Sistemas Lineales 2
Examen, 21 de diciembre del 2005

Te solicitamos:

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- **resolver problemas diferentes en hojas separadas**.

Se recuerda que la prueba es individual y **dura 3 horas**. No olvides de administrar el tiempo de la mejor manera. Para pasar a la instancia de oral es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

Ejercicio 1

Se considera el circuito de la figura 1, con el operacional ideal trabajando en zona lineal. La llave LL permite conectar la fuente de continua al primario del transformador simple. La fuente $v_i(t)$ se grafica en la figura 2.

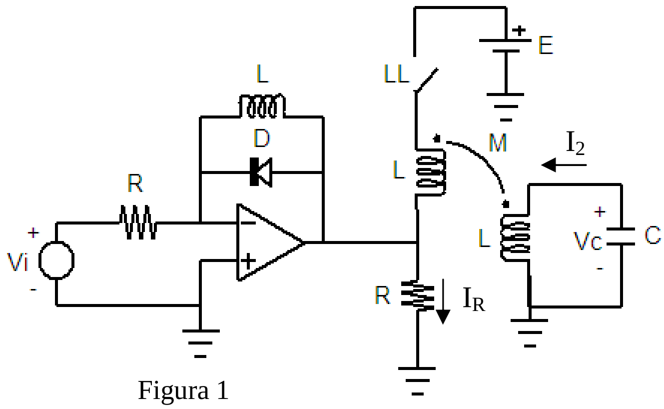


Figura 1

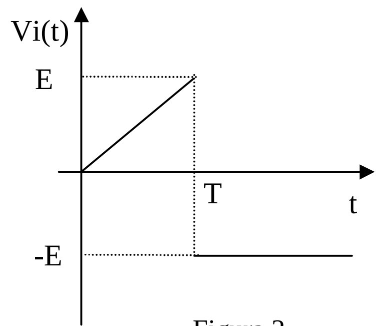


Figura 2

En el instante incial todas las componentes se encuentran en reposo salvo el condensador que presenta una carga incial **Vco**. La llave se encuentra **abierta**.

a) Hallar y graficar el voltaje en el condensador $v_c(t)$ y la corriente por la resistencia $i_R(t)$ hasta el instante t=T= $\frac{3p}{2}\sqrt{LC}$

b) Calcular $i_2(T)$

En t=T= $\frac{3p}{2}\sqrt{LC}$ se **cierra** la llave LL.

c) A partir de dicho instante, hallar el voltaje en el condensador $v_c(t)$ y la corriente por la resistencia $i_R(t)$

Justifique claramente como trabaja con el diodo D.

Ejercicio 2

a) En el circuito de la figura 1 hallar V_{out} en función de V_A, V_B, V_C, V_D.

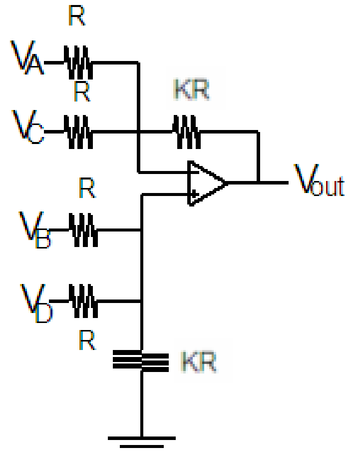


Figura 1

b) En el circuito de la figura 2 hallar V_A, V_B, V_C, V_D en funcion de V_1 y V_2 en Laplace.

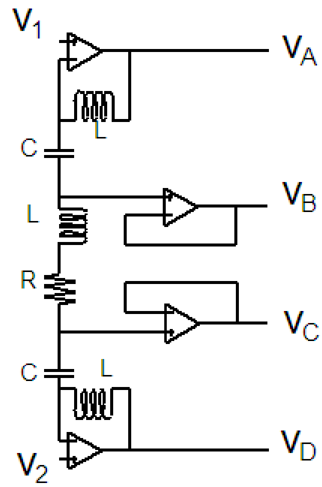


Figura 2

c) Estudiar la estabilidad del siguiente circuito (figura 3) usando el criterio de Nyquist sabiendo que $(L/R)^2=LC$.

