Solución segundo parcial de Sistemas Lineales 2 2006

Andrés Alcarraz

23 de diciembre de 2006

1. Ejercicio 2

1.1. 1

1.1.1. a

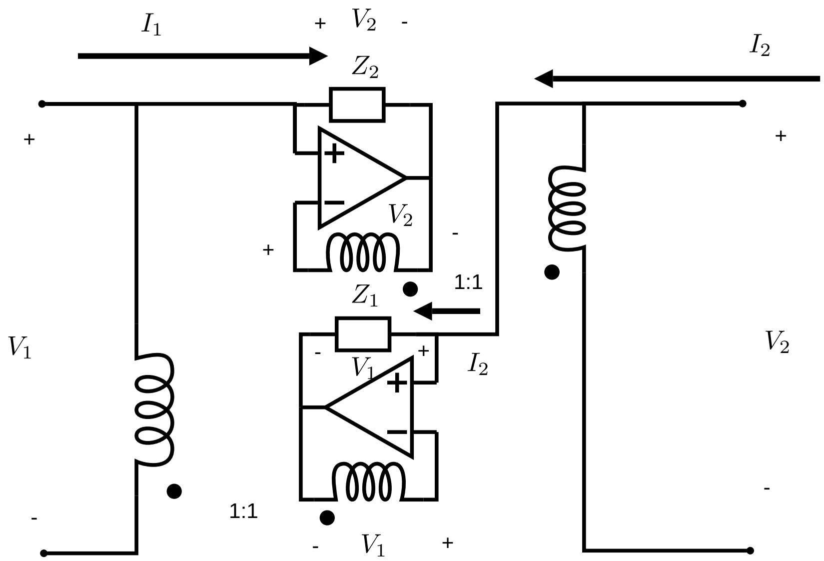

Figura 1: Girador Inversor

Como los transformadores son ideales y una de las bobinas de cada uno de ellos está conectada a la entrada de un operacional, por ellos no circula corriente, por lo tanto la corriente I_1 de entrada por el primario del cuadripolo va enteramente a la impedancia Z_2 como muestra la figura 1.1.1.

Asimismo el voltaje en dicha impedancia es V_2 impuesto por el otro transformador y el operacional, así obtenemos:

$$I_1 = \frac{V_2}{Z_2} = CV_2 - DI_2 \tag{1}$$

De lo cual se desprende que $C = \frac{1}{Z_2}$ y $D = 0$

Por el mismo razonamiento la corriente por Z_1 es I_2 y su caída de voltaje es V_1 obteniendo:

$$V_1 = Z_1 I_2 = AV_2 - BI_2 \tag{2}$$

De lo cual obtenemos que $A = 0$ y $B = -Z_1$

1.1.2. b

El cargar el secundario con Z_L nos impone la restricción

$$V_2 = -Z_L I_2 \tag{3}$$

Dividiendo la ecuación 2 entre 1 llegamos a lo siguiente:

$$Z_V = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_1 I_2}{\frac{V_2}{Z_2}} = -\frac{Z_1 Z_2}{Z_L} \tag{4}$$

