

Sistemas Lineales 2
Examen, 16 de diciembre del 2004

Te solicitamos:

- poner nombre y apellido en todas las hojas.
- recuadrar las respuestas correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- resolver problemas diferentes en hojas separadas.

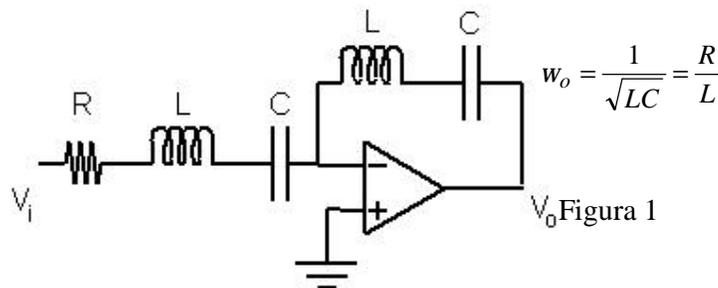
Se recuerda que la prueba es individual y dura 3 horas. No olvides de administrar el tiempo de la mejor manera. Para pasar a la instancia de oral es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

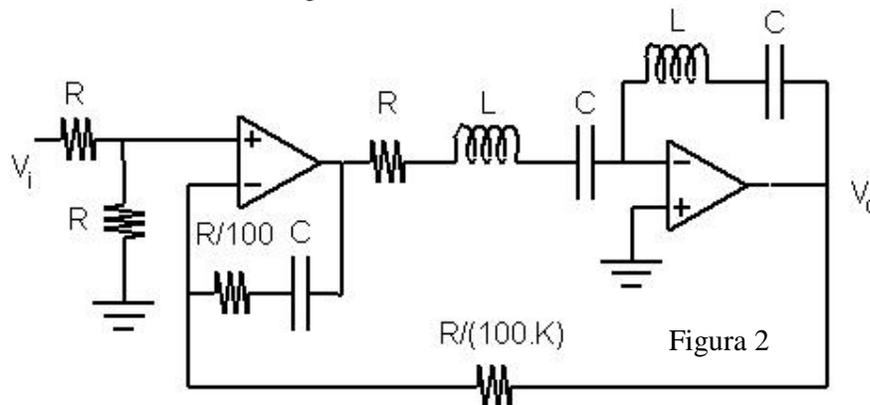
Ejercicio 1

a) En el circuito de la figura 1 con amplificadores operacionales ideales hallar la transferencia

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}. \text{ También evaluar } H(j\omega_o).$$



b) Para el sistema realimentado de la figura 2, hallar la transferencia de lazo abierto $-Ab(j\omega)$.



c) Realizar los diagramas de Bode de $Ab(j\omega)$.

Sugerencia: estudiar cuidadosamente, mediante el análisis de límites laterales, la variación de fase entorno a ω_o e incorporar dicha información a los Diagramas asintóticos de módulo y fase.

d) Estudiar según K, la estabilidad en lazo cerrado mediante el criterio de Nyquist.

