

**Sistemas Lineales 2**  
**Examen, 22 de diciembre del 2003**

**Te solicitamos:**

- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- **resolver problemas diferentes en hojas separadas.**

Se recuerda que la prueba es individual y **dura 3 horas**. No olvides de administrar el tiempo de la mejor manera. Para pasar a la instancia de oral es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

## Ejercicio 1

a) Para el circuito de la Figura 1, con el operacional ideal trabajando en zona no lineal (entre niveles  $\pm V_{cc}$ ), hallar y graficar la salida  $v_o(t)$  referida a tierra y la tensión en el condensador  $v_c(t)$  hasta alcanzar el régimen, si el condensador se encuentra inicialmente descargado y  $v_o(0^+) = +V_{cc}$ . **Justificar claramente todas las hipótesis realizadas sobre los elementos no lineales.**

La resistencia  $R_p$  es un potenciómetro, donde al variar la posición del cursor,  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), varía la resistencia que queda en cada rama. El modelo a utilizar en este problema para una posición cualquiera del cursor,  $x$ , se muestra en la Figura 2.

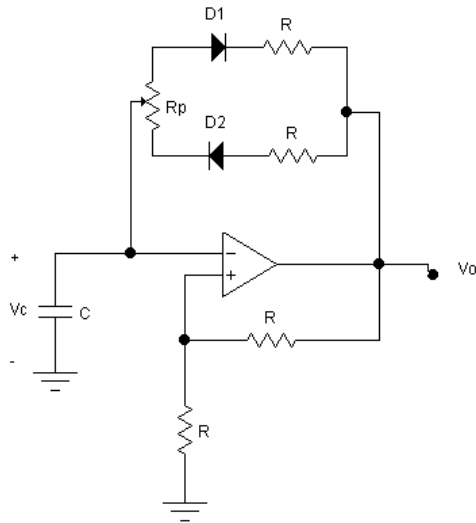


Figura 1

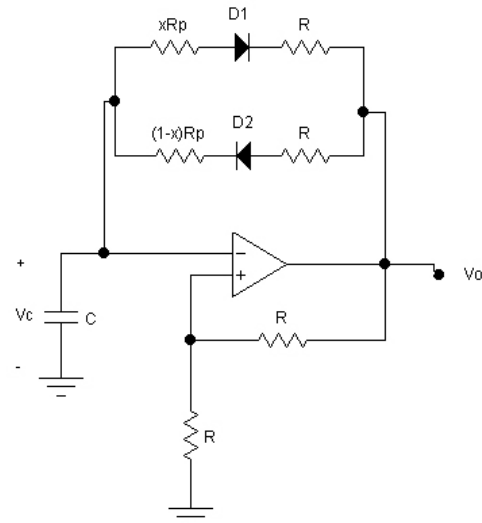


Figura 2

- b)i) Calcular el período  $T$  de  $v_o(t)$ . Verificar que es independiente de la posición del cursor,  $x$ .  
 ii) Se define el ciclo de trabajo de una onda rectangular como el porcentaje del período en el cual la onda se encuentra en su nivel alto, en este caso  $+V_{cc}$ . ( $\text{CicloTrabajo}(\%) = (T_{+V_{cc}}/T) \cdot 100$ ). Calcular en función de  $x$ , el ciclo de trabajo de  $v_o(t)$ .  
 iii) Hallar  $x$  para que la onda sea simétrica. ( $\text{CicloTrabajo} = 50\%$ ).

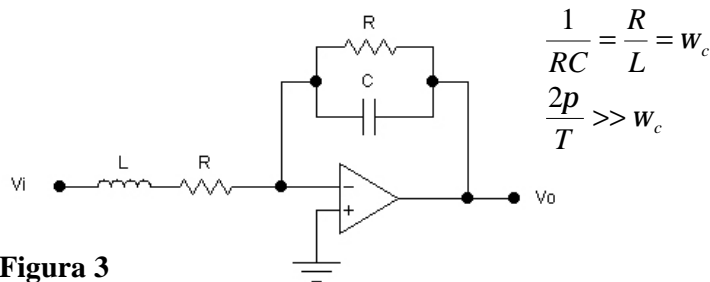


Figura 3

$$\frac{1}{RC} = \frac{R}{L} = w_c$$

$$\frac{2p}{T} \gg w_c$$

- c)i) Hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$  del circuito de la Figura 3 con el operacional ideal.  
 ii) La señal  $v_o(t)$  en las condiciones de la parte b)iii), se inyecta a la entrada  $V_i$ . Hallar de manera aproximada, la salida  $V_o(t)$  en régimen.  
 iii) Cambiaría su respuesta a la parte anterior, si el cursor se encontrase en cualquier otra posición. **Justificar.**

