Sistemas Lineales 2
Examen, 1 de agosto del 2003

Te solicitamos:

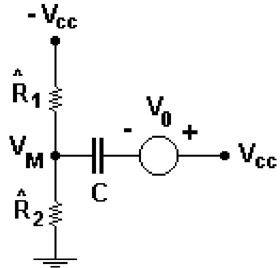
- **poner nombre y apellido** en todas las hojas.
- **recuadrar las respuestas** correspondientes a las distintas partes de los ejercicios.
- **resolver problemas diferentes en hojas separadas**.

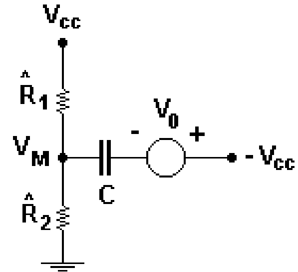
Se recuerda que la prueba es individual y **dura 3 horas**. No olvides de administrar el tiempo de la mejor manera. Para pasar a la instancia de oral es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Sólo se responderán dudas sobre la letra.

Muchas gracias por tu colaboración y buena suerte!!!

Ejercicio 1

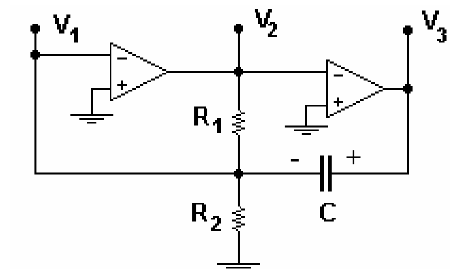
a) Calcular $V_M(t)$ en función de los parámetros V_0 (constante), V_{cc} (constante), $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ y C, en los siguientes circuitos:



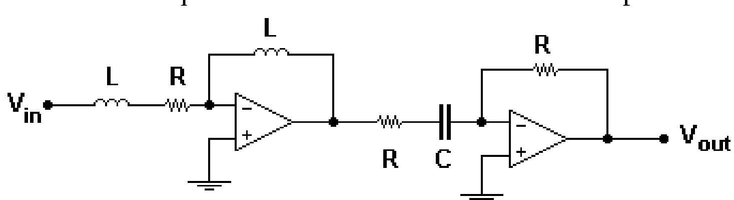


b) i) Hallar y graficar $V_1(t)$, $V_2(t)$ y $V_3(t)$, sabiendo que los operacionales están trabajando en zona no lineal, que $v_0 = -V_{cc}$ (carga inicial del condensador) y que $V_3(t=0) = V_{cc}$. **Justificar las hipótesis realizadas sobre el estado de los comparadores.**

ii) Calcular el periodo T de la señal $V_3(t)$.



c) i) Calcular la transferencia del siguiente circuito (operacionales ideales) y determinar la atenuación en dB que el mismo introduce a una octava por encima de la frecuencia de corte.



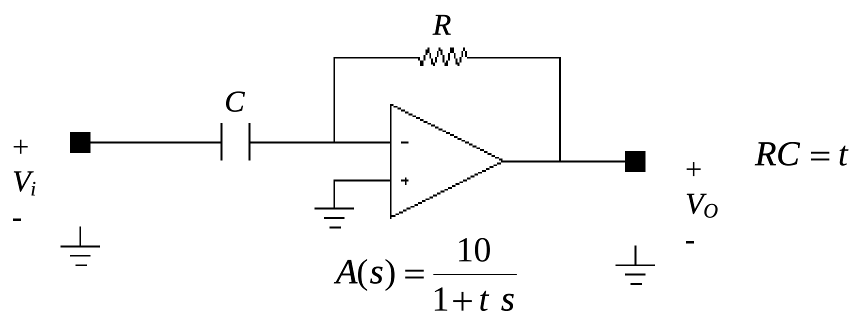
$$\frac{1}{RC} = \frac{R}{L} = w_C$$

ii) Hallar la salida en régimen del circuito anterior, si la entrada es el $V_3(t)$ hallado en parte **b)** y se sabe que $\frac{2p}{T} >> \frac{1}{RC}$.**Justificar**.