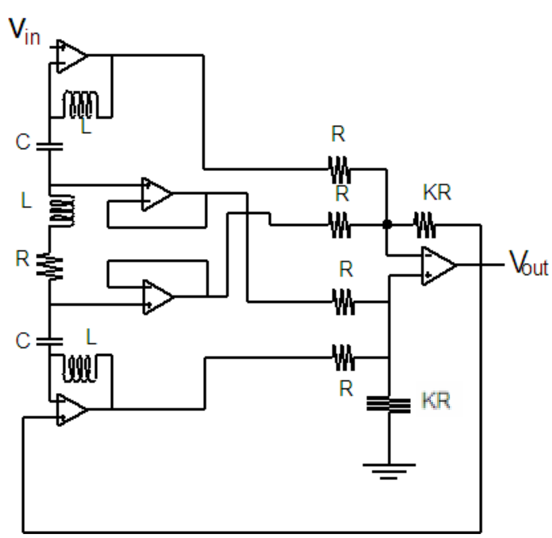
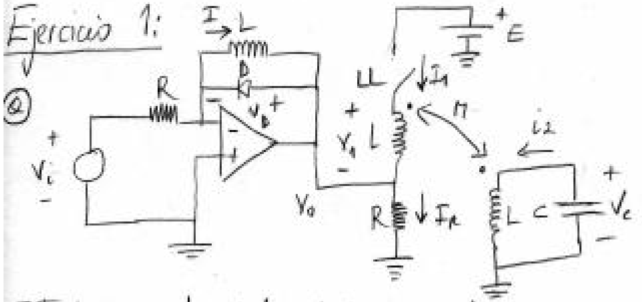


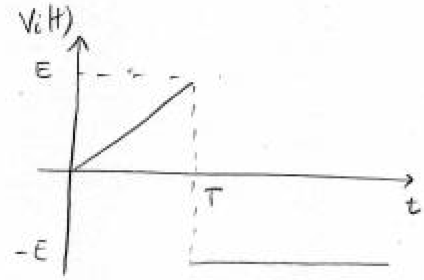
Figura 3

SISTEMAS LINEALES 2: DICIEMBRE 2005 (1)

Ejercicio 1:

a)





Estudio a partir del instante inicial. La llave LL está abierta, y el condensador cargado a Vco.

Para la primera etapa supongo D OFF $\Rightarrow V_0 = -\frac{Ls}{R} V_i$ con $V_i(s) = \frac{E}{Ts^2}$

$\Rightarrow V_0 = -\frac{L}{R}\frac{E}{Ts} \Rightarrow v_0(t) = -\frac{L}{R}\frac{E}{T}Y(t)$

Verifico el supuesto del diodo: $v_D(t) = V_0 - 0 = -\frac{L}{R}\frac{E}{T}Y(t) < 0$

$i_R(t) = \frac{v_0(t)}{R} \Rightarrow \boxed{i_R(t) = -\frac{L}{R^2}\frac{E}{T}Y(t)}$

Planteando las ecuaciones del transformador simple ($I_1=0$ por LL abierta y $V_2 = V_c$)

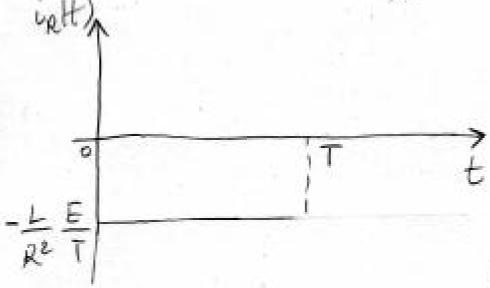
$\Rightarrow V_1 = Ms\,I_2 \qquad -I_2 = \left[V_c - \frac{V_{co}}{s}\right]Cs \Rightarrow I_2 = -V_c Cs + V_{co}C$

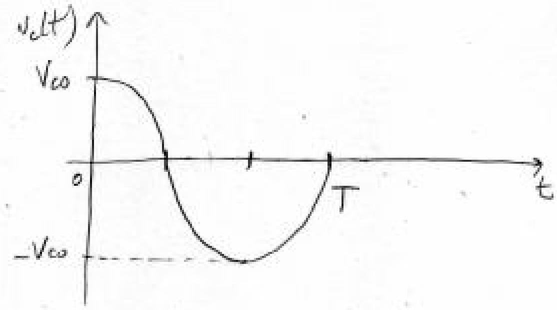
$V_c = Ls\,I_2$

$\Rightarrow V_c = LCV_{co}s - LCs^2V_c \Rightarrow V_c = \frac{V_{co}\,s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \Rightarrow \boxed{v_c(t) = V_{co}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)Y(t)}$

El tramo termina para $T = \frac{3\pi}{2}\sqrt{LC}$

$\Rightarrow v_c(T) = 0 \quad , \quad i(T) = \frac{E}{R} \quad , \quad i_1(T) = 0$





(b) $i_2(t) = -C\frac{dv_c}{dt} = \sqrt{\frac{C}{L}}\, V_{co} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)Y(t)$ (2)

$\Rightarrow \boxed{i_2(T) = -\sqrt{\frac{C}{L}}\, V_{co} = i_{L0}}$

(c) Estudiamos para $t'=t-T \geq 0$. La llave LL está ahora cerrada. $V_i(s) = -\frac{E}{s}$

Para la primera etapa supongo D ON $\Rightarrow v_0(t')=0$ por la tierra virtual y el corto circuito impuesto por el diodo.

