Sistemas Lineales 2 - Examen Final

- Escriba **nombre y apellido** en todas las hojas.
- Utilice las hojas de **un solo lado**. Resuelva problemas diferentes en **hojas diferentes**.
- Sea prolijo. **Explique** y detalle bien todos sus pasos. Exprese sus resultados exactamente **en el formato pedido**. Recuerde, que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.
- Se recuerda que para aprobar esta parte del examen es necesario tener al menos un problema completo.

Problema 1.- Consideraremos que todos los amplificadores operacionales que aparecen en este problema son ideales.

(a) Considere los tres circuitos mostrados en Figura 1, y Figura 2. En estos, los valores de los parámetros $R > 0$, $C > 0$, $n \in \mathbb{N}$, y $b_0 > 0$, son dados. Además se verifica que $RC = \tau = 1$[sec].
Halle, para cada uno de estos tres circuitos, la relación que existe entre $v_{\text{out}}(t)$ y $v_{\text{in}}(t)$ o entre $v_{\text{out}}(t)$ y $v_1(t), \dots, v_n(t)$, según corresponda. Tenga presente que en algún caso esta relación puede ser diferencial.

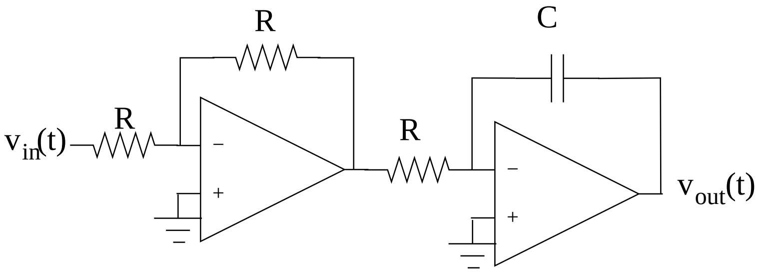

Figure 1: Circuito Correspondiente al Problema 1.

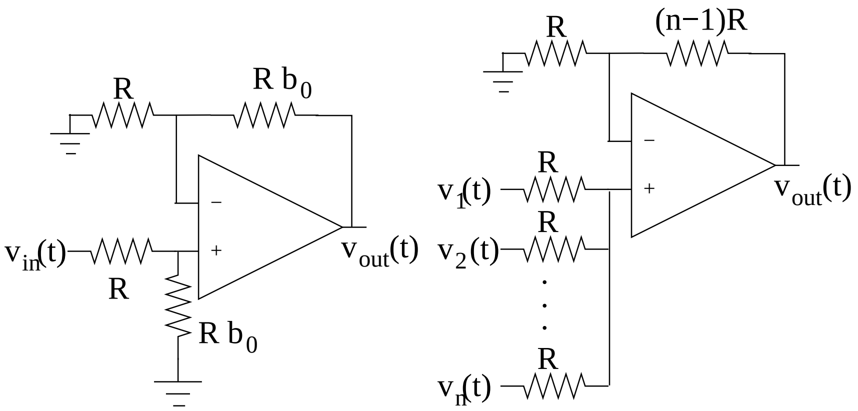

Figure 2: Circuito Correspondiente al Problema 1.

(b) Considere el circuito mostrado en Figura 6. En este, los valores de los parámetros $R > 0$, $C > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_{n-1} > 0$, $a_{n-2} > 0$, $\dots$, $a_0 > 0$, y $b_0 > 0$, son dados. Además se verifica que $RC = \tau = 1$[sec].

Definiendo $x = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ escriba una descripción de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\ ,\ x(0) = x_0\ ,\ t \geq 0$$
$$y(t) = Ex(t) + Du(t)$$

para el comportamiento dinámico del circuito considerado. Calcule las matrices A, B, E, y D solo en términos de a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_0, y b_0.
Sea h_n la respuesta al impulso del sistema bajo consideración (con $x_0 = 0$). Calcule $H_n = \mathcal{L}\{h_n\}$ explícitamente y solo en términos de a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_0, y b_0.