Ejercicio 2

a) Hallar la Transformada de Laplace (TdL) de $Y(t).e^{-at}$, con a complejo. Determinar la abscisa de convergencia.

b) Deducir la TdL de $Y(t).f(t) = Y(t).\dfrac{e^{-zw_n t}}{\sqrt{1-z^2}}.\sin\left(\sqrt{1-z^2}\,w_n t\right)$, con $0 < z < 1$, $w_n > 0$.



c) Hallar la transferencia $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$ para el circuito de la figura, donde el operacional tiene impedancia de entrada infinita, impedancia de salida nula y ganancia $A(s) = \dfrac{10}{1+t\,s}$. Verificar que es de segundo orden; hallar z y w_n.

d) Hallar la respuesta del circuito anterior a un escalón de tensión de amplitud *E*.

e) Dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(s)$. Calcular el número $H(jw_n)$.

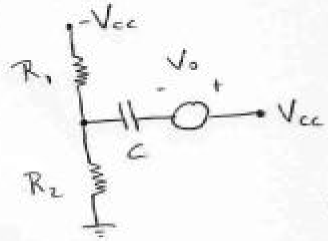
f) Discutir según K real, aplicando el Criterio de Nyquist, la estabilidad en lazo cerrado de un sistema realimentado cuya ganancia de lazo abierto vale $-K.H(s)$. **Justificar.**

SISTEMAS LINEALES 2 : AGOSTO 2003

1

Ejercicio 1:

a)



Planteando la ecuación de nudo:

$$\frac{-\frac{V_{cc}}{s} - V_n}{R_1} = \frac{V_n}{R_2} + \left(V_n + \frac{V_o}{s} - \frac{V_{cc}}{s}\right)Cs$$

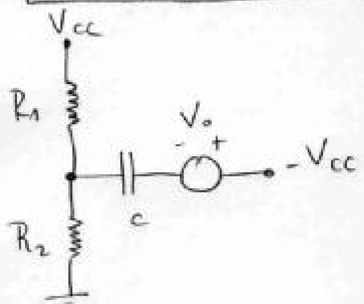
$$\Rightarrow -\frac{V_{cc}}{s} - V_o R_1 C + V_{cc} R_1 C = V_n\left(\frac{R_1+R_2+R_1R_2Cs}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{V_{cc}}{R_1Cs} - V_o + V_{cc} = V_n\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}+s\right)$$

$$\Rightarrow V_n = \frac{V_{cc}}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}+s} - \frac{V_o}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}+s} - \frac{V_{cc}}{R_1Cs\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}+s\right)}$$

Sea $\tau = \frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$

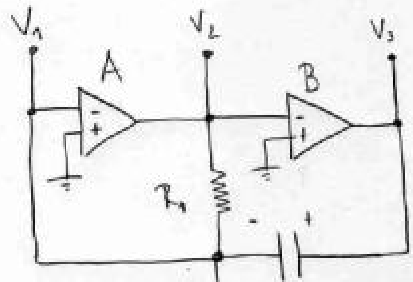
$$\Rightarrow \boxed{v_n(t) = \left[V_{cc}e^{-\frac{t}{\tau}} - V_o e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{R_2}{R_1+R_2}V_{cc}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]Y(t)}$$



Cambiando el signo de V_{cc} en la expresión anterior, se obtiene el resultado:

$$\boxed{v_n(t) = \left[\frac{R_2}{R_1+R_2}V_{cc}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - V_{cc}e^{-\frac{t}{\tau}} - V_o e^{-\frac{t}{\tau}}\right]Y(t)}$$

b) (i)



Ambos operacionales ideales trabajando en zona no lineal entre niveles de $\pm V_{cc}$

Inicialmente, se sabe que $V_o = -V_{cc}$ y $v_3(t=0) = V_{cc}$

Se deduce que $v_2(t=0) = -V_{cc}$ ya que $v_2 = V_{B_-} < V_{B_+} = 0$ para que la salida de B sea V_{cc}. En general se tendrá que $v_3(t) = -v_2(t)\ \forall t$

Estudiemos para $t \geq 0$ $\boxed{v_3(t) = V_{cc}Y(t)}$, $\boxed{v_2(t) = -V_{cc}Y(t)}$

Reemplazando la primer configuración de la parte anterior y notando que $v_1(t) = v_n(t)$

$$\Rightarrow \boxed{v_1(t) = \left[2V_{cc}e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{R_2}{R_1+R_2}V_{cc}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]Y(t)} \quad , v_1(0^+) = 2V_{cc}$$