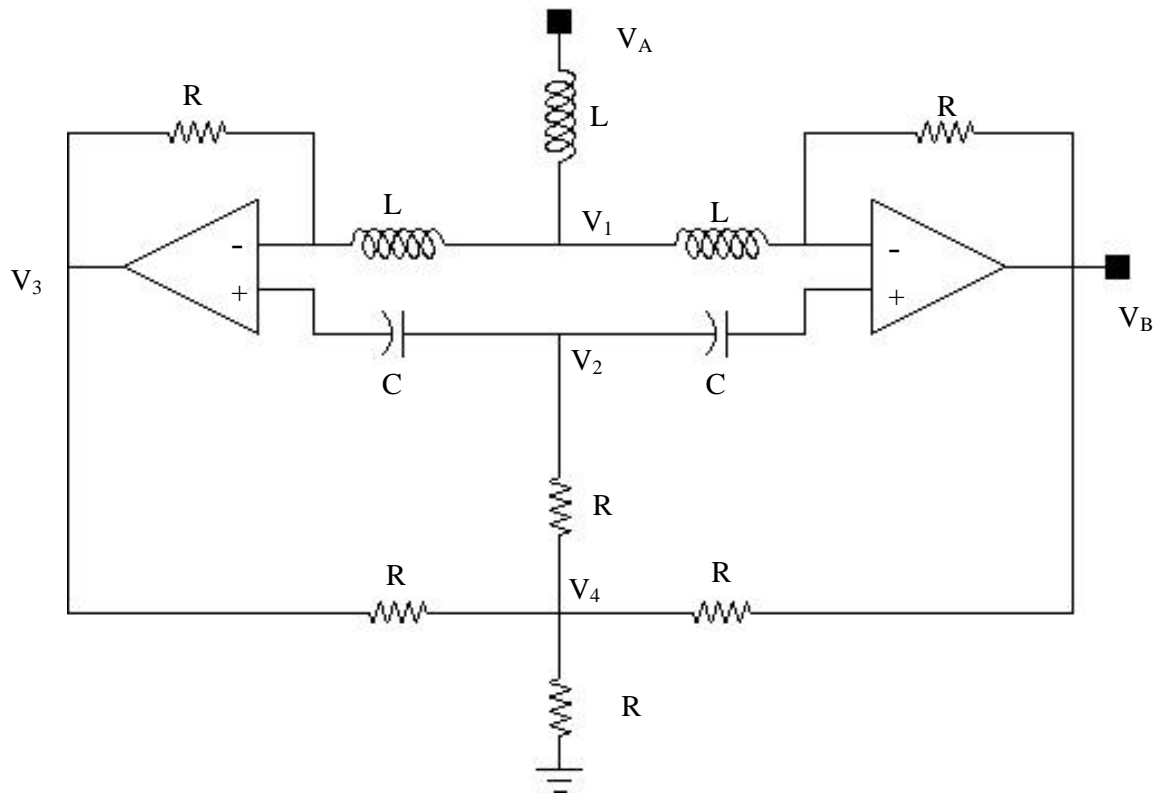
**Ejercicio 2**

figura 1

En este ejercicio los operacionales son ideales y trabajan en zona lineal. Supondremos válidas las siguientes relaciones:

$$\frac{L}{R} = t, \quad RC = 20t$$

- a) En el circuito de la figura 1, hallar la transferencia  $\frac{V_B(s)}{V_A(s)}$ .
- b)
- Hallar la transferencia de lazo abierto  $-Ab(s)$  en el circuito de la figura 2.
  - Realizar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de  $Ab(s)$ .
  - Discutir la estabilidad usando el Criterio de Nyquist.