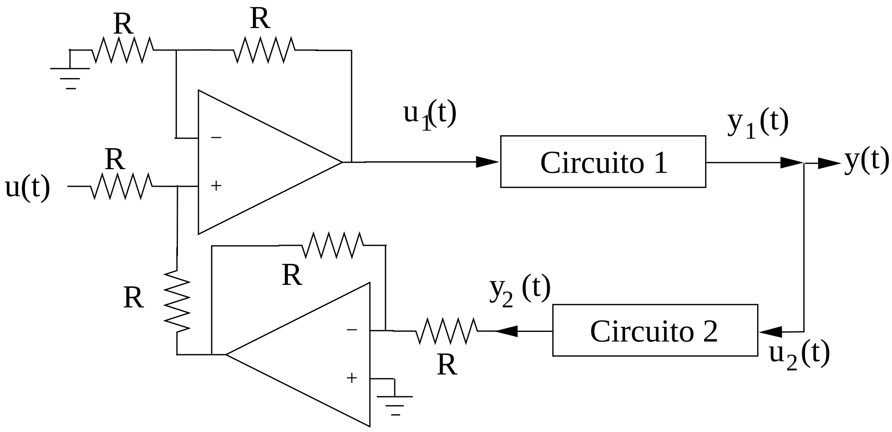

Figure 3: Sistema Correspondiente al Problema 1.

(c) Considere el sistema de la parte **(b)** en donde se tiene que

$$n = 2 \ , \ a_1 = 2\zeta\omega_0 \ , \ a_0 = \omega_0^2 \ , \ b_0 = \omega_0^2 \ ,$$

donde $\omega_0 > 0$ y $0 < \zeta < 1$ son dados.
Escriba explícitamente en este caso las matrices A, B, E, y D, y la función de transferencia H_2, solo en términos de ω_0 y ζ.
Determine si el sistema es internamente estable. Explique claramente su respuesta.
Determine si el sistema (definido con $x_0 = 0$) es BIBO estable. Explique claramente su respuesta.

(d) Consideremos dos circuitos idénticos al de la parte **(c)** que denotaremos como Circuito 1 y Circuito 2. (Decimos que los circuitos son idénticos en el sentido que los valores de los parámetros de los circuitos son idénticos y que por tanto quedan fijados al fijar $\omega_0 > 0$ y $0 < \zeta < 1$.) Considere el sistema conformado por la interconexión de Circuito 1 y Circuito 2 según se muestra en Figura 3. Sabiendo que $\omega_0 > 0$ es fijo y dado, determine el rango de valores del parámetro $0 < \zeta < 1$ que aseguran la estabilidad BIBO del sistema de la Figura 3. Explique claramente su análisis.

(e) Considere el sistema de la parte **(d)** y mostrado en Figura 3 donde ahora $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Halle la función de transferencia H de dicho sistema. ¿De que grado es el polinomio del denominador de H ?
Supongamos que se escribe una descripción de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t) \ , \ z(0) = z_0 \ , \ t \geq 0 \\ y(t) &= Ez(t) + Du(t) \end{aligned}$$

para el comportamiento dinámico del sistema de Figura 3 que estamos considerando. ¿Cuales son, en este caso, las dimensiones de la matriz A ?
Basado en estas respuestas, y en su análisis de la parte **(d)**, que puede concluir sobre la estabilidad interna del sistema de Figura 3 que aquí estamos considerando. Explique claramente su respuesta.

Problema 2.- Considere el circuito de la Figura 4 donde los operacionales son ideales y las fuentes de alimentación son $+V_{cc}$ y $-V_{cc}$. Además se verifica que $M = \frac{L}{2}$, y convenientemente definimos $\tau = \frac{L}{R}$.

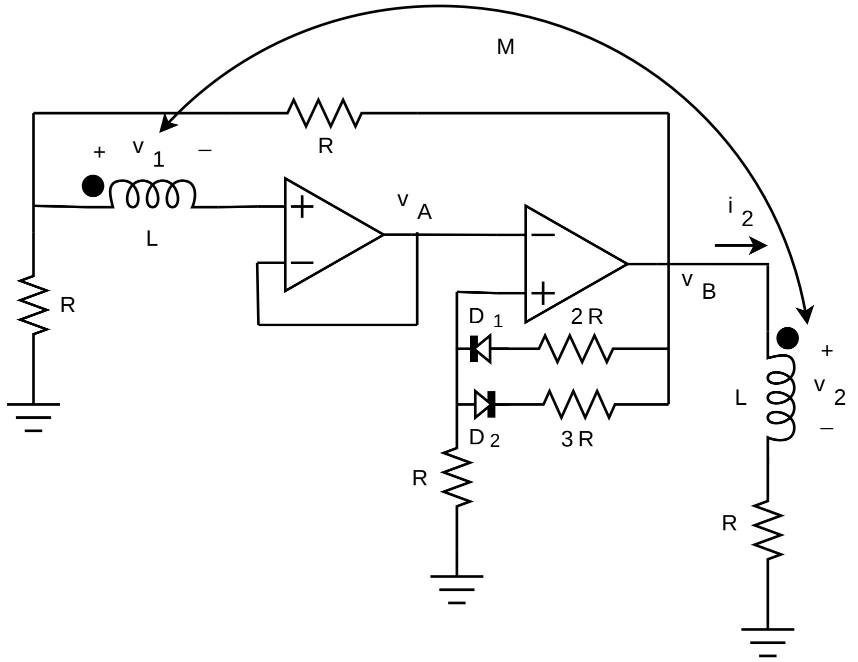

Figure 4: Circuito Correspondiente al Problema 2.

