# Sistemas Lineales 2
# Examen, 13 de febrero del 2003

**Te solicitamos:**

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- **resolver problemas diferentes en hojas separadas**.

Se recuerda que la prueba es individual y **dura 3 horas**. No olvides de administrar el tiempo de la mejor manera. Para pasar a la instancia de oral es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

# Ejercicio 1

**a)** **i)** En el circuito de la figura 1 siguiente hallar la transferencia $H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$, sabiendo que $RC=\frac{L}{R}=t$ .

**ii)** Verificar que puede escribirse como: $H(s)=\frac{ts+5}{-3t^2s^2+2ts+1}$ .

**iii)** ¿Es el sistema BIBO estable? Justificar.

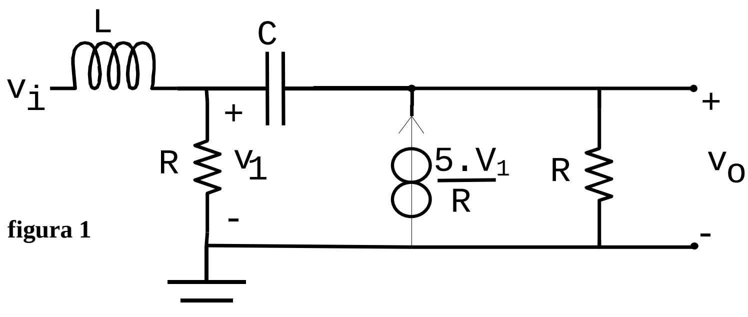



**figura 1**

**b)** Deducir la transferencia en lazo abierto del circuito de la figura 2; los operacionales son ideales. (Se sugiere identificar bloques de transferencia conocida antes de abrir el lazo).