Los comparadores A y B conmutan para $t = t_1 \,/\, v_1(t_1) = V_{A+} = 0$ ②

$$\Rightarrow \frac{R_2}{\cancel{R_1+R_2}} V_{cc} = V_{cc}\left[\frac{2R_1+3R_2}{\cancel{R_1+R_2}}\right] e^{-\frac{t_1}{\tau}} \Rightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln\left[\frac{2R_1+3R_2}{R_2}\right]}$$

La tensión en el condensador en el instante t_1 es $V_0 = v_3(t_1) - v_1(t_1) = V_{cc}$

Estudiemos para $t' = t - t_1 \geq 0$ $\boxed{v_3(t') = -V_{cc}\,Y(t')}$, $\boxed{v_2(t') = V_{cc}\,Y(t')}$

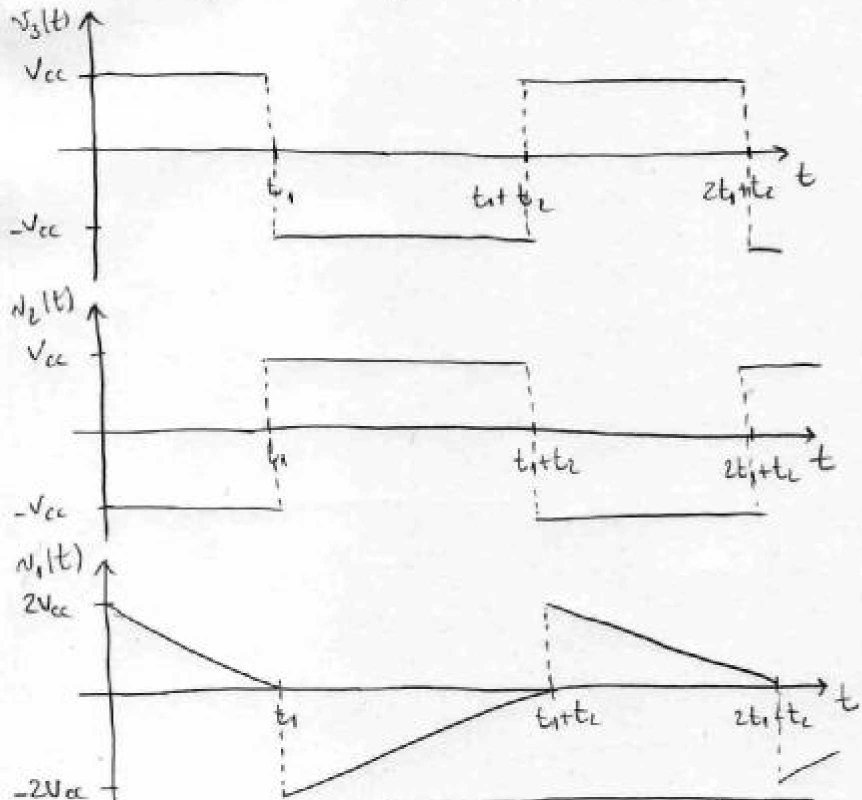
Reconociendo la segunda configuración de la parte anterior se tiene que:

$$\boxed{v_1(t') = \left[\frac{R_2}{R_1+R_2} V_{cc}\left(1-e^{-\frac{t'}{\tau}}\right) - 2V_{cc}\, e^{-\frac{t'}{\tau}}\right] Y(t')} \quad , \; v_1(0^+) = -2V_{cc}$$

Los comparadores A y B conmutan para $t' = t_2 \,/\, v_1(t_2) = V_{A+} = 0$

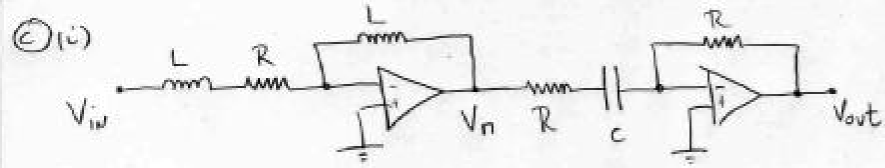
$$\Rightarrow \boxed{t_2 = \tau \ln\left[\frac{2R_1+3R_2}{R_2}\right]}$$

La tensión en el condensador en el instante t_2 es $V_0 = v_3(t_2) - v_1(t_2) = -V_{cc}$ igual que cuando arranque $\Rightarrow$ llegué al régimen.



