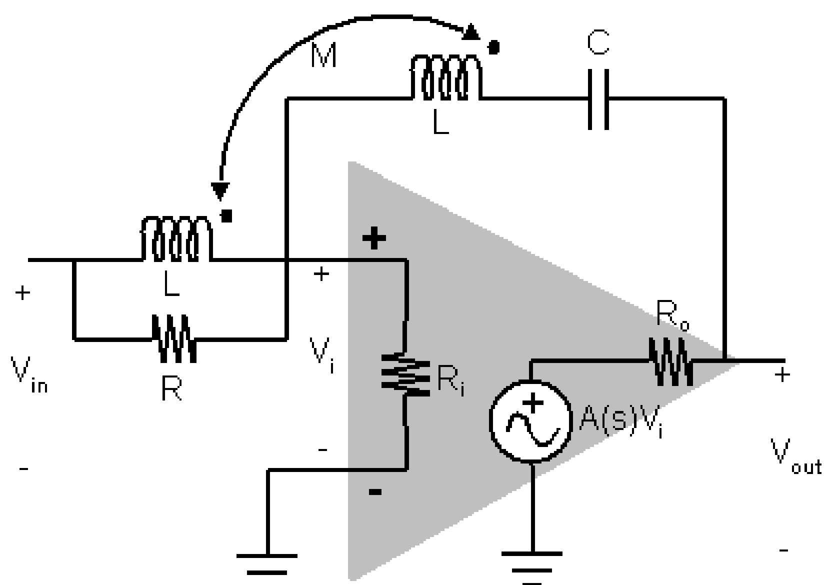
a) En el circuito de la figura 1, hallar la transferencia H(s)=Vo/Vi. Suponer el transformador **perfecto**.



b) Para el sistema realimentado de la figura 2, hallar la transferencia de lazo abierto "-Aβ(s)".

- Se supone un modelo de A.O. **real** con resistencia de entrada Ri, de salida Ro y ganancia del tipo pasabajos de primer orden: $A(s) = \dfrac{A_o w_o}{s + 10w_o}$
- Suponer el transformador **perfecto**.
- Se cumplen las siguientes relaciones:

$$R = R_i = 2R_o \quad , \quad 5w_o^2 = \frac{1}{LC} \quad , \quad w_o = \frac{R_o}{R_o^2 C + L}$$



c) Estudiar la estabilidad por el criterio de Nyquist, discutiendo según Ao.

d) En cuanto a la estabilidad, ¿qué ocurre si se realimenta por la pata inversora **(-)**?

Ejercicio 2

Se desea rectificar una señal sinusoidal $V_i(t)=A.\cos(\omega_0 t)$. Para ello se planea usar un rectificador como el de la figura 1. Como requisito se pide que en régimen la señal de salida nunca baje del 90% de la amplitud de la señal de entrada.

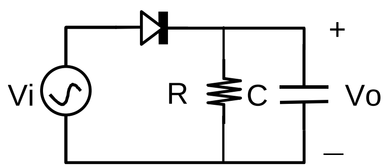


figura 1

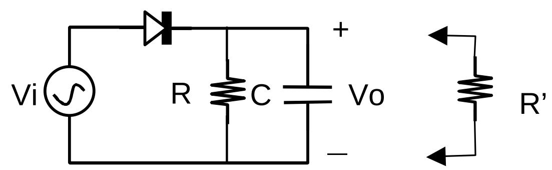


figura 2

a) Asumiendo que en t=0 el condensador arranca inicialmente cargado al valor de pico de la entrada, determinar el instante **positivo t*** en que el diodo invierte su estado por primera vez.

b) Bosquejar la entrada y la salida en una misma gráfica hasta el instante $T = \frac{2p}{w_0}$, analizando **cualitativamente** lo que sucede luego que el diodo invierte su estado.

c) ¿Qué condición debería cumplir a priori la constante de tiempo (RC) para que la salida sea lo más parecido posible una constante? **Justificar cualitativamente**.

d) Se pide diseñar el circuito (determinar la condición que debe cumplir RC en función de la frecuencia angular de la señal de entrada) para que se cumpla el requisito del 90%. **Sugerencia:** usar la condición hallada en la parte **c)**, para realizar aproximaciones necesarias a la hora de despejar en ecuaciones no resolubles analíticamente.