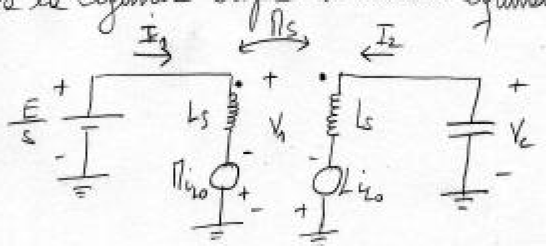
Verifico el supuesto del diodo: $i_D(t') = i(t') + \frac{0 - v_i(t')}{R} = i(t') + \frac{E}{R}$

$i(t)$ es la corriente por la bobina L, que es constante e igual al dato previo $i(T)=\frac{E}{R}$

$\Rightarrow i_D(t') = \frac{2E}{R} > 0$

$\Rightarrow \boxed{i_R(t') = 0}$

Para la segunda etapa el circuito equivalente en Laplace es el siguiente:



$I_2 = -V_c C s$

$$\frac{E}{s} = Ls I_1 + Ms I_2 - M i_{L0} = Ls I_1 - MCs^2 V_c - M i_{L0} \Rightarrow I_1 = \frac{\frac{E}{s} + M i_{L0} + MCs^2 V_c}{Ls}$$

$$V_c = -LCs^2 V_c - L i_{L0} + Ms I_1 = -LCs^2V_c - Li_{L0} + \frac{M}{L}\frac{E}{s} + \frac{M^2}{L} i_{L0} + \frac{M^2}{L} Cs^2 V_c$$

$$\Rightarrow V_c = -\frac{i_{L0}}{C}\,\frac{1}{s^2+\frac{L}{C(L^2-M^2)}} + \frac{M}{(L^2-M^2)C}\,\frac{E}{s\left(s^2+\frac{L}{C(L^2-M^2)}\right)}$$

Antitransformando:

$$v_c(t') = -i_{L0}\sqrt{\frac{L^2-M^2}{LC}}\, \sin\left(\sqrt{\frac{L}{C(L^2-M^2)}}\,t\right) + \frac{ME}{\sqrt{LC(L^2-M^2)}}\int_0^{t'} \sin\left(\sqrt{\frac{L}{C(L^2-M^2)}}\,\tau\right)d\tau$$

(3)

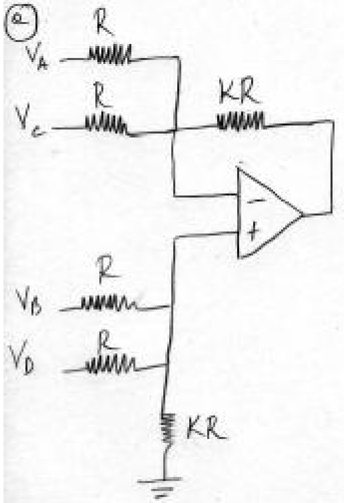
$$\Rightarrow \boxed{v_c(t') = V_{c0}\sqrt{\frac{L^2-M^2}{L^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{L}{C(L^2-M^2)}}\,t'\right)Y(t') + \frac{M}{L}E\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{L}{C(L^2-M^2)}}\,t'\right)\right]Y(t')}$$

Se verifica que $v_c(0)=0$ como era de esperarse

Ejercicio 2:

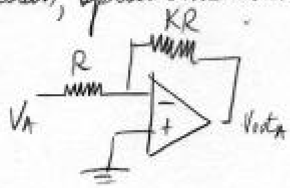
4

a)