(ii) $T = t_1 + t_2 \Rightarrow \boxed{T = 2\tau \ln\left[\frac{2R_1+3R_2}{R_2}\right]}$

(c) (i) 3



$\frac{1}{RC} = \frac{R}{L} = \omega_c$

Estudiamos la primera etapa: $\frac{V_n}{V_{in}} = -\frac{Ls}{R+Ls} = -\frac{s}{s+\omega_c}$

Estudiamos la segunda etapa: $\frac{V_{out}}{V_n} = -\frac{RCs}{RCs+1} = \frac{-s}{s+\omega_c}$

$\Rightarrow H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{V_n}\cdot\frac{V_n}{V_{in}} \Rightarrow \boxed{H(s) = \left(\frac{s}{s+\omega_c}\right)^2}$

Pasa altos de segundo orden. Ganancia unitaria en la banda pasante.

$H(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{j\omega+\omega_c}\right)^2 \Rightarrow$ Para $\omega_0 = 2\omega_c \Rightarrow H(j\omega_0) = \frac{-4\omega_c^2}{\omega_c^2(1+2j)^2} = \frac{4}{3+4j} \Rightarrow \boxed{|H(j\omega_0)| = -1{,}93\,dB}$

Se tiene una atenuación de 1,93 dB respecto a la banda pasante a 0dB.

(ii) A altas frecuencias $H(j\omega) \simeq 1 \Rightarrow \boxed{V_{out}(t) = v_s(t)}$

4

Ejercicio 2:

ⓐ $g(t) = Y(t)e^{-at}$, $a \in \mathbb{C}$

De la definición de Transformada de Laplace:

$$G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}\,dt = \frac{1}{s+a}$$

Para la convergencia de la integral impropia, debe verificarse $Re(a+s) > 0 \Rightarrow Re(s) > -Re(a)$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{s+a}\ , \quad \text{con } \sigma_a = -Re(a)}$$

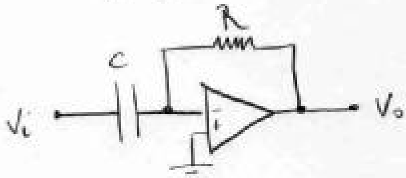
ⓑ $f(t) = Y(t)\dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)$ $\quad 0<\zeta<1,\ \omega_n>0$

Puede reescribirse como $f(t) = Y(t)\left[\dfrac{e^{-(\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} - e^{-(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$

Utilizando la propiedad de linealidad y el resultado de la parte anterior se tiene que:

$$G(s) = \frac{1}{2j\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\frac{1}{s+(\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n} - \frac{1}{s+(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n}\right)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2}\ , \quad \boxed{G(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

ⓒ 

$RC = \tau$

$A(s) = \dfrac{10}{1+\tau s}$

Planteando el nudo: $(V_i - e_-)Cs = \dfrac{e_- - V_o}{R}$

Por otro lado: $-A(s)e_- = V_o \Rightarrow e_- = -V_o\dfrac{(1+\tau s)}{10}$

$$\Rightarrow V_i \tau s = e^-(\tau s + 1) - V_o = -\frac{V_o\left((1+\tau s)^2 + 10\right)}{10}$$

$$\Rightarrow 10\tau s V_i = -V_o(\tau^2 s^2 + 2\tau s + 11)$$

Finalmente: $\boxed{H(s) = -\dfrac{10}{\tau}\dfrac{s}{s^2 + \dfrac{2}{\tau}s + \dfrac{11}{\tau^2}}}$ $\quad \boxed{\omega_n = \dfrac{\sqrt{11}}{\tau} \quad \zeta = \dfrac{1}{\sqrt{11}}}$

(5)

(d) $x(t) = E\,\Upsilon(t)$

$$Y(s) = H(s)X(s) = H(s)\frac{E}{s} \Rightarrow Y(s) = -\frac{10E}{\sqrt{11}}\frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Reconociendo la Transformada de Laplace hallada en partes previas, se deduce:

