Solucion — Examen Final — Sistemas Lineales 2

Diciembre 2008

Problema 1:

(a) Circuito Fig. 1
$$\boxed{\dot{v}_{out}(t) = v_{in}(t)}$$

Circuito Fig. 2 Izq.
$$\boxed{v_{out}(t) = b_0 v_{in}(t)}$$

Circuito Fig. 2 Der.
$$\boxed{v_{out}(t) = \sum_{k=1}^{m} v_k(t)}$$

(b)
$$\dot{v}_m(t) = -a_{m-1} v_m(t) - a_{m-2} v_{m-1}(t) - \dots - a_0 v_1(t) + u(t)$$

$$\dot{v}_{m-1}(t) = v_m(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{v}_1(t) = v_2(t)$$

$$y(t) = b_0 v_1(t)$$

Entonces,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E = (b_0 \; 0 \cdots 0), \quad D = 0 .$$

$(A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \; B \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \; E \in \mathbb{R}^{1 \times m}, \; D \in \mathbb{R}.)$

Usando condiciones iniciales nulas y

$U = \mathcal{L}\{u\}$, $Y = \mathcal{L}\{y\}$, $V_1 = \mathcal{L}\{v_1\}$

obtenemos que

$$s^m V_1(s) = -a_{m-1} s^{m-1} V_1(s) - a_{m-2} s^{m-2} V_1(s) - \ldots - a_0 V_1(s)$$

$$+ U(s)$$

$$\Rightarrow \quad V_1(s) = \frac{1}{(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \ldots + a_0)} U(s)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H_m(s) = \frac{b_0}{(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \ldots + a_0)}}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = (\omega_0^2 \ 0), \quad D = 0.$$

$$\boxed{H_2(s) = \frac{\omega_0^2}{(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)}}$$

$P_A(\lambda) = \det\{\lambda I - A\} = \lambda^2 + 2\xi\omega_0\lambda + \omega_0$ $\Rightarrow$ Los valores prop. de A tienen parte real negativa, así el sistema es internamente estable.

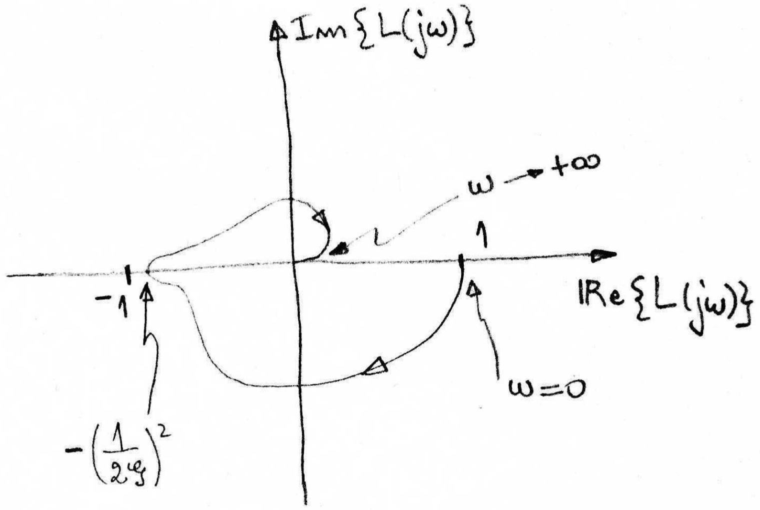
El sistema es BIBO estable dado que estabilidad interna implica estabilidad BIBO.

(d) Aquí $L(s) = \left(\dfrac{\omega_o^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2)} \right)$

Usaremos el criterio de estabilidad de Nyquist:

$P = 0$.

$L(j\omega_o) = -\left(\dfrac{1}{2\zeta}\right)^2$.