Ejercicio 2

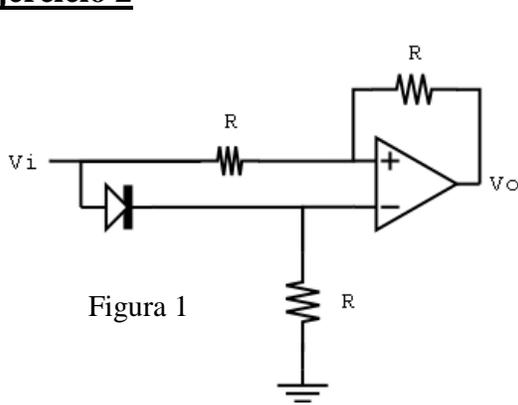


Figura 1

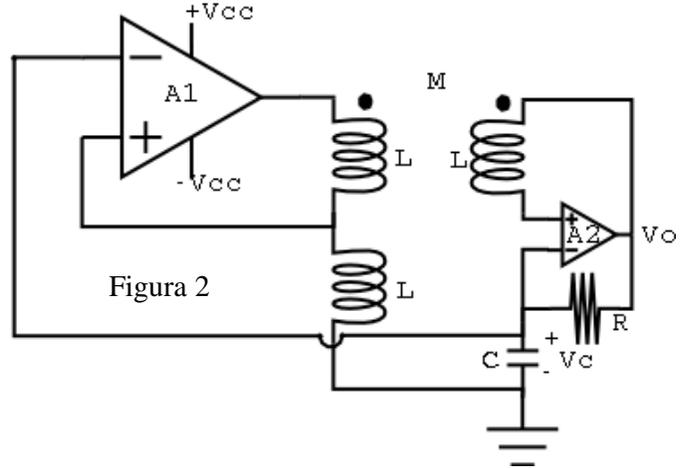


Figura 2

- a) En el circuito de la figura 1, hallar V_o en función de V_i .
- b) En el circuito de la figura 2 el operacional A1 funciona en zona no lineal y el operacional A2 en zona lineal, ambos son ideales y el transformador es perfecto. Además en $t=0$ el condensador está cargado a $-V_{cc}/2$, las bobinas descargadas y A1 está saturado a $+V_{cc}$.

Se pide hallar y dibujar V_c y V_o hasta que el sistema llegue al régimen y calcular el período de V_c y V_o en el régimen.

Sugerencia: primero hallar la relación entre V_c y la salida de A1 y luego enfocarse en los tramos.

- c) i) Mostrar que la señal V_b en la figura 3 resulta ser un diente de sierra de periodo $2RC$.
- ii) Hallar $V_a(t)$ para todo $t \geq 0$, reconociendo la transferencia del bloque respectivo.
- iii) Sea $L_1 = R^2C/\pi^2$, $C_1=C$. Hallar la expresión temporal de la salida $V_o(t)$, (L_1 y C_1 descargados).

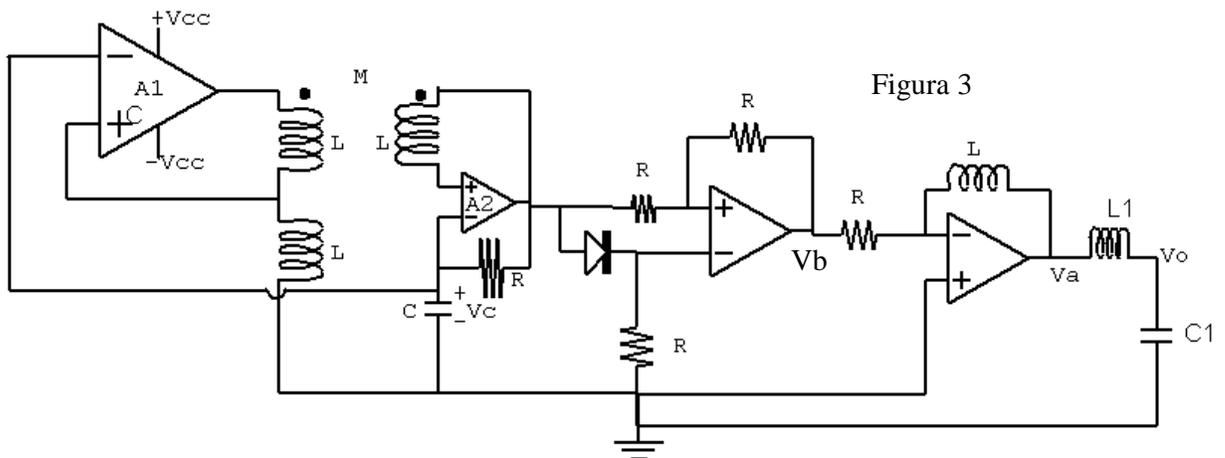
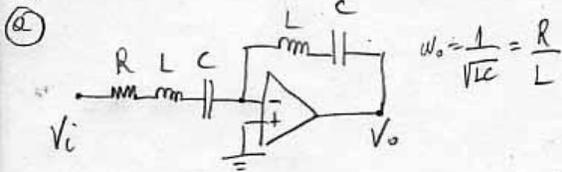