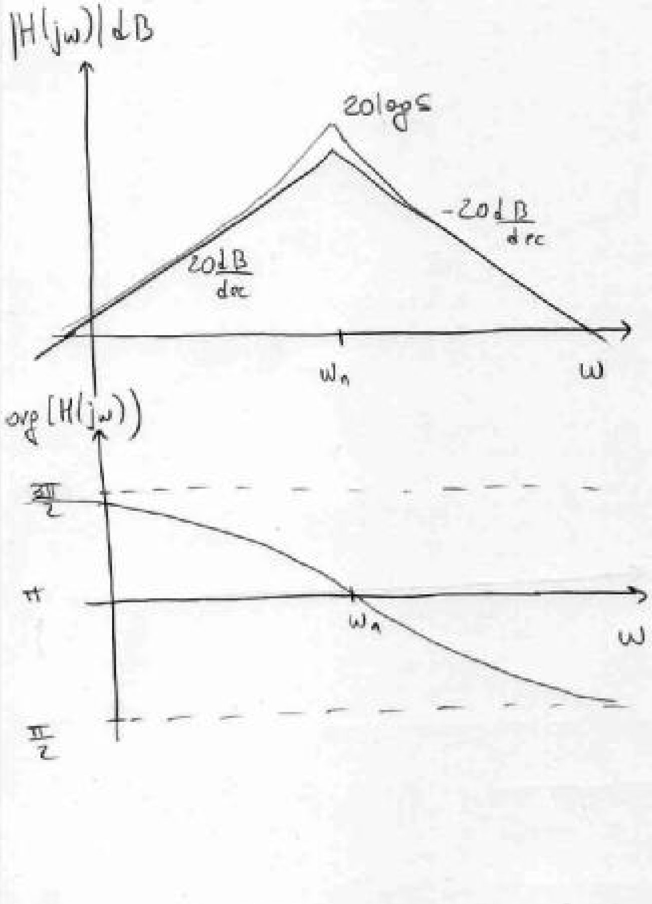
$$y(t) = -\frac{10E}{\sqrt{11}}\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t\right)$$

Usando los valores hallados para ξ y ω_n : $\boxed{y(t) = -\sqrt{10}\,E\,e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\left(\sqrt{10}\,\frac{t}{\tau}\right)\Upsilon(t)}$

(e) $$H(j\omega) = -\frac{10\omega_n}{\sqrt{11}}\frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

Para $\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{10}{\sqrt{11}}\frac{j\omega}{\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \simeq 20\log\frac{10}{\sqrt{11}\omega_n} + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{10}{\sqrt{11}}\frac{\omega_n}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \simeq 20\log\frac{10\omega_n}{\sqrt{11}} - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$



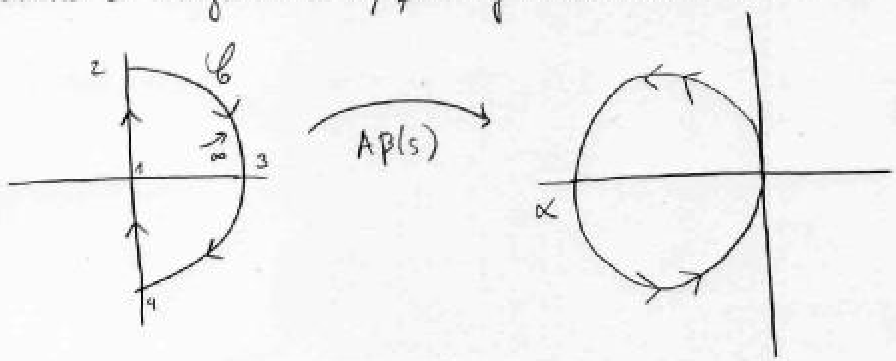
$H(j\omega_n) = -5$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} |H(j\omega_n)| &= 20\log 5 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega_n)) &= \pi \end{aligned}}$$

(6)

(f) $-A\beta(s) = -KH(s) \Rightarrow A\beta(s) = KH(s)$

Resolvemos el Diagrama de Nyquist y vemos cuantas vueltas da alrededor de -1.



Para la curva $\mathscr{C}$ elegida $P = 0$ ya que los polos tienen parte real negativa.

De 1 a 2, uso la información del Bode.

De 2 a 3, se mapea al origen.

El resto, simetrizo respecto al eje real.

Vemos del Nyquist que si $\alpha > -1$, no se da ninguna vuelta alrededor del -1

$\Rightarrow N = Z - P = 0 \Rightarrow Z = 0$ y el sistema es ESTABLE

Pero vemos de la parte anterior que a frecuencia w_m, $H(jw_m) = -5$

$\Rightarrow A\beta(jw_m) = -5K = \alpha \Rightarrow -5K > -1$ por lo que:

Si $\boxed{K < \frac{1}{5}}$ es <u>ESTABLE</u>

Si $\boxed{K \geq \frac{1}{5}}$ es <u>INESTABLE</u>