Sea t **el valor límite de la condición hallada en d).**

e) S**in realizar aproximaciones**, verificar, para el caso límite **RC =** t, que la salida se comporta como se pretende.

f) En el circuito de la figura 2 se cumple que **RC = 2**t. Determinar cuál es el rango de valores que puede tomar la carga **R'** para que se siga cumpliendo el objetivo del **90%**.

Sugerencias:

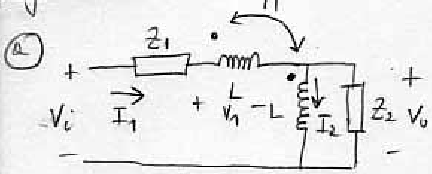
Las siguientes relaciones pueden ser de utilidad:

- $\sin(x) \approx x \approx \tan(x)$ para $x \to 0$
- $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\frac{d}{dt}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

SISTEMAS LINEALES 2: FEBRERO 2005 (1)

Ejercicio 1:

(a)



Del transformador perfecto: $\sqrt{LL} = M \Rightarrow L = M$

Planteando el nudo de corrientes: $I_1 = I_2 + \frac{V_o}{Z_2}$

Recorriendo la malla: $V_i = Z_1 I_1 + V_1 + V_o$

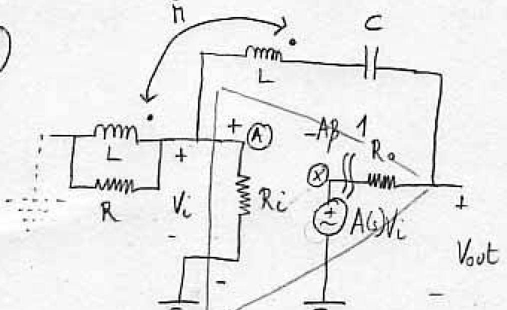
Finalmente las ecuaciones del transformador: $V_1 = Ls(I_1 + I_2)$

$V_o = Ls(I_1 + I_2) = 2Ls I_2 + \frac{Ls}{Z_2} V_o \Rightarrow I_2 = \frac{(Z_2 - Ls)V_o}{2Ls Z_2}$

$V_i = (Ls + Z_1) I_1 + Ls I_2 + V_o = (2Ls + Z_1) I_2 + \left(\frac{Ls + Z_1 + Z_2}{Z_2}\right) V_o$

Eliminando I_2 y operando: $V_i = V_o \left(\frac{4Ls Z_2 + Z_1 Z_2 + Ls Z_1}{2Ls Z_2}\right) \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{2Ls Z_2}{(4Ls + Z_1) Z_2 + Ls Z_1}}$

(b)



$A(s) = \frac{A_o \omega_o}{s + 10\omega_o}$

$R = R_i = 2R_o$, $5\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$, $\omega_o = \frac{R_o}{R_o^2 C + L}$

Abro el lazo e inyecto una señal unitaria en (x). Sé que a la vuelta tengo $-A\beta(s)$

Reconociendo el bloque de la parte anterior (con $Z_1 = R_o + \frac{1}{Cs}$ y $Z_2 = R \| R_i$) pues la entrada se conecta a tierra, en (A) tenemos $H(s)$. Finalmente tenemos que

$-A\beta(s) = \frac{A_o \omega_o}{s + 10\omega_o} H(s)$

Evaluando $H(s)$ para $Z_1 = R_o + \frac{1}{Cs}$ y $Z_2 = \frac{R R_i}{R + R_i}$ resulta:

$$H(s) = \left(\frac{2RR_i}{4RR_i + (R+R_i)R_o}\right) \frac{s^2}{s^2 + \frac{[R_o C R R_i + L(R+R_i)]s}{LC(4RR_i + (R+R_i)R_o)} + \frac{RR_i}{LC(RR_i + (R+R_i)R_o)}}$$