Figura 3

SISTEMAS LINEALES 2: DICIEMBRE 2004

1

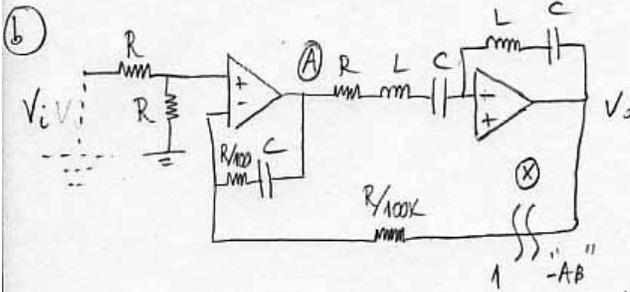
Ejercicio 1.



De la configuración inversora:

$$H(s) = - \frac{Ls + 1/Cs}{R + Ls + 1/Cs} = - \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + 1/LC}$$

$$\Rightarrow H(s) = - \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{y} \quad H(j\omega_0) = 0$$



Abro el lazo e injecto una señal unitaria en B. Se que a la vuelta tengo $-A\beta(s)$. Recordando que se anula la entrada, y recordando el bloque inversor en A tengo $-K \frac{(s+100\omega_0)}{s}$.

Finalmente recordando el bloque de la parte anterior tenemos $-A\beta(s) = - \frac{K(s+100\omega_0)}{s} H(s)$

$$\Rightarrow -A\beta(s) = K \frac{(s+100\omega_0)(s^2 + \omega_0^2)}{s(s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2)}$$

Realicemos los diagramas de Bode de $A\beta(j\omega) = - \frac{K(j\omega+100\omega_0)((j\omega)^2 + \omega_0^2)}{j\omega(L(j\omega)^2 + j\omega\omega_0 + \omega_0^2)}$

(ceros: $-100\omega_0, \pm j\omega_0$ Polos: 0 y complejos conjugados con $\zeta = 1/2, \omega_n = \omega_0$)

Para $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \approx - \frac{K100\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \approx 20 \log(K100\omega_0) - 20 \log \omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$

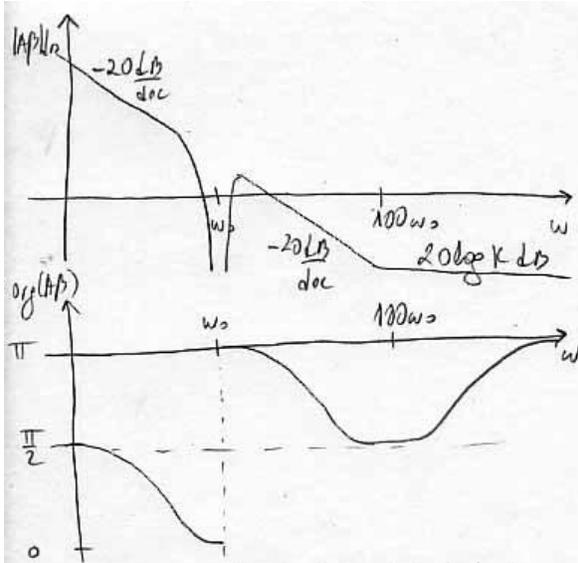
Para $\omega_0 \ll \omega \ll 100\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \approx - \frac{K100\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \approx 20 \log(K100\omega_0) - 20 \log \omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega \gg 100\omega_0 \Rightarrow A\beta(j\omega) \approx -K \Rightarrow \begin{cases} |A\beta|_{dB} \approx 20 \log K \text{ dB} \\ \arg(A\beta) \approx \pi \end{cases}$