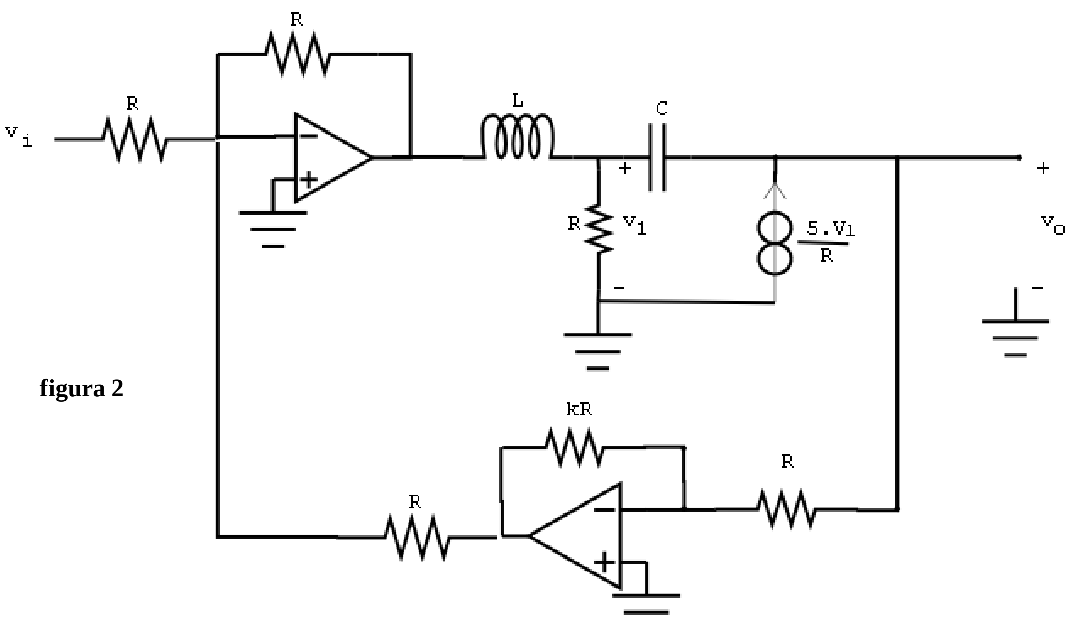



**figura 2**

**c)** Utilizando el Criterio de Nyquist, estudiar la estabilidad del sistema realimentado, discutiendo según k.

## Ejercicio 2

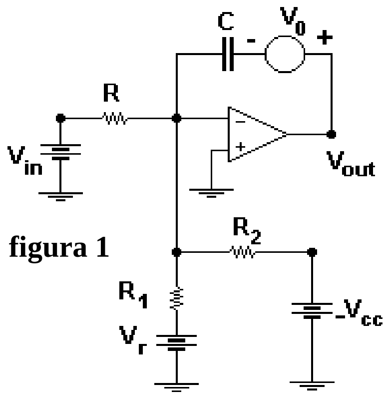



**figura 1**

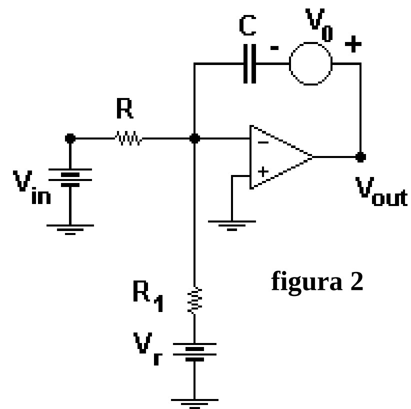



**figura 2**

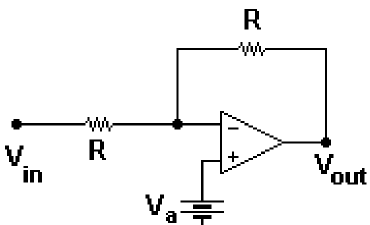



**figura 3**

**a) i)** En los circuitos de las figuras 1 y 2, hallar $\mathbf{V_{out}}$ en función de $\mathbf{V_{in}}$, $\mathbf{V_r}$, $\mathbf{V_o}$ y $\mathbf{V_{cc}}$

**ii)** Hallar la salida $\mathbf{V_{out}}$ del circuito de la figura 3, sabiendo que $\mathbf{V_a}$ es una fuente de continua.

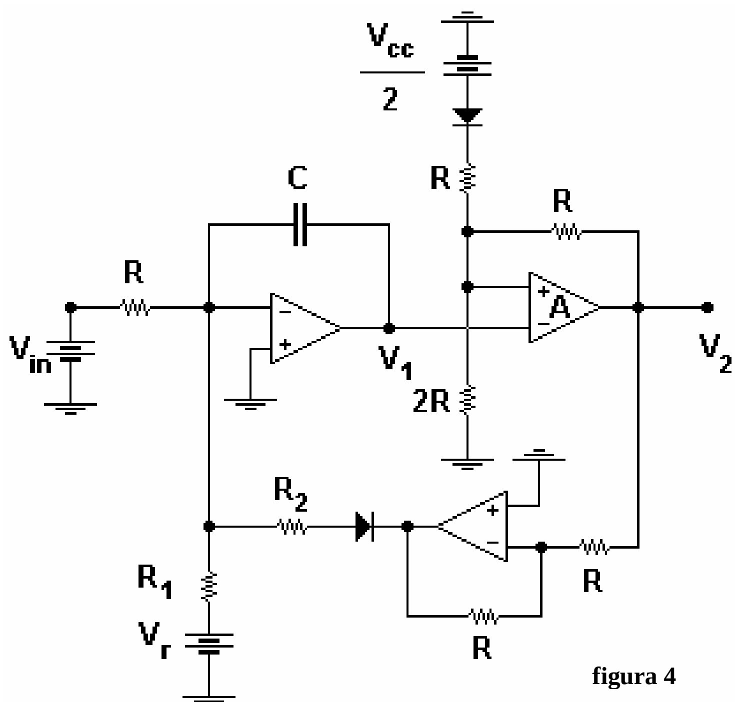



**figura 4**

**b) i)** Hallar y graficar $\mathbf{V_1(t)}$ y $\mathbf{V_2(t)}$ del circuito de la figura 4, conociendo que solamente el operacional A está trabajando en zona no lineal (fuentes $\pm\mathbf{V_{cc}}$) y los otros dos trabajan en zona lineal, que $\mathbf{V_0=2\ V_{cc}/3}$ (carga inical del condensador) y que $\mathbf{V_2(t=0)=-V_{cc}}$.