donde en el último paso utilizamos la ecuación 3

1.2. 2

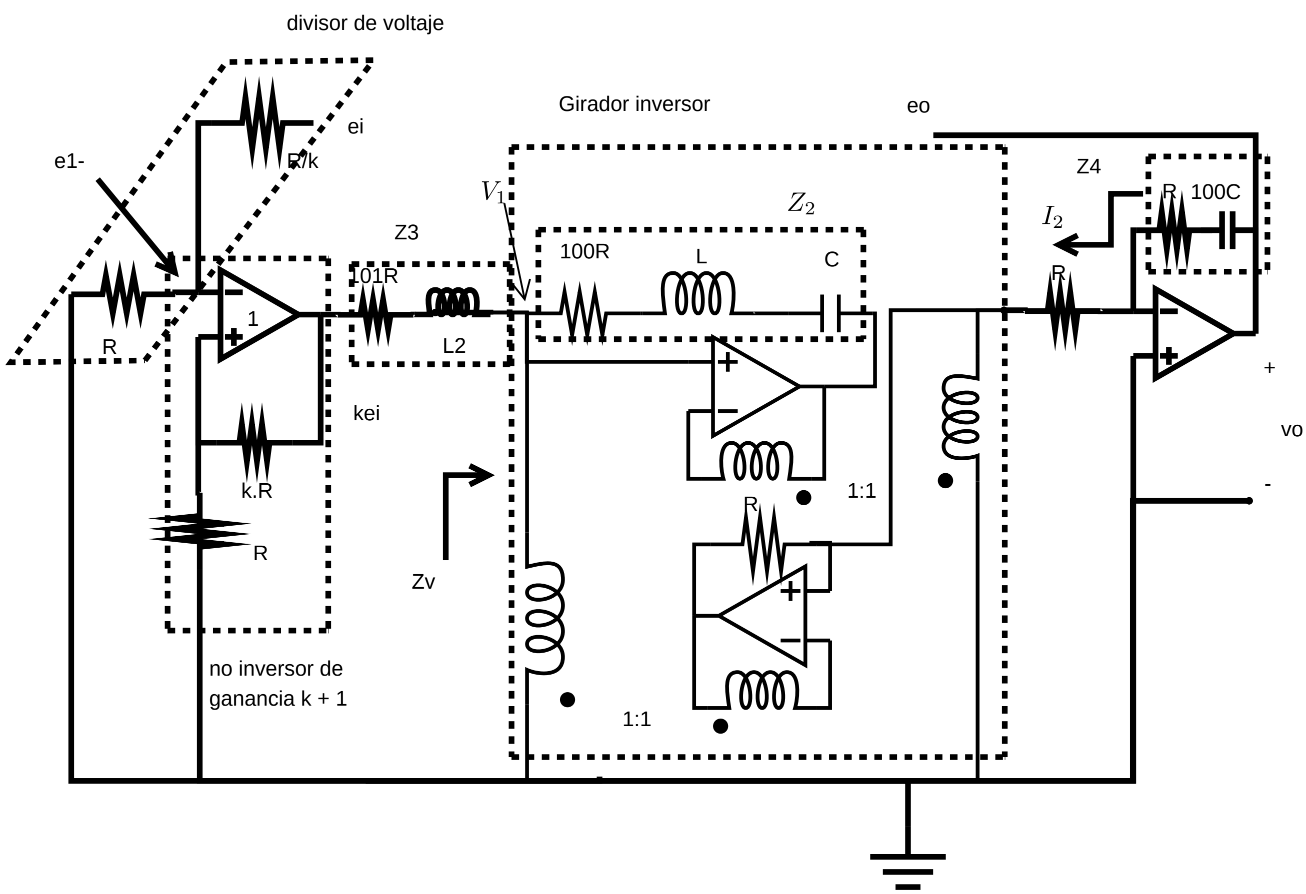

Figura 2: Apertura del lazo

Para utilizar el criterio de Nyquist debemos primero calcular la transferencia de lazo abierto, para ello abrimos el lazo como se muestra en la figura 1.2. Abrimos el lazo allí ya que estamos a la salida de un operacional ideal, por lo cual la impedancia de salida del bloque anterior es 0, así que la transferencia de dicho bloque no cambia por anular la corriente.

Inyectamos un voltaje e_i y anulamos v_i como muestra la figura, al hacer esto el operacional 1 queda en una configuración no inversora de ganancia k+1, con entrada e_1^-, por lo que a la salida del operacional 1 tenemos un voltaje $(k+1)e_1^-$.