Calculamos los límites laterales del argumento cuando $\omega \rightarrow \omega_0$

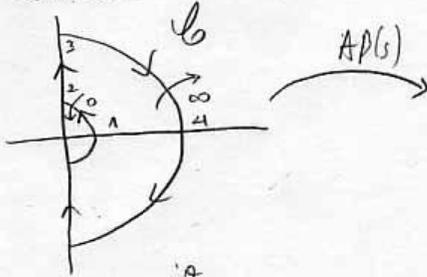
$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} \arg(A\beta) = \pi + 0 + \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} \arg\left(\frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{Hay un salto de } \pi \text{ por el cero en } \pm j\omega_0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} \arg(A\beta) = \pi + 0 + \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} \arg\left(\frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$



2

1) Estudiar la estabilidad según el criterio de Nyquist.



De 1 a 2: $s = re^{j\theta}$ con $r \rightarrow \infty, \theta \in [0, \pi]$
 $\Rightarrow AP(s) \approx -\frac{K \cdot 100}{r e^{j\theta}} = \frac{K \cdot 100}{r} e^{j(\theta - \pi)}$ que
 resulta un arco de circunferencia de π a $\frac{\pi}{2}$
 y de radio infinito

De 2 a 3: uso la información del Bode.

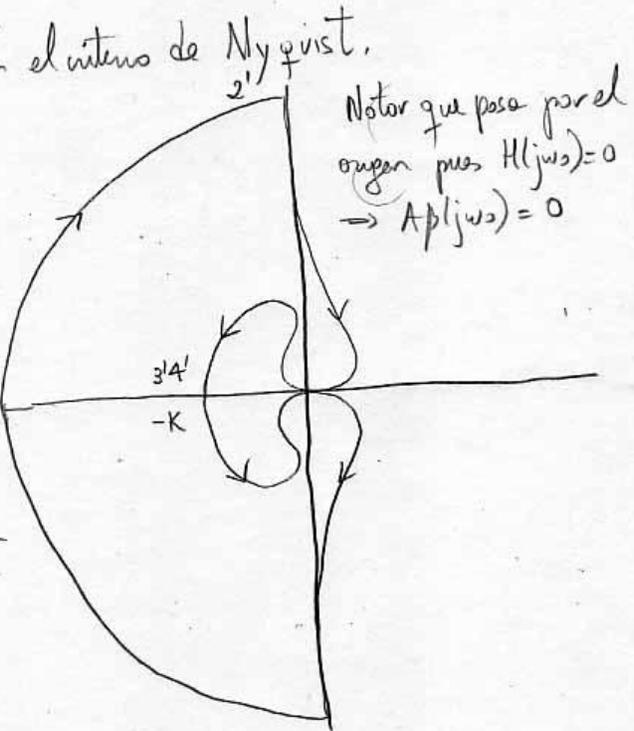
De 3 a 4: se mueve a $-K$

El resto simétrico respecto al eje real.

Para la una \mathcal{C} elegida, $P=0$. Para estabilidad buscamos $N=Z-P=-P=0$

Observamos del diagrama que si $-K < -1 \Rightarrow N=0$ y el sistema es estable.

\Rightarrow Si $K > 1$ es ESTABLE

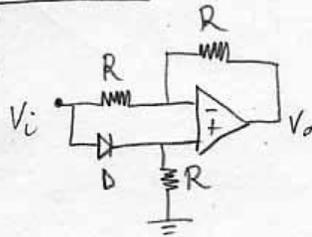


Notar que pasa por el origen pues $H(j\omega_0)=0$
 $\Rightarrow AP(j\omega_0)=0$

Ejercicio 2:

3

a)