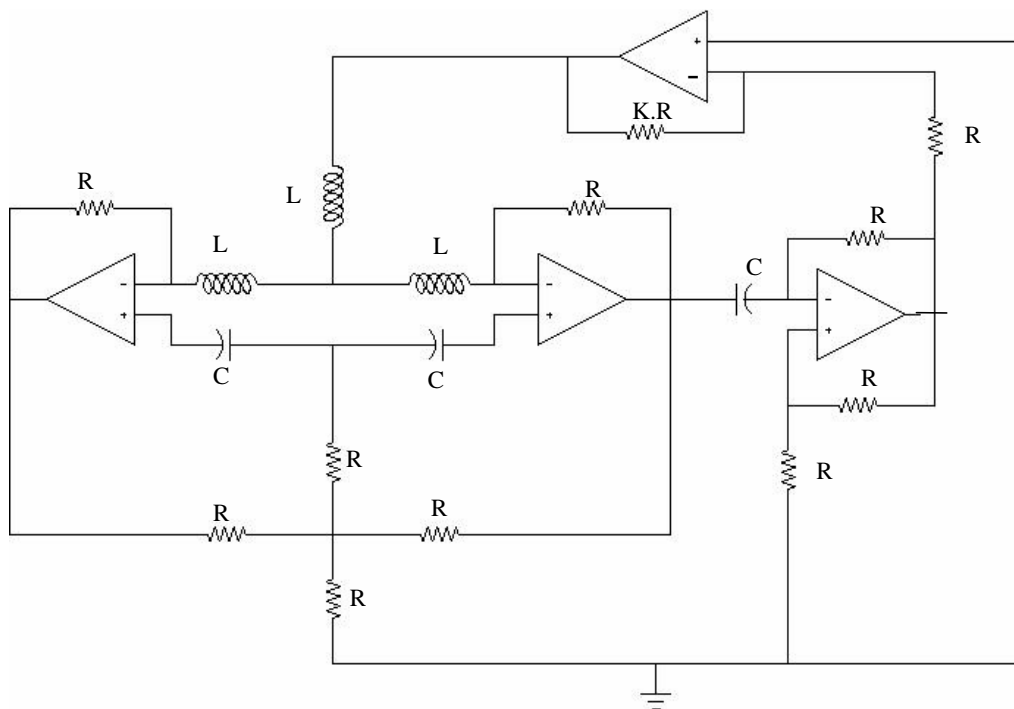


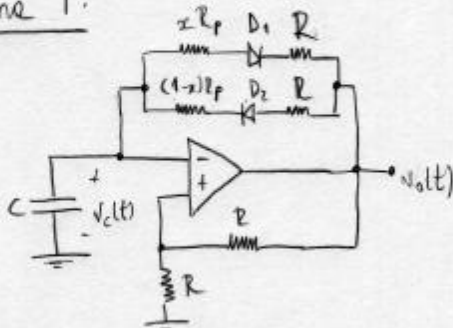
figura 2

## SISTEMAS LINEALES 2: DICIEMBRE 2003

①

## Problema 1:

②



Operacional ideal trabajado en zona no lineal entre niveles  $\pm V_{cc}$ .

Condensador inicialmente descargado y  $v_o(0^+) = +V_{cc}$

Del divisor resistivo, tenemos que  $v_+ = \frac{V_o}{2}$

Estudiamos la evolución del circuito para  $t \geq 0$ : Supongamos  $D_2$  ON y  $D_1$  OFF.

$$v_o(t) = V_{cc} \gamma(t), \quad v_+(0^+) - v_-(0^+) = V_{cc} - 0 > 0$$

Con  $D_1$  cortado y  $D_2$  conducido, el condensador se carga de un valor inicial nulo a un valor final  $+V_{cc}$  con constante de tiempo  $\tau_2 = (R_p(1-x) + R)C$

$$\Rightarrow v_c(t) = V_{cc}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) \gamma(t)$$

Verifiquemos el supuesto acerca de los diodos:

$$v_{D1}(t) = v_c(t) - v_o(t) = -V_{cc} e^{-\frac{t}{\tau_2}} < 0$$

$$i_{D2}(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{C V_{cc}}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} > 0$$

Este comportamiento es válido hasta el instante  $t^*$  /  $v_c(t^*) = \frac{V_{cc}}{2}$  donde conmuta el estado del comparador.

$$\Rightarrow \frac{V_{cc}}{2} = V_{cc}(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau_2}}) \Rightarrow t^* = \tau_2 \ln 2$$

