Examen de Sistemas Lineales 2
25 de julio del 2002

Ejercicio 1

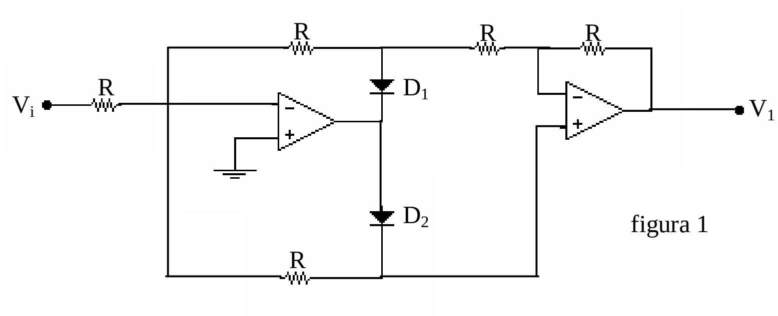


figura 1

a) Verificar que el circuito de la figura 1 entrega a la salida el valor absoluto de la señal de entrada.

b) Hallar la transferencia $H(s)=\dfrac{V_1(s)}{V_i(s)}$ del circuito de la figura 2.

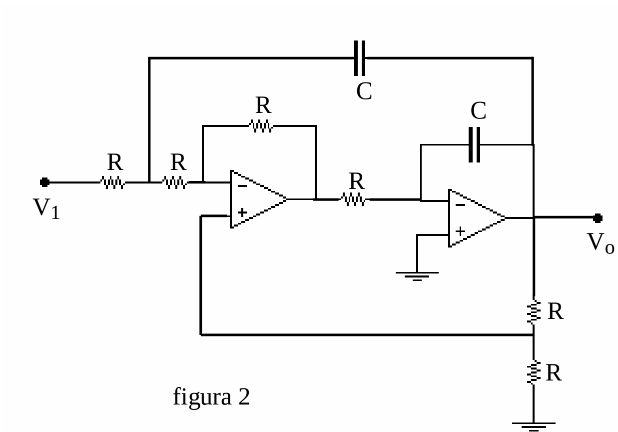


figura 2

c) Considerando que RC=1,

i) realizar los Diagramas de Bode de dicha transferencia.

ii) mostrar que el Diagrama de módulo es monótono decreciente.

iii) hallar la frecuencia para la cual el módulo de la transferencia vale –20db.

d) Hallar la respuesta aproximada en régimen del circuito 2 si a su entrada se conecta la salida del circuito de la figura 1 y a la entrada de éste se inyecta una señal sinusoidal de pulsación 10 rad/s.

Nota: los operacionales son todos ideales.

Ejercicio 2

a) Para el circuito de la figura 1, hallar el equivalente Thevenin.

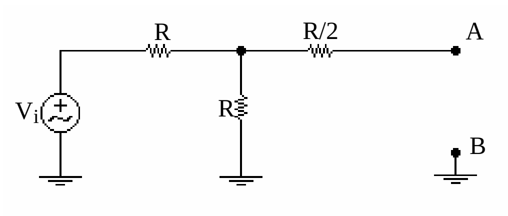


figura 1

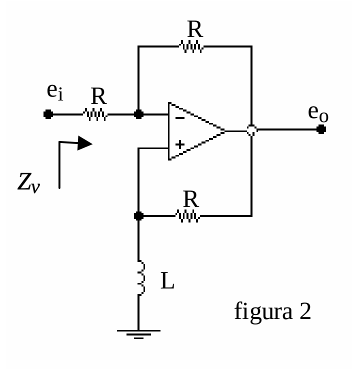


figura 2

b) Hallar la transferencia $G(s)=\dfrac{e_o(s)}{e_i(s)}$ y la impedancia vista indicadas en la figura 2.

c) Hallar la transferencia $H(s)=\dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$ del circuito de la figura 3.