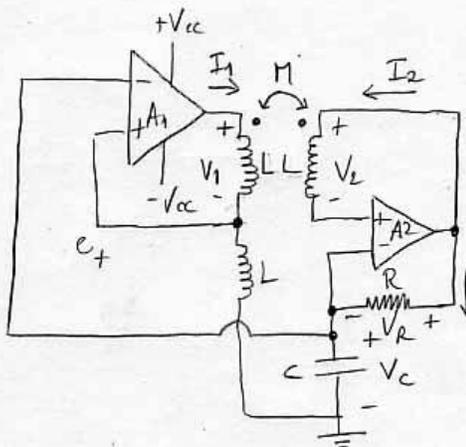
Sea $V_i > 0$ y supongo D ON. Por el cortocircuito virtual tenemos V_i en los pines $+$ y $-$ del operacional. Como no puede circular por la rama superior del circuito (ya que el operacional no toma corriente) $\Rightarrow V_o = V_i$

Verifico el supuesto del diodo: $i_D = \frac{V_i}{R} > 0$

Sea $V_i < 0$ y supongo D OFF. Resulta una configuración inversora $\Rightarrow V_o = -V_i$

Verifico el supuesto del diodo: $v_d = V_i - 0 = V_i < 0 \Rightarrow \boxed{V_o = |V_i|}$

b)



A_1 trabaja en zona no lineal entre niveles $\pm V_{cc}$
 A_2 en zona lineal.

Transformador perfecto $\Rightarrow M = \sqrt{L \cdot L} \Rightarrow M = L$

Sea V_o la tensión de salida de A_2 respecto a tierra y sea V_{out} la tensión de salida de A_1 respecto a tierra.

Notando que $I_2 = 0$ porque A_2 no toma corriente $\Rightarrow V_1 = Ls I_1$ y $V_2 = Ls I_1$

Notando que A_1 no toma corriente, por el divisor de tensiones $\Rightarrow e_+ = \frac{V_{out}}{2}$

Como consecuencia de esto: $V_{out} = V_1 + \frac{V_{out}}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{V_{out}}{2} = V_2$

Reconstruyendo la malla en la etapa de salida: $V_o = V_2 + V_c = \frac{V_{out}}{2} + V_c$

Finalmente tenemos que $V_2 = V_R = RI = RC \frac{dV_c}{dt} \Rightarrow v_c(t) = \frac{1}{RC} \int V_2 dt$

$$\Rightarrow v_c(t) = \frac{1}{2RC} \int V_{out} dt$$

$$v_o(t) = \frac{V_{out}}{2} + \frac{1}{2RC} \int V_{out} dt$$

4

Suponemos en $t=0$ A_1 saturado a $+V_{cc}$ y $v_c(0) = -\frac{V_{cc}}{2}$

$\Rightarrow e_+ = \frac{V_{cc}}{2}$, $e_- = -\frac{V_{cc}}{2}$ y se verifica que A_1 satura a $+V_{cc}$

$$\Rightarrow \boxed{v_c(t) = \left[-\frac{V_{cc}}{2} + \frac{V_{cc}}{2RC} t \right] \gamma(t)}$$

$$\boxed{v_o(t) = \frac{V_{cc}}{2RC} t \gamma(t)}$$

El trazo dura hasta que $v_c(t^*) = e_-(t^*) = \frac{V_{cc}}{2} \Rightarrow t^* = 2RC$

Sea $t' = t - 2RC$ y supongamos A_1 saturado a $-V_{cc}$ y $v_c(0) = +\frac{V_{cc}}{2}$

$\Rightarrow e_+ = -\frac{V_{cc}}{2}$ y $e_- = +\frac{V_{cc}}{2}$ y se verifica que A_1 satura a $-V_{cc}$