Estudiamos para  $t' = t - t^* \geq 0$ : Supongamos  $D_1$  ON y  $D_2$  OFF

$$v_o(t') = -V_{cc} \gamma(t'), \quad v_+(0^+) - v_-(0^+) = -\frac{V_{cc}}{2} - \frac{V_{cc}}{2} < 0$$

Con  $D_1$  conduciendo y  $D_2$  cortado, el condensador se descarga de un valor inicial  $\frac{V_{cc}}{2}$  a un valor final  $-V_{cc}$  con constante de tiempo  $\tau_1 = (R_{px} + R)C$

$$\Rightarrow v_c(t') = -V_{cc} + \left(\frac{V_{cc}}{2} + V_{cc}\right) e^{-\frac{t'}{\tau_1}} \Rightarrow \boxed{v_c(t') = -V_{cc} + \frac{3V_{cc}}{2} e^{-\frac{t'}{\tau_1}}}$$

Verifiquemos el supuesto acerca de los diodos:

$$i_{D1}(t') = -C \frac{dv_c(t')}{dt'} = \frac{3}{2} \frac{C V_{cc}}{\tau_1} e^{-\frac{t'}{\tau_1}} > 0$$

$$v_{D2}(t') = v_o(t') - v_c(t') = -\frac{3V_{cc}}{2} e^{-\frac{t'}{\tau_1}} < 0$$

Este tiempo es válido hasta el instante  $t^{**}$  /  $v_c(t^{**}) = -\frac{V_{cc}}{2}$  donde conmuta el estado del comparador.

$$\Rightarrow -\frac{V_{cc}}{2} = -V_{cc} + \frac{3V_{cc}}{2} e^{-\frac{t^{**}}{\tau_1}} \Rightarrow \boxed{t^{**} = \tau_1 \ln 3}$$

Estudiamos para  $t'' = t' - t^{**} \geq 0$ : Suponemos  $D_2$  ON y  $D_1$  OFF.

$$\boxed{v_o(t'') = V_{cc} \gamma(t'')}, \quad e_+(0^+) - e_-(0^+) = \frac{V_{cc}}{2} - \left(-\frac{V_{cc}}{2}\right) > 0$$

El condensador se carga del valor inicial  $-\frac{V_{cc}}{2}$  a un valor final  $+V_{cc}$  con constante de tiempo  $\tau_2$

$$\Rightarrow v_c(t'') = V_{cc} + \left(-\frac{V_{cc}}{2} - V_{cc}\right) e^{-\frac{t''}{\tau_2}} \Rightarrow \boxed{v_c(t'') = V_{cc} - \frac{3}{2} V_{cc} e^{-\frac{t''}{\tau_2}}}$$

Verifiquemos el supuesto acerca de los diodos:

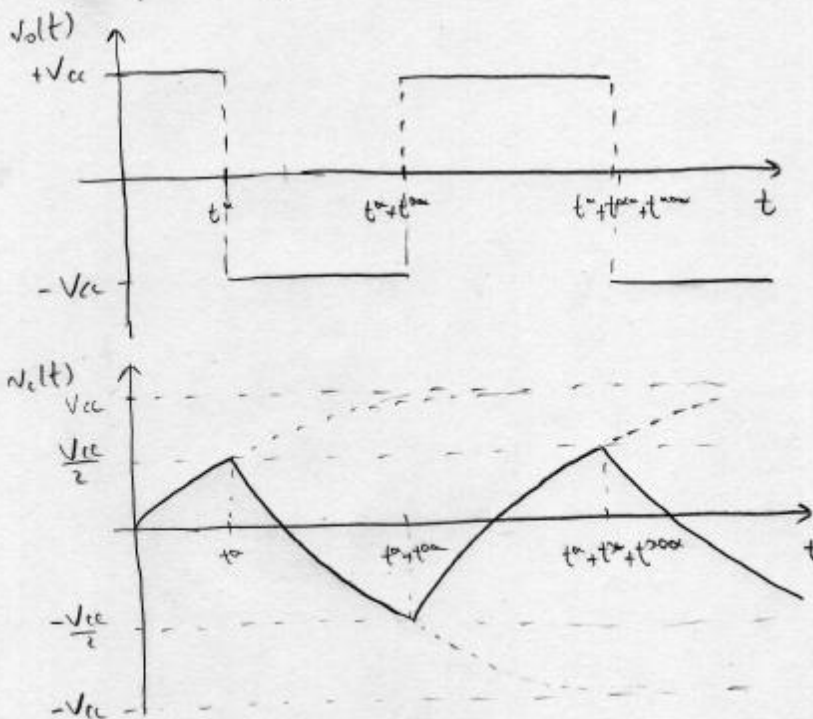
$$v_{D1}(t'') = v_c(t'') - v_o(t'') = -\frac{3}{2} V_{cc} e^{-\frac{t''}{\tau_2}} < 0$$