En la parte anterior calculamos la impedancia vista en el primario del girador inversor cuando el secundario está cargado con una impedancia Z_L que en este caso es R, podemos usar esto para calcular V_1 mediante un divisor de voltaje entre Z_3 Y Z_v.

$$Z_L = R, Z_1 = R, Z_2 = Ls + 100R + \frac{1}{Cs} \tag{5}$$

$$Z_v = -\frac{Z_1 Z_2}{Z_L} = -\left(Ls + 100R + \frac{1}{Cs}\right) \tag{6}$$

$$e_1^- = \frac{R}{R + \frac{R}{k}} = \frac{k}{k+1} \tag{7}$$

$$V_1 = (k+1)\left(\frac{k}{k+1}e_i\right)\frac{Z_v}{Z_v + Z_3} = ke_i\frac{-\left(Ls + 100R + \frac{1}{Cs}\right)}{L_2 s + 101R - Ls - 100R - \frac{1}{Cs}} = ke_i\frac{LCs^2 + 100RCs + 1}{(L - L_2)Cs^2 - RCs + 1} \tag{8}$$

Ahora de las ecuaciones del cuadripolo podemos hallar I_2 y multiplicando por Z_4 obtener e_o

$$I_2 = \frac{V_1}{R} \tag{9}$$

$$e_o = \left(R + \frac{1}{10^4 Cs}\right) I_2 = \frac{10^4 RCs + 1}{10^4 RCs} V_1 \tag{10}$$

$$G_O L = -A\beta = \frac{e_o}{e_i} = k\frac{LCs^2 + 100RCs + 1}{(L - L_2)Cs^2 - RCs + 1}\frac{10^4 RCs + 1}{10^4 RCs} = k\frac{s + \frac{1}{10^4 RC}}{s}\frac{L}{L - L_2}\frac{s^2 + 100\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s^2 - \frac{R}{L - L_2}s + \frac{1}{C(L - L_2)}} \tag{11}$$

La última igualdad se hizo para dejar la expresión lo más parecida posible a la de la sugerencia, identificando términos:

$$k' = k\frac{L}{L - L_2} = k\frac{1}{1 - ,9999} = 10^4 k \tag{12}$$

$$\text{término independiente en el trinomio del numerador}\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{13}$$

$$\text{polo simple de la expresión sugerida}\frac{1}{100RC} = \frac{\omega_0}{100} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{100} \tag{14}$$

$$100\frac{R}{L} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \tag{15}$$

$$\frac{1}{C(L - L_2)} = 10^4\frac{1}{LC} = 10^4\omega_0^2 \tag{16}$$

$$\frac{R}{L - L_2} = 10^4\frac{R}{L} = 100(100\frac{R}{L}) = 100\omega_0 \tag{17}$$

Ahora que tenemos la transferencia de lazo abierto aplicamos Nyquist a

$$A\beta = -10^4 k\frac{\left(s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2\right)\left(s + \frac{\omega_0}{100}\right)}{s\left(s^2 - 100\omega_0 s + 10^4\omega_0^2\right)} \tag{18}$$

Para aplicar el criterio de Nyquist tenemos que mapear $A\beta$ a través de la curva Γ de la figura 1.2, tenemos que esquivar el origen puesto que hay un polo en el. Para estar seguros de abarcar todo el semiplano derecho con la curva tenemos que hacer tender r a 0 y R a infinito.

Para el tramo 1-2 debemos mapear la curva $re^{j\theta}$ con θ subiendo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y $r \to 0$:

$$A\beta(re^{j\theta}) \simeq -10^4 k\frac{\omega_0^2\frac{\omega_0}{100}}{re^{j\theta}10^4\omega_0^2} = -\frac{k\omega_0}{100r}e^{-j\theta} \tag{19}$$

$$\arg\left(A\beta(re^{j\theta})\right) = \pi - \theta \tag{20}$$

Cuando θ sube de 0 a $\frac{\pi}{2}$ el argumento de $A\beta(re^{j\theta})$ baja de π a $\frac{\pi}{2}$

Para el tramo 2-3 usamos el diagrama de bode que hacemos a continuación, $A\beta$ tiene 2 ceros complejos conjugados de módulo ω_0 y dos polos de módulo $100\omega_0$ ($|\zeta| = ,5 < 1$ en ambos casos) y un cero en $-\frac{\omega_0}{100}$.