**ii)** Calcular el período de la señal $\mathbf{V_2(t)}$.

**iii)** Hallar la condición que se debe cumplir para que las pendientes de la señal $\mathbf{V_1(t)}$ sean iguales en módulo en cada semiciclo.

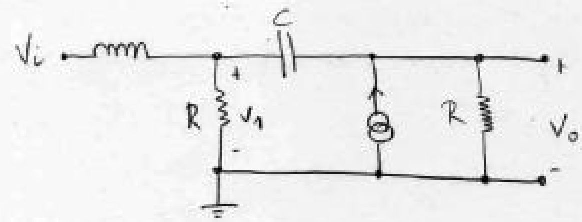
**iv)** Asumiendo que se cumple la condición hallada en **b) iii)**, ¿qué circuito agregaría a la salida de $\mathbf{V_1}$ para poder obtener una onda simétrica? Calcular los valores y justificar.

Se cumple que: $\frac{V_{cc}}{R_2}-\frac{V_{in}}{R}-\frac{V_r}{R_1}>0 \quad V_{cc}, V_{in}\ y V_r > 0$ y son constantes.

SISTEMAS LINEALES 2: FEBRERO 2003 (1)

Ejercicio 1:

a) (i)




$RC = \frac{L}{R} = \tau$

Planteando el nudo a la entrada: $\frac{V_i - V_1}{Ls} = \frac{V_1}{R} + (V_1 - V_o)Cs$

$V_i = V_1\left(1 + \frac{L}{R}s + LCs^2\right) - V_o LCs^2$

Planteando el nudo de salida: $(V_1 - V_o)Cs + \frac{5V_1}{R} = \frac{V_o}{R} \Rightarrow V_1\left(\frac{RCs+5}{R}\right) = V_o\frac{(1+RCs)}{R}$

$\Rightarrow V_i = V_o\left[\frac{1+RCs}{5+RCs}\left(\frac{R + Ls + RLCs^2}{R}\right) - LCs^2\right]$

$V_i = V_o\left[\frac{R + Ls + RLCs^2 + R^2Cs + RLCs^2 + R^2C^2Ls^3 - 5RLCs^2 - R^2C^2Ls^3}{R(5+RCs)}\right]$

$\Rightarrow V_i = V_o\left[\frac{1 + \left(\frac{L}{R} + RC\right)s - 3LCs^2}{5+RCs}\right] \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{5 + RCs}{-3LCs^2 + \left(\frac{L}{R} + RC\right)s + 1}}$

(ii) Utilizando que $RC = \frac{L}{R} = \tau \Rightarrow LC = \tau^2$, $H(s)$ puede reescribirse como

$$\boxed{H(s) = \frac{\tau s + 5}{-3\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1}}$$

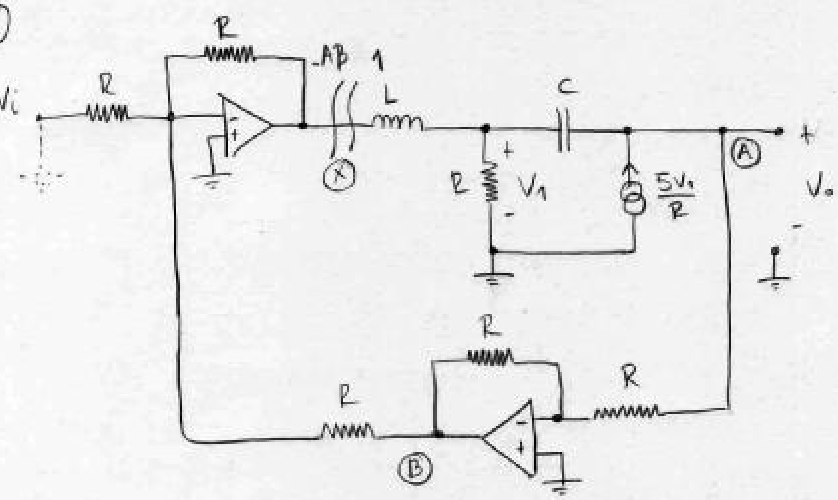
(iii) $H(s) = -\frac{1}{3\tau}\,\frac{s + \frac{5}{\tau}}{s^2 - \frac{2s}{3\tau} - \frac{1}{3\tau^2}}$ y hallamos los polos de la transferencia.