$$i_{D2}(t'') = C \frac{dv_c(t'')}{dt''} = \frac{3}{2} \frac{C V_{cc}}{\tau_2} e^{-\frac{t''}{\tau_2}} > 0$$

Este tramo es válido hasta el instante  $t^{\text{max}} / v_c(t^{\text{max}}) = \frac{V_{cc}}{2}$  donde cambia el estado del comparador.

$$\rightarrow \frac{V_{cc}}{2} = V_{cc} - \frac{3}{2} V_{cc} e^{-\frac{t^{\text{max}}}{T_2}} \Rightarrow \boxed{t^{\text{max}} = T_2 \ln 3}$$

En este instante el circuito se encuentra en el mismo estado que para  $t = t^{\alpha}$  por lo que alcanzamos el régimen.



$$\textcircled{b} \text{ (i) } T = t^{\alpha} + t^{\beta} = (T_1 + T_2) \ln 3$$

$$T_1 + T_2 = (R_P x + R)C + (R_P(1-x) + R)C = (R_P + 2R)C$$

$$\Rightarrow \boxed{T = (R_P + 2R) \ln 3} \text{ independiente de } x.$$

$$\text{(ii) Ciclo de Trabajo } \left( \frac{t_{+V_{cc}}}{T} \right) \times 100$$

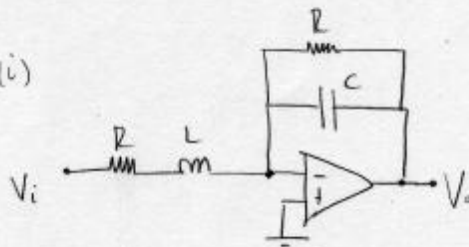
$$t_{+V_{cc}} = T_2 \ln 3 = (R_P(1-x) + R)C \ln 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ciclo de Trabajo } \left( \frac{R_P(1-x) + R}{R_P + 2R} \right) \times 100}$$

(ii) Ciclo de Trabajo  $\gamma(A) = 50\%$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R_f(1-x) + R}{R_f + 2R} \Rightarrow \frac{R_f}{2} = R_f - R_f x \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \text{ que no se esperase por la simetría.}$$

(c) (i)



$$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{\frac{R}{RCs+1}}{R+Ls} = - \frac{2}{(RCs+1)(R+Ls)} = - \frac{\frac{R}{L} \cdot \frac{1}{RC}}{(s + \frac{1}{RC})(s + \frac{R}{L})}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = - \frac{\omega_c^2}{(s + \omega_c)^2}} \quad \text{Pasabajas de segundo orden.}$$

(ii) Se inyecta a la entrada  $V_i$ , la onda cuadrada de período  $T_f$  ciclo de trabajo del 50% generada por el oscilador.

Se cumple la relación  $\omega_c \ll \frac{2\pi}{T_f}$  por lo que en régimen, el filtro sólo dejará pasar la componente de continua de  $V_i$ , y eliminará la fundamental y los armónicos superiores.

Para la onda cuadrada simétrica, el valor medio  $\overline{V_i} = 0 \Rightarrow \boxed{V_o = 0}$

(iii) Si el avance encuentra a cualquier otra posición distinta a  $x = \frac{1}{2}$  la onda cuadrada dejará de tener valor medio nulo, es decir  $\overline{V_i} \neq 0$ . En este caso la salida en régimen aproximada será  $\Rightarrow \boxed{V_o \approx -\overline{V_i}}$