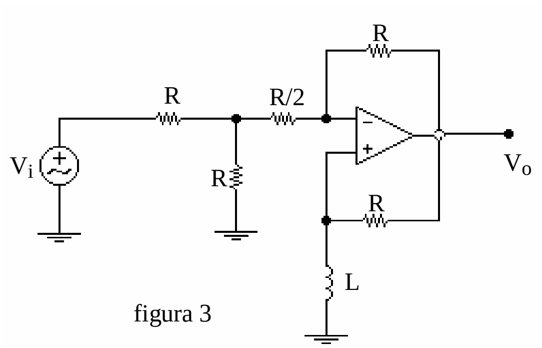


figura 3

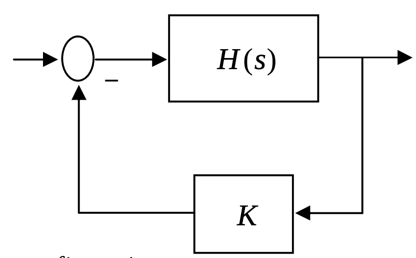


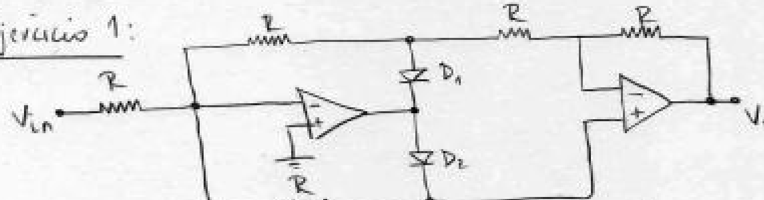
figura 4

d) Utilizando el Criterio de Nyquist, determinar los valores de K real para los cuales el siguiente sistema realimentado de la figura 4 es estable.

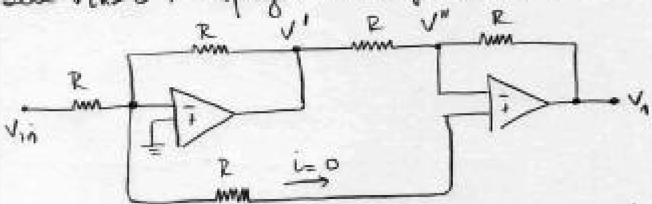
Nota: los operacionales son todos ideales.

SISTEMAS LINEALES 2: JULIO 2002

Ejercicio 1:



Sea $V_{in}>0$. Supongo D_1 ON y D_2 OFF. El circuito que resulta es:



Notar que la corriente por la rama inferior es nula debido al operacional. De las tierras virtuales y lo anterior se tiene que $V''=0$. Planteando las ecuaciones de nudo:

$$\frac{V_{in}}{R} = -\frac{V'}{R} \Rightarrow V_{in} = -V'$$

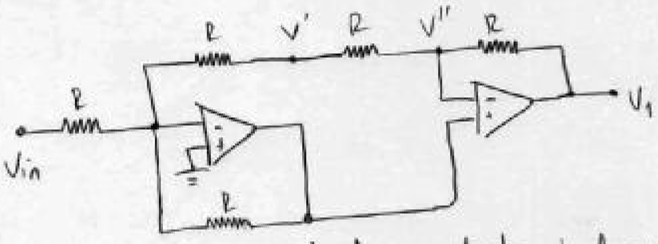
$$\frac{V'}{R} = -\frac{V_1}{R} \Rightarrow V' = -V_1 \Rightarrow \boxed{V_{in} = V_1 \quad \text{si } V_{in}>0}$$

Verifiquemos el supuesto sobre los diodos:

Para D_1: $i_{D1} = \frac{0-V'}{R} + \frac{V''-V'}{R} = -\frac{2V'}{R} = \frac{2V_{in}}{R} > 0$

Para D_2: $v_{D2} = V'-V'' = V' = -V_{in} < 0$

Sea $V_{in} < 0$. Supongo D_1 OFF y D_2 ON. El circuito que resulta es:



Utilizando las tierras virtuales y planteando las ecuaciones de nudo se tiene:

$$\frac{V_{in}}{R} = -\frac{V'}{R} - \frac{V''}{R} \Rightarrow V_{in} = -(V'+V'')$$

$$-\frac{V'}{R} = \frac{V'-V''}{R} \Rightarrow 2V_1 = V_2$$

$$\frac{V'-V''}{R} = \frac{V''-V_1}{R} \Rightarrow V' = 2V''-V_1$$

Finalmente se tiene: $V_{in} = -3V'$, $-3V' = -V_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_{in} = -V_1 \text{ si } V_{in} < 0}$ ②