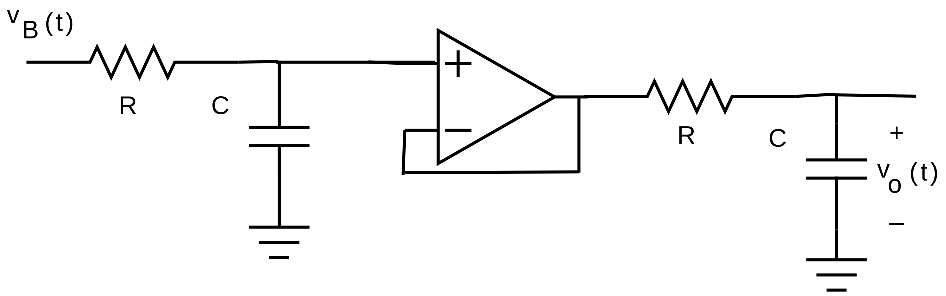

Figure 5: Circuito Correspondiente al Problema 2.

(a) Asumiendo que el circuito comienza descargado y que la salida del comparador arranca en $+V_{cc}$, analizar el comportamiento del circuito desde el instante $t = 0$ hasta que alcanza el régimen. Hallar y graficar $v_B(t)$, $v_2(t)$, $i_2(t)$, y $v_A(t)$.

(b) Determinar el periodo T_0 de la oscilación en régimen.

(c) Si la tensión en régimen a la salida del comparador se procesa con el circuito de la Figura 5, en el cual se cumple $T_0 \ll RC$, hallar una expresión aproximada para la señal $v_0(t)$ en régimen.

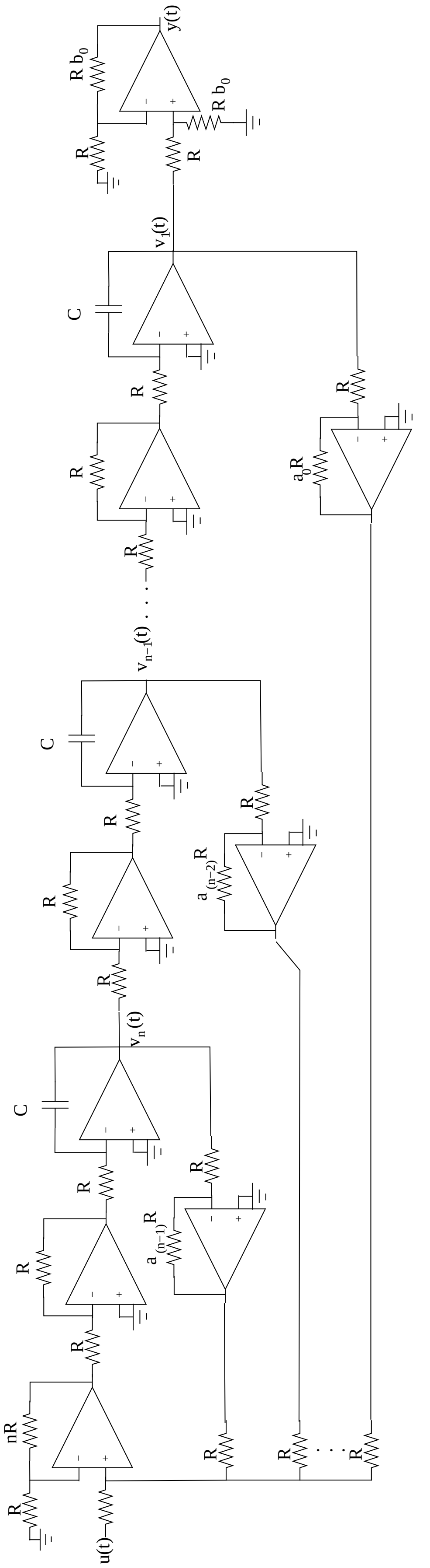

Figure 6: Circuito Correspondiente al Problema 1.