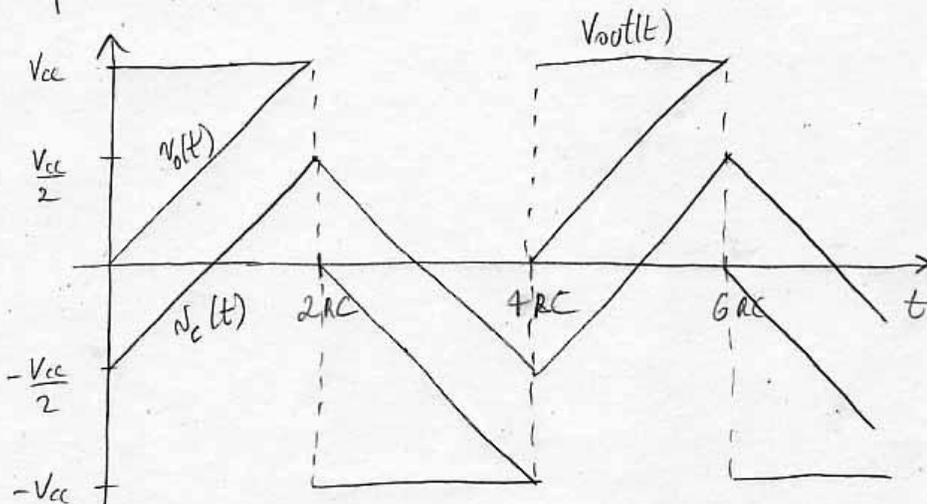
$$\Rightarrow \boxed{v_c(t') = \left[\frac{V_{cc}}{2} - \frac{V_{cc}}{2RC} t' \right] \gamma(t')}$$

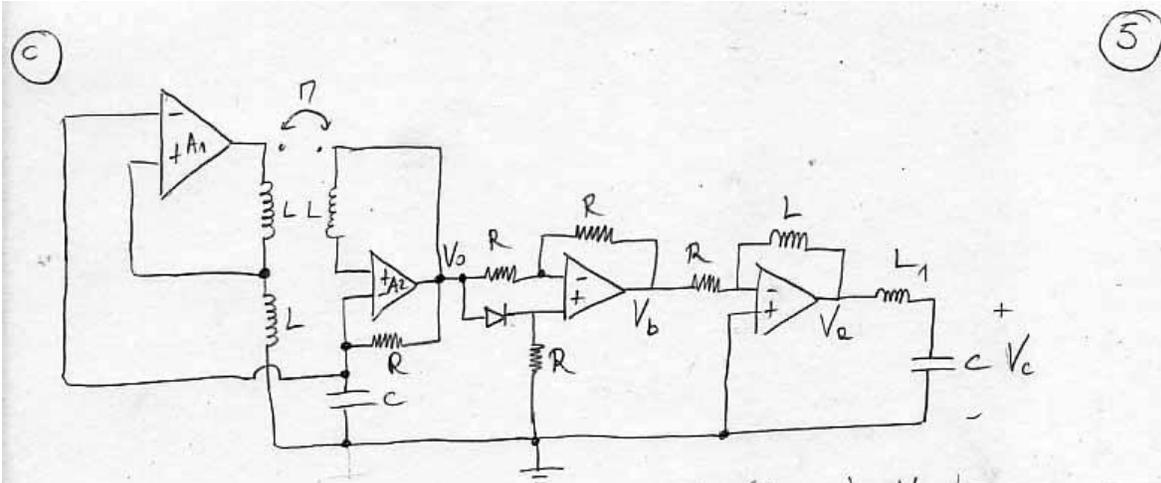
$$\boxed{v_o(t') = -\frac{V_{cc}}{2RC} t' \gamma(t')}$$

El trazo dura hasta que $v_c(t^{**}) = e_-(t^{**}) = -\frac{V_{cc}}{2} \Rightarrow t^{**} = 2RC$