Así el sistema es BIBO estable <u>si y solo si</u>

$$\frac{1}{2\zeta} < 1 \iff \boxed{\zeta > \frac{1}{2}}.$$

(e) $$H(s) = \frac{\omega_o^2 (s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2)}{(s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2)^2 + \omega_o^4} = \frac{P_{Num,2}(s)}{P_{Denom,4}(s)}.$$

Note que los polinomios $P_{Num,2}$ y $P_{Denom,4}$ de grados 2 y 4 respectivamente <u>son coprimos</u>.

Sigue también que en este caso la matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

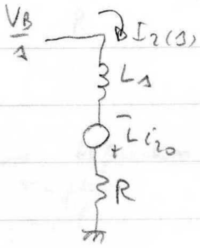
Como aquí $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, en virtud de (d) el sistema es <u>BIBO estable</u>. Así, invocando <u>Proposición 6</u> (pag. 18-19 de Notas Sobre Estabilidad BIBO y Estabilidad Interna en Ciertas Clases de Sistemas) sigue que el sistema es también <u>internamente estable</u>.

Problema 2

$v_1 = L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$ $\quad v_2 = L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \xrightarrow{i_1=0} v_1 = M\frac{di_2}{dt} = \frac{M}{L} L\frac{di_2}{dt} = \frac{v_2}{2}$

$v_2 = L\frac{di_2}{dt}$

$$\boxed{v_A = e^-(t) = \frac{v_B}{2} - v_1 = \frac{v_B - v_2}{2}}$$



$$I_2(s) = \frac{\frac{V_B}{s} + L i_{20}}{Ls + R} = \frac{V_B}{L}\frac{1}{s(s+1/\tau)} + \frac{i_{20}}{s+1/\tau}$$

$$I_2(s) = \frac{V_B}{R}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau}\right] + \frac{i_{20}}{s+1/\tau}$$

$$i_2(t) = \frac{V_B}{R}(1-e^{-t/\tau}) + i_{20} e^{-t/\tau}$$

$$v_2(t) = v_B(t) - R i_2 = V_B - V_B(1-e^{-t/\tau}) - R i_{20} e^{-t/\tau}$$

$$v_2 = e^{-t/\tau}(V_B - R i_{20})$$

$$\Rightarrow e^-(t) = \frac{1}{2}\left[V_B - e^{-t/\tau}(V_B - R i_{20})\right] = \frac{1}{2}\left[V_B(1-e^{-t/\tau}) + R i_{20} e^{-t/\tau}\right]$$

$$\boxed{e^-(t) = \frac{R i_2(t)}{2} \Rightarrow i_2(t) = \frac{2}{R} e^-(t)}$$

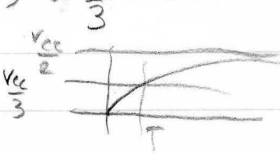
Tramo inicial $V_B = +V_{cc}$, $i_{20} = 0$ $\Rightarrow e^-(t) = \frac{V_{cc}}{2}(1-e^{-t/\tau})$; $e^-(0) =$

$e^+(t) = \frac{V_{cc}}{3}$ $\begin{pmatrix} D_1 \text{ ON}, & I_{D_1} > 0 \\ D_2 \text{ OFF}, & V_{D_2} < 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Además verifica el estado comparador hasta T /

$$e^-(T) = \frac{V_{cc}}{3} = \frac{V_{cc}}{2}(1-e^{-T/\tau}) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(1-e^{-T/\tau}) \Rightarrow \frac{2}{3} = 1 - e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = -e^{-T/\tau} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{-T/\tau} \Rightarrow \boxed{T = \tau \log 3}$$

$$i_2(T) = \frac{2}{R} e^-(T) = \frac{2}{3}\frac{V_{cc}}{R}.$$



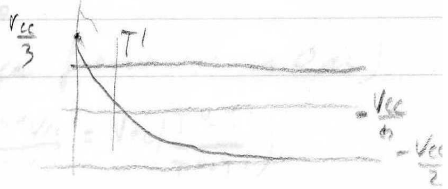
Tramo siguiente: $V_B = -V_{cc}$, $i_{20} = \frac{2}{3}\frac{V_{cc}}{R}$ $\Rightarrow e^-(t) = \frac{1}{2}\left[-V_{cc}(1-e^{-t/\tau}) + \frac{2}{3}V_{cc} e^{-t/\tau}\right]$