$$\omega << \frac{\omega_0}{100} \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -10^4\frac{\omega_0^2\frac{\omega_0}{100}}{j\omega 10^4\omega_0^2} = -\frac{k\omega_0}{100j\omega} = j\frac{k\omega_0}{\omega} \text{ arg: } \frac{\pi}{2}\text{, mod:-20db/dec} \tag{21}$$

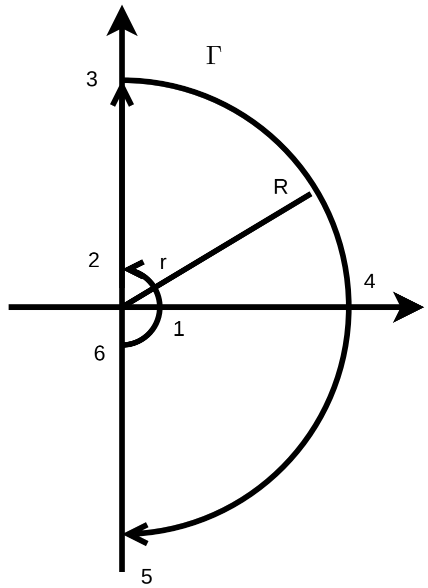

Figura 3: curva Γ

$$\frac{\omega_0}{100} << \omega << \omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -10^4 \frac{\omega_0^2 j\omega}{j\omega 10^4 \omega_0^2} = -k \text{arg: } \pi, \text{ mod:} 20\log(k) \tag{22}$$

$$\omega_0 << \omega << 100\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -10^4 \frac{-\omega^2 j\omega}{j\omega 10^4 \omega_0^2} = k\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \text{arg: } 0 \text{ o } 2\pi, \text{ mod:40db/dec} \tag{23}$$

$$\text{para determinar el argumento evaluamos en } \omega_0$$

$$A\beta(j\omega_0) \simeq -10^4 k \frac{\left(-\omega_0^2 + \omega_0 j\omega_0 + \omega_0^2\right) j\omega_0}{j\omega_0 10^4 \omega_0^2} = -kj \tag{24}$$

$$A\beta(j\omega_0) \simeq \frac{3\pi}{2} \text{ por lo tanto la fase va a } 2\pi \tag{25}$$

$$100\omega_0 << \omega \Rightarrow A\beta(j\omega) \simeq -10^4 \frac{-\omega^2 j\omega}{j\omega\left(-omega^2\right)} = -10^4 k \text{arg: } \pi \text{ o } 3\pi, \text{ mod:} 80db + 20\log(k) \tag{26}$$

$$\text{para determinar el argumento evaluamos en } 100\omega_0$$

$$A\beta(100j\omega_0) \simeq -10^4 k \frac{-j(100\omega)^3}{j100\omega_0\left(-10^4\omega_0^2 - 100\omega_0 j100\omega_0 + 10^4\omega_0^2\right)} = -10^4 k \frac{(100\omega)^2}{j(100\omega_0)^2} = 10^4 kj \tag{27}$$

$$A\beta(100j\omega_0) \simeq \frac{5\pi}{2} \text{ por lo tanto la fase va a } 3\pi \tag{28}$$

Con esto podemos construir el diagrama de bode que se muestra en la figura 1.2. El tramo 3-4 se mapea en un punto debido a que la transferencia es propia, dicho punto coincide con el limite derecho del bode.

En la figura 1.2 está el diagrama de Nyquist, el número de polos de $1 + A\beta$ encerrados por Γ es 2 (los polos complejos conjugados tienen parte real negativa). El número de ceros es lo que queremos averiguar, y el número de vueltas lo sacamos del diagrama. Por el principio del argumento tenemos $N = Z - P$, o sea $Z = N + P$ donde N es el número de vueltas, Z el número de ceros y P el número de polos de $1 + A\beta$. Para que el sistema sea estable $Z = 0$ por lo tanto en nuestro caso como $P = 2$, N debe ser -2 para que el sistema sea estable.