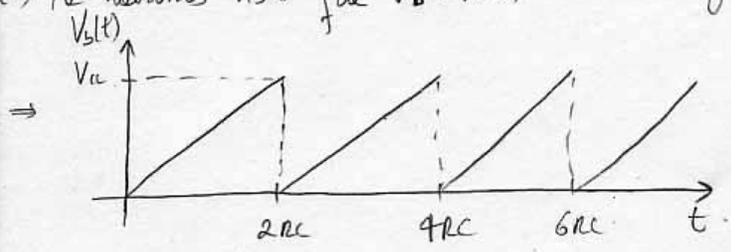
En t^{**} tengo A_1 saturado a $+V_{cc}$ y $v_c(t^{**}) = -\frac{V_{cc}}{2}$ igual que en

$t=0$ por lo que se repite el régimen \Rightarrow El período de v_o y v_c es $4RC$



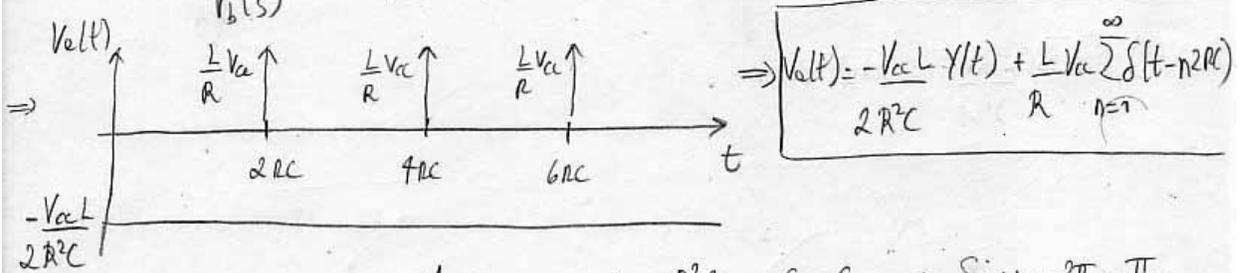


(i) Ya habíamos visto que $V_b = 1V_0$. Usando el gráfico de V_0 tenemos que:



Es un diente de sierra de período $2RC$ como se genera mejor

(ii) $H'(s) = \frac{V_a(s)}{V_b(s)} = -\frac{Ls}{R}$ y resulta un circuito derivador:



(iii) $H''(s) = \frac{V_c(s)}{V_b(s)} = \frac{1/LC_1}{s^2 + 1/LC_1}$, $L_1 = \frac{R^2C}{\pi^2}$, $C_1 = C \Rightarrow$ Si $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{RC}$
 $\Rightarrow \frac{1}{L_1C_1} = \omega_0^2$

$\Rightarrow H''(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$ y por lo tanto la respuesta al impulso es

$h''(t) = \omega_0 \sin(\omega_0 t) Y(t)$

$\Rightarrow v_c(t) = h''(t) * \left(-\frac{V_{cc}L}{2R^2C} Y(t) + \frac{L}{R} V_{cc} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - n*2RC) \right)$

Nota que puede considerarse un sistema lineal porque L_1 y C_1 aparecen desconectados.

$$\omega_0 \sin(\omega_0 t) Y(t) + \left(\frac{-V_{cc} L}{2RC} Y(t) \right) = -\omega_0 \frac{V_{cc} L}{2RC} \int_0^t \sin(\omega_0 \tau) d\tau = \omega_0^2 \frac{V_{cc} L}{2RC} [\cos(\omega_0 t) - 1] Y(t) \quad (6)$$

$$\omega_0 \sin(\omega_0 t) Y(t) + \left(\frac{L}{R} V_{cc} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - n2RC) \right) = \frac{\omega_0 L}{R} V_{cc} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_0 (t - n2RC)) Y(t - n2RC)$$

$$\Rightarrow N_c(t) = \frac{\omega_0^2 V_{cc} L}{2RC} [\cos(\omega_0 t) - 1] Y(t) + \frac{\omega_0 L}{R} V_{cc} \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\omega_0 (t - n2RC)) Y(t - n2RC)]$$