$$s = \frac{\frac{2}{3\tau} \pm \sqrt{\frac{4}{9\tau^2} + \frac{4}{3\tau^2}}}{2} \quad \begin{cases} \frac{1}{3\tau} + \frac{2}{3\tau} = \frac{1}{\tau} \\ \frac{1}{3\tau} - \frac{2}{3\tau} = -\frac{1}{3\tau} \end{cases}$$

$H(s) = -\frac{1}{3\tau}\,\frac{s + \frac{5}{\tau}}{\left(s - \frac{1}{\tau}\right)\left(s + \frac{1}{3\tau}\right)}$ y como presenta un polo real positivo es inestable en el sentido BIBO

(2)

1




Abro el lazo e inyecto una señal unitaria en (X). Reconociendo el bloque de la parte anterior (la resistencia de salida está a tierra por la tierra virtual) se tiene que en (A) tengo $H(s)$. Reconociendo la etapa inversora de ganancia $K$, en (B) tengo $-KH(s)$. Finalmente y tras la última etapa inversora. $\boxed{-A\beta(s) = KH(s)}$

(c) Para el estudio de estabilidad realizaremos en primer lugar los Diagramas de Bode asintóticos de $A\beta(j\omega)$.

$$A\beta(j\omega) = \frac{K}{3\tau}\,\frac{j\omega + \frac{5}{\tau}}{(j\omega)^2 - \frac{2(j\omega)}{3\tau} - \frac{1}{3\tau^2}}$$

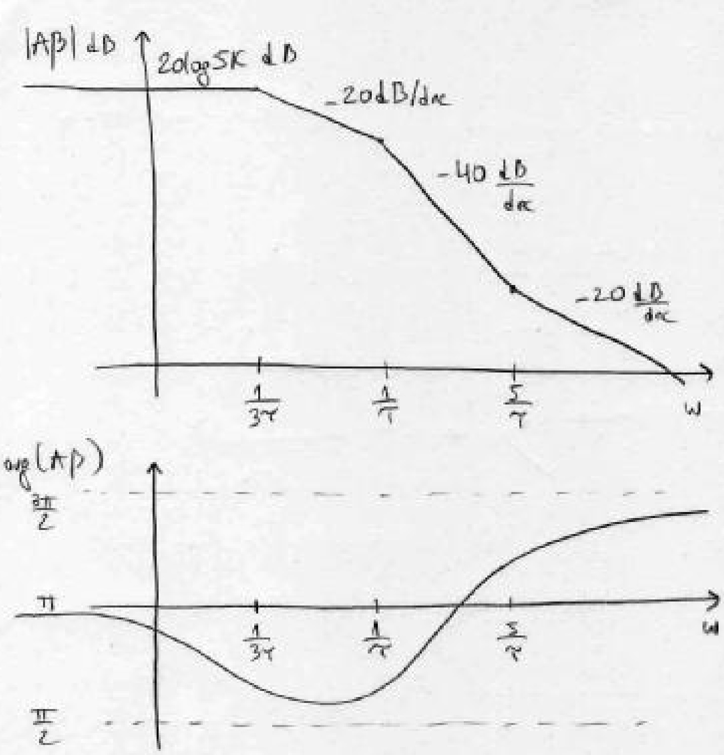
Si $\omega \ll \frac{1}{3\tau} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -5K \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| \approx 20\log 5K \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \approx \pi \end{cases}$

Si $\frac{1}{3\tau} \ll \omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow A\beta(j\omega) \approx -\frac{5K}{3\tau j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| = 20\log\frac{5K}{3\tau} - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