(nuevo origen temporal)

$$e^-(t) = \frac{V_{cc}}{6}\left[-3(1-e^{-t/\tau}) + 2e^{-t/\tau}\right] = \frac{V_{cc}}{6}\left[5e^{-t/\tau} - 3\right] \Rightarrow e^-(0) = \frac{V_{cc}}{3}$$

$e^+(t) = \frac{-V_{cc}}{4}$ $\begin{pmatrix} D_1 \text{ OFF}, & V_{D_1} < 0 \\ D_2 \text{ ON}, & I_{D_2} > 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Además verifica el compara

Vale hasta T'/ $e^-(T') = \frac{-V_{cc}}{4}$



$$-\frac{V_{cc}}{2} = \frac{V_{cc}}{6}\left(3e \quad -3\right) \Rightarrow -\frac{3}{2} + 3 = 5e$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = 5e^{-T'/2} \Rightarrow \frac{3}{10} = e^{-T'/2} \Rightarrow \boxed{T' = -2\log\frac{3}{10}}$$

$$i_2(T') = \frac{2}{R}e^-(T') = -\frac{2}{R}\frac{V_{cc}}{2} = \frac{-V_{cc}}{2R}$$

Tramo siguiente: $V_B = +V_{cc}$

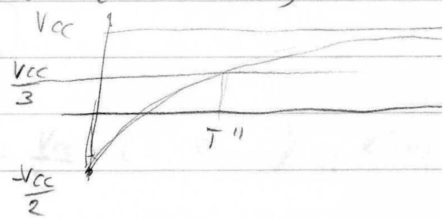
(nuevo origen temporal) $\quad i_{20} = \frac{-V_{cc}}{2R}$

$$\Rightarrow e^-(t) = \frac{1}{2}\left[V_{cc}\left(1-e^{-t/2}\right) - \frac{V_{cc}}{2}e^{-t/2}\right] = \frac{V_{cc}}{2}\left[2\left(1-e^{-t/2}\right) - e^{-t/2}\right]$$

$$e^-(t) = \frac{V_{cc}}{2}\left(2 - 3e^{-t/2}\right) \Rightarrow e^-(0) = -\frac{V_{cc}}{2}$$

$e^+(t) = \frac{V_{cc}}{3}$ (igual que en tramo inicial)

$\Rightarrow$ se verifica el comparador



Vale hasta T'' /

$$e^-(T'') = \frac{V_{cc}}{3} = \frac{V_{cc}}{2}\left(2 - 3e^{-T''/2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = 2 - 3e^{-T''/2} \Rightarrow -\frac{4}{3} = -3e^{-T''/2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} = e^{-T''/2} \Rightarrow \boxed{T'' = -2\log\left(\frac{4}{9}\right)}.$$

$$i_2(T'') = \frac{2}{R}e^-(T'') = \frac{2}{R}\frac{V_{cc}}{3}$$

Tramo siguiente: $V_B = -V_{cc}$

$$i_{20} = \frac{2}{3}\frac{V_{cc}}{3}$$

b) Periodo $T_0 = T' + T''$

c) El sistema es un filtro pasabajos de primer orden se excita con una onda cuadrada de periodo T_0.

La fundamental $\frac{1}{T_0}$ cae mucho más allá de la frecuencia de corte del filtro, por lo que $v_0(t)$ puede aproximarse por el valor medio de la entrada.

(Obs: la ganancia del filtro en baja frecuencia es 0 dB)

$$c_0(v_B) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T'} -V_{cc}\,dt + \frac{1}{T_0}\int_0^{T''} +V_{cc}\,dt = \frac{-T'V_{cc} + T''V_{cc}}{T'+T''} = V_{cc}\left(\frac{T''-T'}{T''+T'}\right)$$