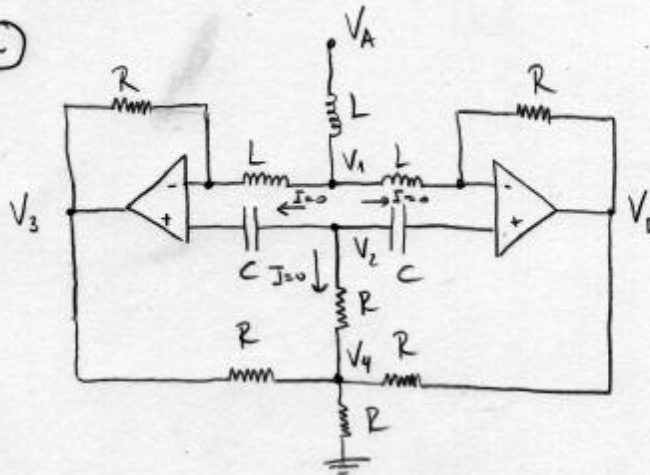
El filtro presenta ganancia unitaria en continua y fase  $\pi$ .



## Problema 2:

(5)

a)



Amplificadores operacionales ideales en zona lineal.

Se cumple:

$$\frac{L}{R} = \tau, \quad RC = 20\tau$$

Por la simetría de la configuración, se tiene que  $V_3 = V_B$

Por los cortocircuitos virtuales,  $e_+ = e_-$  en ambos operacionales.

Como los operacionales ideales no toman corriente, no circula corriente por los condensadores.  $\Rightarrow V_2 = V_4 = e_+ = e_-$

Planteando los ecuaciones de nodos:  $2 \frac{(V_B - V_4)}{R} = \frac{V_4}{R} \Rightarrow V_4 = \frac{2}{3} V_B$  (I)

$$\frac{V_1 - V_4}{Ls} = \frac{V_4 - V_B}{R} \Rightarrow V_1 = V_4 \left( 1 + \frac{Ls}{R} \right) - V_B \frac{Ls}{R} \Rightarrow V_1 = \frac{V_B}{3} \left( 2 - \frac{Ls}{R} \right)$$
 (II)

$$\frac{2(V_4 - V_1)}{Ls} = \frac{V_1 - V_A}{Ls} \Rightarrow V_A = 3V_1 - 2V_4$$

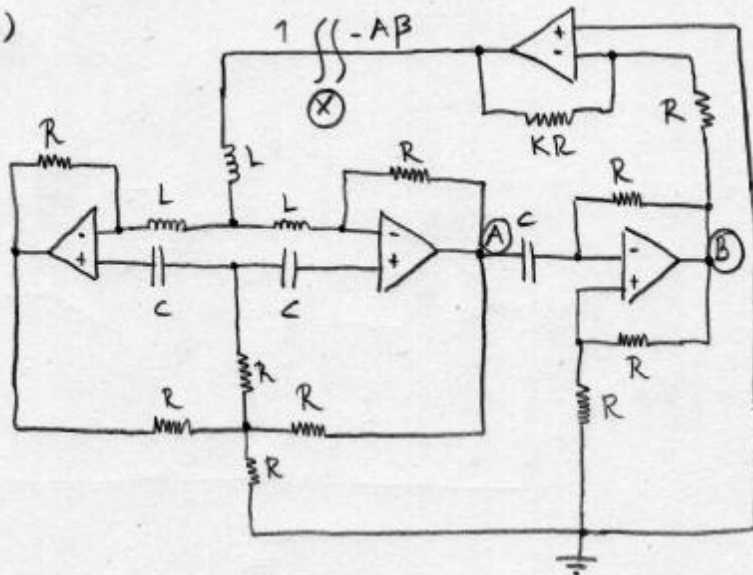
$$\Rightarrow V_A = V_B \left( 2 - \frac{Ls}{R} - \frac{4}{3} \right) = V_B \left( \frac{2}{3} - \frac{Ls}{R} \right)$$

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{3R}{2R - 3Ls}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_o(s)}{V_A(s)} = \frac{-\frac{1}{\tau}}{s - \frac{2}{3\tau}}$$

b) (i)

6



Abro el lazo e injecto una señal unitaria en (X). Se que a la vuelta tengo  $-AB$ .  
Recomiendo el bloque de la parte anterior, en (A) tengo  $H(s)$ .