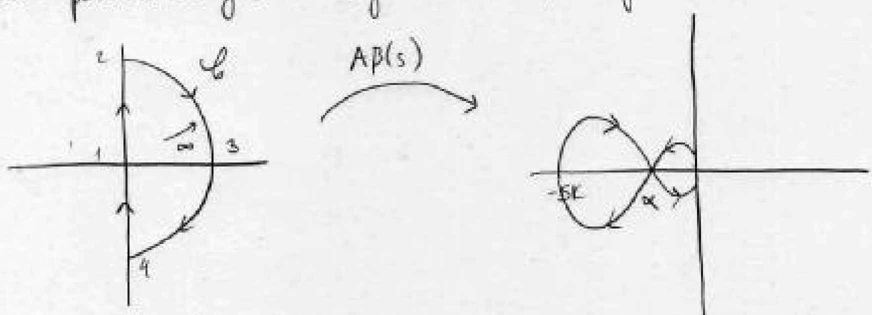
Si $\frac{1}{\tau} \ll \omega \ll \frac{5}{\tau} \Rightarrow A\beta(j\omega) \approx \frac{5K}{3\tau^2\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| = 20\log\frac{5K}{3\tau^2} - 40\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) = \pi \end{cases}$

Si $\omega \gg \frac{5}{\tau} \Rightarrow A\beta(j\omega) \approx \frac{K}{3\tau j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta| = 20\log\frac{K}{3\tau} - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

3




Ahora podemos realizar el Diagrama de Nyquist y ver cuantas vueltas da alrededor de -1.




Para la curva $\mathcal{C}$ elegida $P=1$.
De 1 a 2, uso la información del Bode.
De 2 a 3 se mapea al origen.
El resto simétrico respecto al eje real.

Si se tiene que $\alpha < -1$, el Nyquist dará una vuelta antihoraria alrededor de $-1$:
$\Rightarrow N = Z - P = -1 \Rightarrow Z = 0$ y el sistema resulta estable.

Hallemos el valor de $\alpha$: $\alpha = \frac{K}{3\tau}\frac{j\omega + \frac{5}{\tau}}{(j\omega)^2 - \frac{2(j\omega)}{3\tau} - \frac{1}{3\tau^2}} \Rightarrow -3\tau\alpha\left(\omega^2 + \frac{1}{3\tau^2} + \frac{2j\omega}{3\tau}\right) = j\omega + \frac{5}{\tau}$

Igualando partes imaginarias se obtiene $\alpha = -\frac{K}{2}$

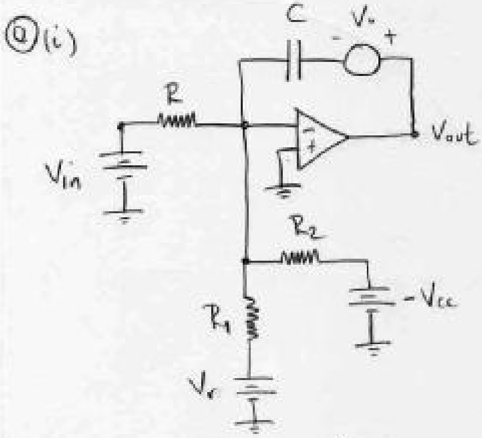
$\Rightarrow -\frac{K}{2} < -1 \Rightarrow$ Si $\boxed{K > 2}$ es ESTABLE

Si $\boxed{K \leq 2}$ es INESTABLE

4

## Ejercicio 2:

a) (i)