Simplificando con los datos de la letra: $\boxed{-A\beta(s) = \left(\frac{2}{5}\right) \frac{A_o \omega_o}{s + 10\omega_o} \frac{s^2}{s^2 + \omega_o s + \omega_o^2}}$

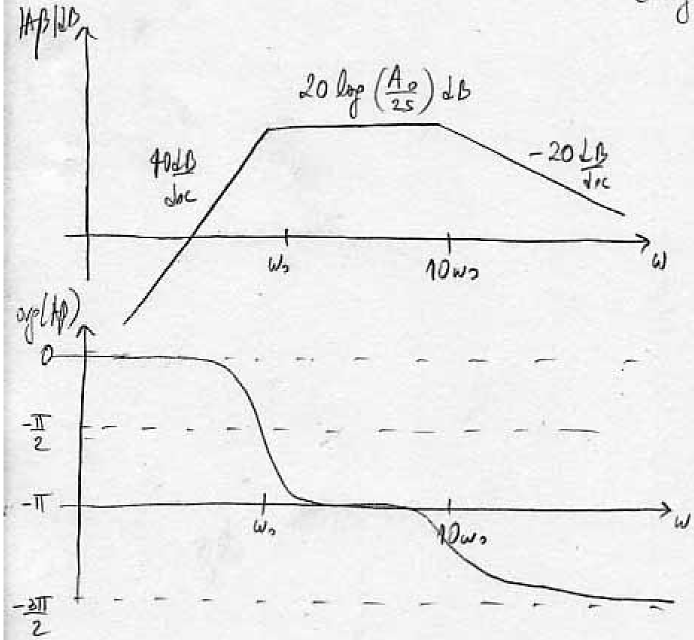
(c) En primer lugar realizamos los diagramas de Bode de $A\beta(j\omega) = -\left(\frac{2}{5}\right) \frac{A_o \omega_o}{j\omega + 10\omega_o} \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \omega_o j\omega + \omega_o^2}$

Tenemos un par de polos complejos conjugados con $\xi = \frac{1}{2}$, $\omega_n = \omega_o$

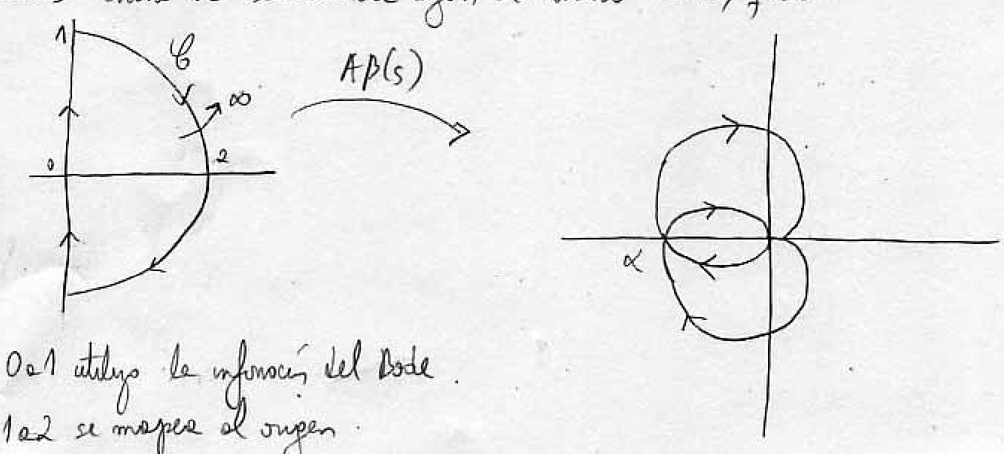
Para $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq \frac{A_0}{25}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{A_0}{25\omega_0^2}\right) + 40\log\omega \ dB \\ \arg(A\beta(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$ (2)

Para $\omega_0 \ll \omega \ll 10\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{A_0}{25} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{A_0}{25}\right) dB \\ \arg(A\beta(j\omega)) \simeq -\pi \end{cases}$

Para $\omega \gg 10\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -\frac{2}{5}\frac{A_0\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{2}{5}A_0\omega_0\right) - 20\log\omega \ dB \\ \arg(A\beta(j\omega)) \simeq -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$



Estudiamos ahora la estabilidad según el criterio de Nyquist.