Aplico superposición, aplico una entrada con las demás a tierra

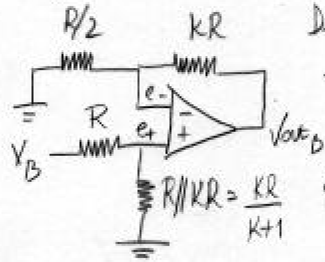
Para $V_A \Rightarrow$



$\Rightarrow V_{out_A} = -KV_A$

Por simetría $V_{out_C} = -KV_C$

Para $V_B \Rightarrow$



De los divisores resistivos

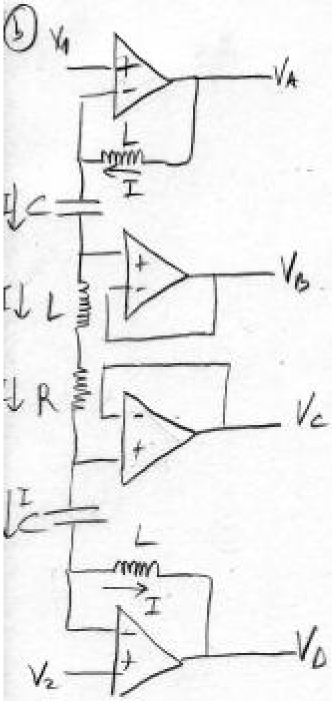
$\Rightarrow e_+ = \frac{KV_B}{2K+1}$

$e_- = \frac{V_{out_B}}{2\cancel{K+1}} = e_+ = \frac{KV_B}{2\cancel{K+1}}$

$\Rightarrow V_{out_B} = KV_B$ Por simetría $V_{out_D} = KV_D$

Superponiendo : $\boxed{V_{out} = K[V_B - V_A + V_D - V_C]}$

b)



Como los operacionales son ideales, no toman corriente y por todos los componentes circula una corriente I.

$$\Rightarrow I = \frac{V_1 - V_2}{\frac{2}{Cs} + Ls + R} \Rightarrow I = \frac{(V_1 - V_2)\,Cs}{LCs^2 + RCs + 2}$$

Por otro lado:

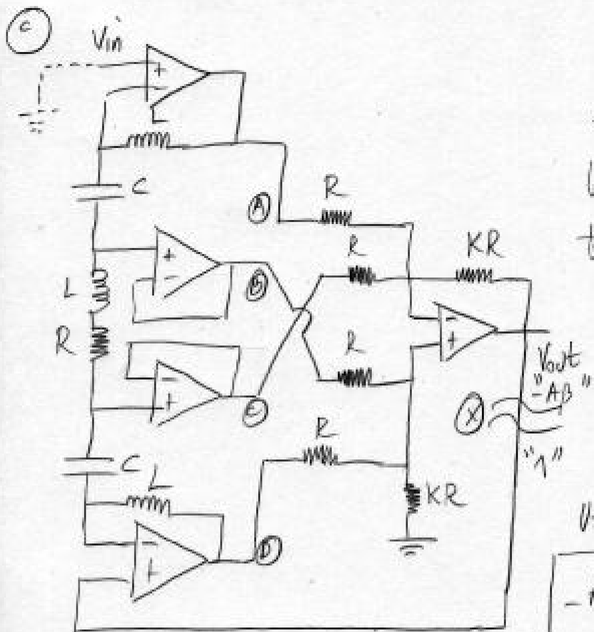
$$V_A = V_1 + Ls\,I \Rightarrow \boxed{V_A = V_1 + \frac{(V_1 - V_2)\,LCs^2}{LCs^2 + RCs + 2}}$$

$$V_B = V_1 - \frac{I}{Cs} \Rightarrow \boxed{V_B = V_1 - \frac{(V_1 - V_2)}{LCs^2 + RCs + 2}}$$

$$V_C = V_2 + \frac{I}{Cs} \Rightarrow \boxed{V_C = V_2 - \frac{(V_1 - V_2)}{LCs^2 + RCs + 2}}$$

$$V_D = V_2 - Ls\,I \Rightarrow \boxed{V_D = V_2 + \frac{(V_1 - V_2)\,LCs^2}{LCs^2 + RCs + 2}}$$

(c)



(5)

Abro el lazo e inyecto una señal unitaria en (X). Sigo y a la vuelta tengo $-A\beta(s)$.
Utilizando los resultados de la parte (b) tengo en

$$\begin{cases} (A) & \dfrac{-LCs^2}{LCs^2+RCs+2} \\ (B) & \dfrac{1}{LCs^2+RCs+2} \\ (C) & 1+\dfrac{1}{LCs^2+RCs+2} \\ (D) & 1-\dfrac{LCs^2}{LCs^2+RCs+2} \end{cases}$$

Utilizando los resultados de la parte (a)

$$\boxed{-A\beta(s) = 2K\,\frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{2}{LC}}}$$