Se  $V^*$  la tensión en (B). Planteando la ecuación de nodos:

$$(H(s) - \frac{V^*}{2})Cs = -\frac{V^*}{2R} \Rightarrow V^* = \frac{2RCs}{2Cs - 1} H(s).$$

Por lo tanto en (B) tengo  $\frac{2s}{s - \frac{1}{20\tau}} H(s)$ . Finalmente, tras el bloque  
unirémoslo tenemos que  $-AB(s) = \frac{-2Ks}{s - \frac{1}{20\tau}} H(s)$

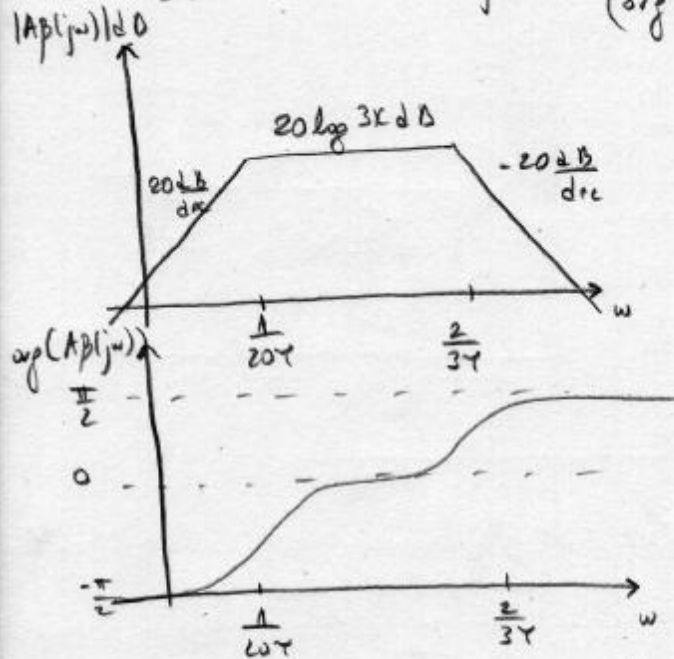
$$\Rightarrow -AB(s) = \frac{2K}{\tau} \frac{s}{(s - \frac{1}{20\tau})(s - \frac{2}{3\tau})}$$

(ii) Realizamos los diagramas de Bode de  $AB(j\omega) = -\frac{2K}{\tau} \frac{j\omega}{(j\omega - \frac{1}{20\tau})(j\omega - \frac{2}{3\tau})}$

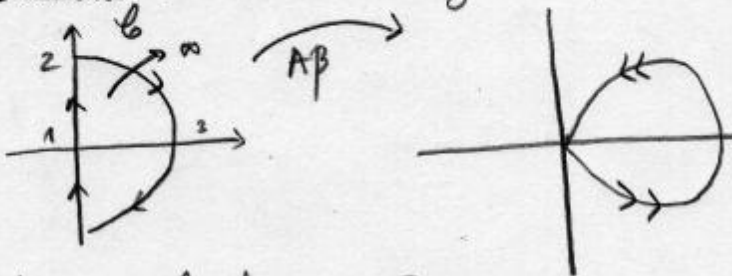
$$\text{Si } \omega \ll \frac{1}{20\tau} \Rightarrow AB(j\omega) \approx -60K\tau j\omega \Rightarrow \begin{cases} |AB(j\omega)| \approx 20 \log 60K\tau + 20 \log \omega \uparrow 0 \\ \arg(AB(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Si } \frac{1}{20\tau} < \omega < \frac{2}{3\tau} \Rightarrow AB(j\omega) \approx 3K \Rightarrow \begin{cases} |AB(j\omega)| \approx 20 \log 3K \downarrow 0 \\ \arg(AB(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

Si  $\omega \gg \frac{2}{3T} \Rightarrow A\beta(j\omega) \approx -\frac{2K}{Tj\omega} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| \approx 20 \log \frac{2K}{T} - 20 \log \omega \text{ dB} \\ \arg(A\beta(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (7)$



(iii) Estudiamos la estabilidad según Nyquist.



Para la curva  $C$  elegida,  $P = 2$

De 1 a 2 usamos la información del Bode.

De 2 a 3 se mapea al origen.

El resto, simetría respecto al eje real.

Para estabilidad  $Z = 0 \Rightarrow N = -P = -2$

Pero  $N = 0 \forall K \geq 0$  pues el Nyquist queda en el semiplano derecho

$\Rightarrow$  Es INESTABLE  $\forall K \geq 0$