De 0 a 1 utilizo la información del Bode.
De 1 a 2 se mapea al origen.
El resto simétrico respecto del eje real.

3

Para la curva C elegida $P=0$. Para estabilidad busco $N = Z - P = -P = 0$

Del Nyquist vemos que si $\alpha \leq -1 \Rightarrow N = 2$ y es inestable.

$\alpha > -1 \Rightarrow N = 0$ y es estable.

Calculemos α en función de A_0:

$$\alpha = \frac{2}{5} \frac{A_0 \omega_0}{(j\omega + 10\omega_0)} \frac{\omega^2}{\omega_0 j\omega + \omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \alpha \left[j\omega(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0 \omega^2 + 10\omega_0^2 j\omega + 10\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2) \right] = \frac{2}{5} A_0 \omega_0 \omega^2$$

Igualando partes imaginarias: $\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 10\omega_0^2 \omega = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{11}\,\omega_0$

Igualando partes reales: $\alpha[-11\omega_0^3 - 100\omega_0^3] = \frac{22}{5} A_0 \omega_0^3 \Rightarrow \alpha = -\frac{22}{555} A_0$

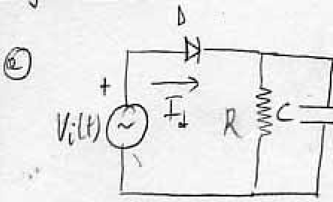
$$\Rightarrow \alpha = -\frac{22}{555} A_0 > -1 \Rightarrow \boxed{A_0 < \frac{555}{22} \text{ es ESTABLE}}$$

(d) Si se realimenta negativo $\Rightarrow A\beta'(s) = -A\beta(s)$ donde $-A\beta(s)$ es la ganancia de lazo abierto realimentado positivo. Se introduce un desfase de π y el Nyquist queda todo en el semiplano derecho. $\Rightarrow \boxed{\forall A_0 \text{ es ESTABLE}}$

(4)

Ejercicio 2:

a)



$V_i(t) = A\cos(w_0 t)\,Y(t)$

Se cumple que $V_0(0) = A$

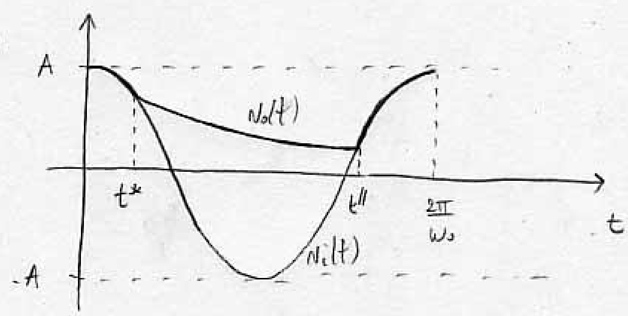
Supongo a partir de $t=0$ el diodo ON.

$\Rightarrow \boxed{V_o(t) = V_i(t)}$

Verifico el supuesto del diodo: $I_d(s) = \frac{V_i(s)}{R} + [V_i(s) - \frac{A}{s}]Cs = \frac{V_i(s)}{R} + C\mathcal{L}[V_i'(t)]$

$\Rightarrow i_d(t) = \left[\frac{A}{R}\cos(w_0 t) - ACw_0\sin(w_0 t)\right]Y(t)$ que es mayor a 0 en un entorno del instante inicial. El diodo cambia de estado para $t^* / i_d(t^*) = 0 \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{1}{w_0}\arctan\left(\frac{1}{RCw_0}\right)}$

b)



Para $t < t^*$ vimos que D ON y $v_i(t) = v_o(t)$

Para $t^* < t < t''$ tenemos D OFF y el condensador se descarga con constante de tiempo RC.