Se cumple $\left(\frac{L}{R}\right)^2 = LC$ y definiendo $w_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \frac{R}{L} = w_0$ $\quad A\beta(jw) = -2K\,\frac{(jw)^2+w_0^2}{(jw)^2+w_0 jw+2w_0^2}$

Ceros: $\pm jw_0$ con $\zeta=0$, $w_n=w_0$

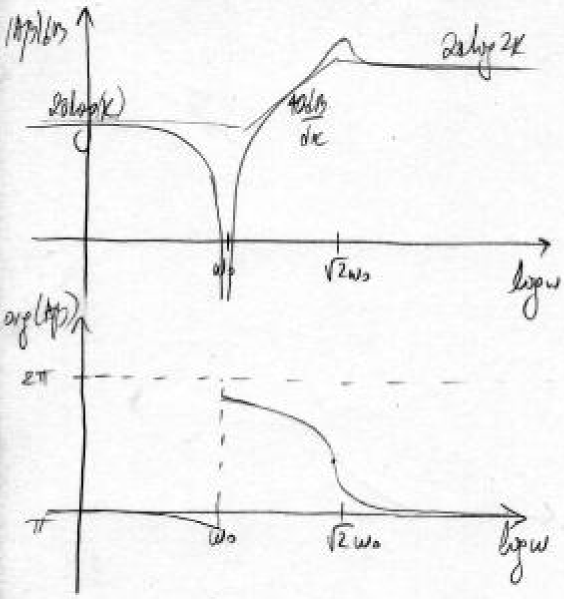
Polos: complejos conjugados, $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $w_n=\sqrt{2}w_0$

Si $w \ll w_0 \Rightarrow A\beta(jw) \simeq -K \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \simeq 20\log(K)\,dB \\ \arg(A\beta) \simeq \pi \end{cases}$

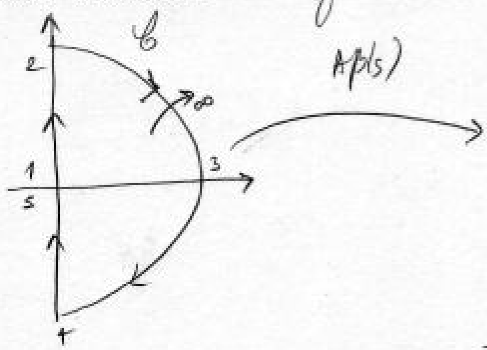
Si $w_0 \ll w \ll \sqrt{2}w_0 \Rightarrow A\beta(jw) \simeq \frac{Kw^2}{w_0^2} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{K}{w_0^2}\right)+40\log w\,dB \\ \arg(A\beta) \simeq 2\pi \end{cases}$

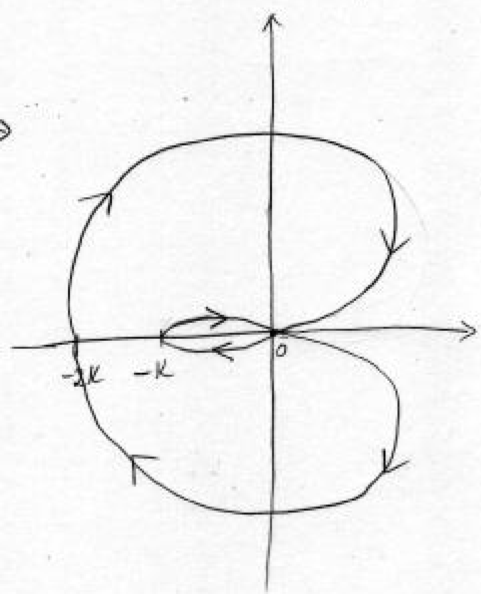
Si $w \gg \sqrt{2}w_0 \Rightarrow A\beta(jw) \simeq -2K \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \simeq 20\log(2K)\,dB \\ \arg(A\beta) \simeq \pi \end{cases}$

6



Estudiamos la estabilidad en lazo cerrado mediante el criterio de Nyquist.





Para la curva $\mathcal{C}$ elegida $\Rightarrow P=0$

Para estabilidad busco $N=0 \Rightarrow Z=0$

De 1 a 2: uso la información del Bode.

De 2 a 3: se mapea a $-2K$

El resto: simetría respecto del eje real.

Del diagrama se observa que $N=0$ si $-2K > -1 \Rightarrow K < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Si $\boxed{K < \frac{1}{2}}$ es ESTABLE