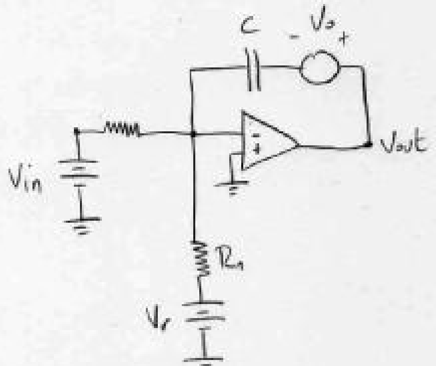



Planteando la ecuación de nudo se tiene:

$$\frac{V_{in}}{Rs} + \frac{V_r}{R_1 s} - \frac{V_{cc}}{R_2 s} = \left(\frac{V_o}{s} - V_{out}\right) Cs$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{out} = -\frac{V_{in}}{RCs^2} - \frac{V_r}{R_1 C s^2} + \frac{V_{cc}}{R_2 C s^2} + \frac{V_o}{s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{out}(t) = \left[ V_o + \left( \frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1} \right) \frac{t}{C} \right] Y(t)}$$

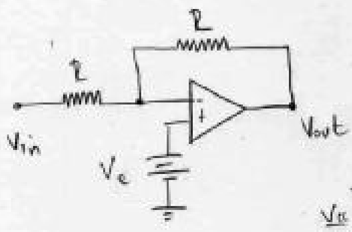



Igual que antes con $V_{cc} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V_{out} = -\frac{V_{in}}{RCs^2} - \frac{V_r}{R_1 C s^2} + \frac{V_o}{s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{out}(t) = \left[ V_o - \left( \frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1} \right) \frac{t}{C} \right] Y(t)}$$

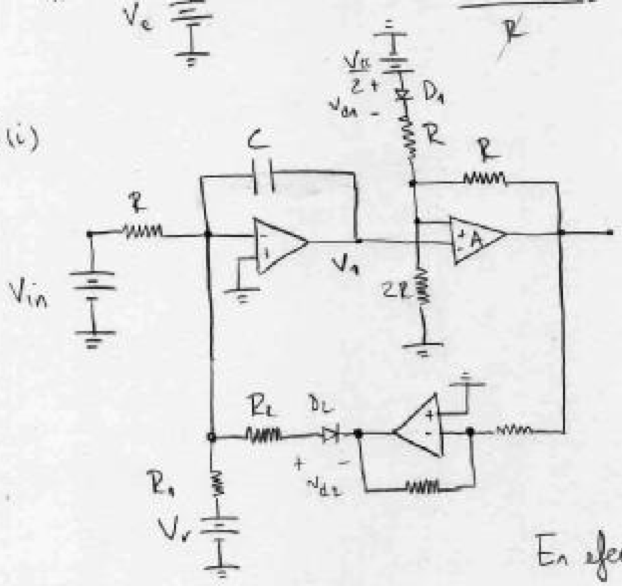
(ii)




Planteando la ecuación de nudo se tiene:

$$\frac{V_{in} - \frac{V_c}{s}}{\cancel{R}} = \frac{\frac{V_c}{s} - V_{out}}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{V_{out} = \frac{2V_c}{s} - V_{in}}$$

b) (i)




A operando en zona no lineal entre niveles $\pm V_{cc}$.

Carga inicial en el condensador C, $V_o = \frac{2V_{cc}}{3}$

$v_2(t=0) = -V_{cc}$

Estudiamos para $t \geq 0$, $\boxed{v_2(t) = -V_{cc} Y(t)}$

Con $V_2 = -\frac{V_{cc}}{s}$ supongo $D_1$ ON y $D_2$ OFF.

Es fácil de verificar que $D_2$ está OFF.

En efecto, $v_{d2} = 0 - (+V_a) = -V_{cc} < 0$

tierra virtual — inversor

5

Sean $V_{A+}$ y $V_{A-}$ las tensiones de entrada del comparador A. $V_{A-} = V_1$

Planteando la ecuación de nudo se tiene: $-\frac{V_{A+}}{2R} = \frac{V_{A+} + \frac{V_{cc}}{5}}{R} + \frac{V_{A+} - \frac{V_{cc}}{25}}{R} \Rightarrow \frac{5}{2} V_{A+} = -\frac{V_{cc}}{25}$

$\Rightarrow v_{A+}(t) = -\frac{V_{cc}}{5} Y(t)$.