Para $t'' < t < \frac{2\pi}{w_0}$ tenemos nuevamente D ON y como en $t = \frac{2\pi}{w_0}$ tenemos el condensador cargado a A y el diodo conduciendo sabemos que $v_o(t)$ alcanzó el régimen con período $T = \frac{2\pi}{w_0}$ igual que $v_i(t)$.

c) Es claro que si la constante de tiempo RC es muy grande el condensador se descarga muy poco y la salida rectificada se parece más a una constante. En realidad lo que importa es la relación entre RC y $\frac{2\pi}{w_0}$ y claramente debe ser $RC >> \frac{2\pi}{w_0}$ que es equivalente a la relación $\boxed{RCw_0 >> 1}$

d) Es claro que el mínimo de $v_o(t)$ se da en $t = t''$ y el requerimiento de diseño es que $v_o(t'') > 0{,}9A$

Estudio el tramo en el cual D OFF. Sea $t' = t - t^*$

$\Rightarrow t^* = \frac{1}{w_0}\arctan\left(\frac{1}{RCw_0}\right) \approx \frac{1}{RCw_0^2}$ si se cumple $\frac{1}{RCw_0} \approx 0$

(5)

Sabemos que $v_0(t') = v_0(t=t^*)\, e^{-\frac{t'}{RC}}\, Y(t')$

Pero $v_0(t=t^*) = A\cos(w_0 t^*) = A\cos\left(\frac{1}{RCw_0}\right) \simeq A$ pues t^* es despreciable.

$\Rightarrow$ Calculo t''_1 tal que alcanza el 90% de la amplitud de $v_i(t)$.

$$0{,}9A = A\, e^{-\frac{t''_1}{RC}} \Rightarrow t''_1 = RC\, Ln\left(\frac{10}{9}\right)$$

Por otro lado debo hallar el instante t''_2 en el cual la señal $v_i(t)$ alcanza la amplitud $0{,}9A$. Esto se da dos veces en cada período, primero en $t = \frac{1}{w_0}\arccos\left(\frac{9}{10}\right)$ y luego en $t''_2 = \frac{1}{w_0}\left[2\pi - \arccos\left(\frac{9}{10}\right)\right]$ que es el que nos interesa.

Para imponer el caso límite en que la salida cae hasta $0{,}9A$ debe ser $t''_1 = t''_2$

$$\Rightarrow RC\, Ln\left(\frac{10}{9}\right) = \frac{1}{w_0}\left[2\pi - \arccos\left(\frac{9}{10}\right)\right] \Rightarrow \boxed{RCw_0 = 55{,}3} >> 1$$

(e) Por la relación de la parte anterior tenemos que $v_0(t=t^*) = A\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{55}\right)\right)$

$\Rightarrow v_0(t=t^*) = 0{,}999853A \Rightarrow v_0(t') = 0{,}999853A\, e^{-\frac{t'}{RC}}\, Y(t')$.

Como ya vimos la señal $v_i(t)$ alcanza la amplitud $0{,}9A$ en el instante

$t'' = \frac{1}{w_0}\left[2\pi - \arccos\left(\frac{9}{10}\right)\right] \Rightarrow v_0(t''-t^*) = v_0\left(\frac{1}{w_0}\left[2\pi - \arccos\left(\frac{9}{10}\right) - \arctan\left(\frac{1}{55}\right)\right]\right)$

$\Rightarrow v_0(t''-t^{**}) = 0{,}900147A$

Observo que cuando v_i tiene amplitud $0{,}9A$, v_0 tiene una amplitud mayor por lo cual el mínimo se dará en el intervalo $(0{,}9A, 0{,}900147A)$ y se cumple el objetivo de diseño.

(f) Si $RC = 2T = 2 \cdot \frac{55{,}3}{w_0}$ se cumple con margen la condición del 90%.

Al conectar R' la nueva constante de tiempo será $(R // R')C < 2T$. Con lo cual si $R' = R$ tengo constante de tiempo T y estoy en el caso límite.

La condición buscada es $\boxed{R' \geq R}$