En el diagrama de la figura 1.2 se ve que hay tres zonas donde puede caer el -1 en una tenemos $N = 1$ con lo que $Z = 3$ por lo tanto si -1 cae en esa zona el sistema es inestable, lo mismo ocurre en la zona donde $N = 0$ ya que queda $Z = 2$.

Para que el sistema sea estable $-k$ debe estar a la izquierda de -1 por lo tanto el sistema es estable si $k > 1$

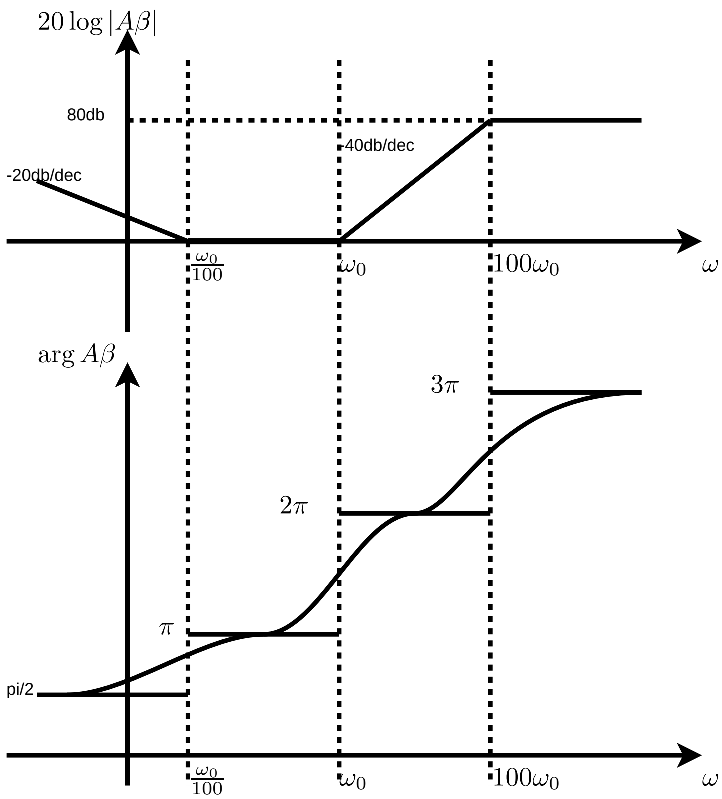

Figura 4: Diagramas de Bode

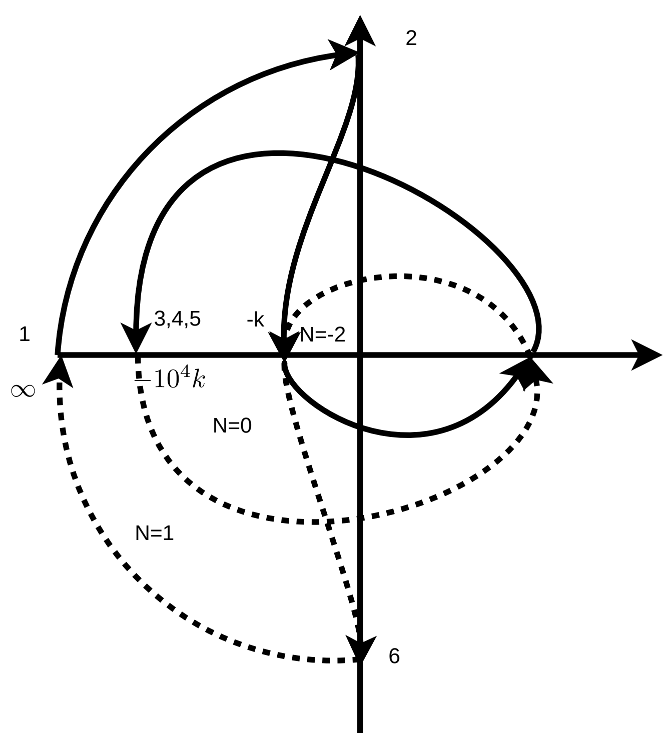

Figura 5: Diagrama de Nyquist