Con $D_2$ OFF y reconociendo la segunda configuración de la parte anterior, se tiene que:

$$\boxed{v_1(t) = \left[\frac{2V_{cc}}{3} - \left(\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}\right)\frac{t}{C}\right] Y(t)}$$

El comparador A conmuta para $t = t_1 \mid v_1(t_1) = V_{A+} = -\frac{V_{cc}}{5}$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{13}{15} \frac{V_{cc}\, C}{\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}}}$$

Verifiquemos el supuesto sobre el diodo $D_1$: $i_{D1} = \frac{\frac{V_{cc}}{2} + \frac{V_{cc}}{5}}{R} > 0$

Estudiemos para $t' = t - t_1 \geq 0$, $\boxed{v_2(t') = V_{cc} Y(t')}$

Con $V_2 = -V_{cc}$ supongo $D_1$ OFF y $D_2$ ON. Nuevamente es inmediato verificar que $D_2$ está ON.

$$i_{D2} = \frac{\underbrace{0}_{\text{tierra virtual}} - \underbrace{(-V_{cc})}_{\text{inversor}}}{R} > 0$$

Con $D_1$ OFF y por el divisor resistivo se tiene que: $V_{A+} = \frac{2V_{cc}}{3} \Rightarrow v_{A+}(t') = \frac{2V_{cc}}{3} Y(t')$

Reconociendo la primer configuración de la parte anterior, con $V_0 = -\frac{V_{cc}}{5}$ se tiene que:

$$\boxed{v_1(t') = \left[-\frac{V_{cc}}{5} + \left(\frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1}\right)\frac{t'}{C}\right] Y(t')}$$

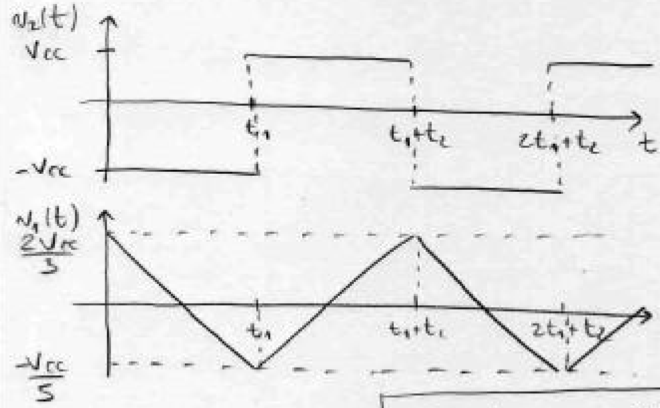
El comparador A conmuta para $t' = t_2 \mid v_1(t_2) = V_{A+} = \frac{2V_{cc}}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{13}{15} \frac{V_{cc}\, C}{\frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1}}}$$

Notar que es positivo por el dato de la letra.
Como la tensión en el condensador C es $V_0 = \frac{2V_{cc}}{3}$ el circuito entró en régimen.

Verifiquemos el supuesto sobre el diodo $D_1$: $v_{D1} = \frac{V_{cc}}{2} - \frac{2V_{cc}}{3} < 0$

6




(ii) $T = t_1 + t_2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{13}{15} V_{cc} C \left[ \frac{1}{\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}} + \frac{1}{\frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1}} \right]}$

(iii) Debe cumplirse que:

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{C}}\left(\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}\right) = \frac{\cancel{1}}{\cancel{C}}\left(\frac{V_{cc}}{R_2} - \frac{V_{in}}{R} - \frac{V_r}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{2\left(\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_r}{R_1}\right) = \frac{V_{cc}}{R_2}}$$

(iv) El circuito estudiado en la parte (a)(ii) modifica el nivel de continua de la señal de entrada.

La señal $v_1(t)$ presenta un offset de $\frac{\frac{2V_{cc}}{3} + \left(-\frac{V_{cc}}{5}\right)}{2} = \frac{7V_{cc}}{30}$

Luego si conectamos dicho circuito a la salida de $V_1$ y se elige $V_e$ de forma que $2V_e = -\frac{7V_{cc}}{30} \Rightarrow \boxed{V_e = -\frac{7V_{cc}}{60}}$ y de esta manera la onda $v_1(t)$ resulta simétrica.