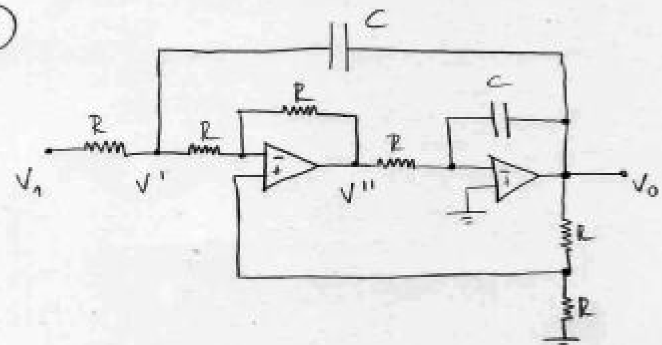
Verifiquemos el supuesto sobre los diodos:

Para D_1: $v_{D1} = V' - V'' = -V' = \frac{V_{in}}{3} < 0$

Para D_2: $i_{D2} = \frac{V''-0}{R} = -\frac{2}{3}\frac{V_{in}}{R} > 0$

Efectivamente observamos que es un rectificador de onda completa.

ⓑ



Del divisor resistivo a la salida se tiene que en la pata + del primer operacional la tensión es $\frac{V_o}{2}$.

Utilizando los tierras virtuales y planteando las ecuaciones de nudo se tiene:

$$\frac{V_1 - V'}{R} = \frac{V' - \frac{V_{out}}{2}}{R} + (V' - V_o)Cs \Rightarrow V_1 = V'(2 + RCs) - V_o\left(\frac{1+2RCs}{2}\right)$$

$$\frac{V' - \frac{V_o}{2}}{R} = \frac{\frac{V_o}{2} - V''}{R} \Rightarrow V' = V_o - V''$$

$$\frac{V''}{R} = -V_o Cs \Rightarrow V' = V_o(1 + RCs)$$

$$\Rightarrow V_1 = V_o\left[(1+RCs)(2+RCs) - \left(\frac{1+2RCs}{2}\right)\right] = \frac{V_o}{2}\left[4 + 6RCs + 2(RCs)^2 - 1 - 2RCs\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{1}{(RC)^2}\frac{1}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \frac{3}{2(RC)^2}}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{RC}$$

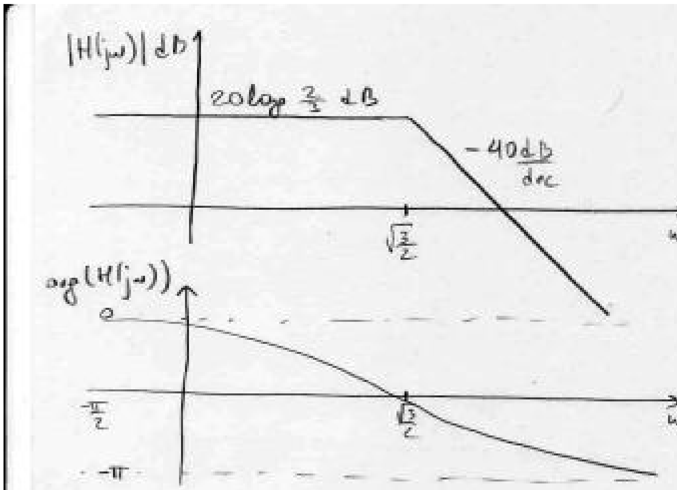
$$\zeta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ⓒ (i) $RC = 1 \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + \frac{3}{2}}$

Para $\omega \ll \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = 20\log\frac{2}{3} \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) = 0 \end{cases}$

Para $\omega \gg \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{1}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = -40\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) = -\pi \end{cases}$

3



$$H\left(j\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \frac{-j}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \left|H\left(j\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\right| = -10\log 6 \text{ dB}$$

$$\arg\left(H\left(j\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$$

(ii) Estudiamos el crecimiento / decrecimiento de $|H(j\omega)|^2 = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}-\omega^2\right)^2+4\omega^2}$

Por lo visto en el Bode bastará con ver que no presenta un máximo para afirmar que es monótono decreciente. De manera equivalente veamos si $h(\omega)=\left(\frac{3}{2}-\omega^2\right)^2+4\omega^2$ tiene o no un mínimo.

$\dfrac{dh(\omega)}{d\omega} = -4\omega\left(\frac{3}{2}-\omega^2\right)+8\omega$ que no se anula para ω positivo.

Por lo tanto efectivamente este sistema de segundo orden no presenta sobreretiro y es monótono decreciente en módulo.

Otra forma: consistirá en recordar que para estos sistemas de segundo orden no hay sobreretiro si el amortiguamiento es tal que $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Esto se verifica en nuestro caso y por lo tanto es monótono decreciente.

(iii) Si $|H(j\omega_0)| = -20\text{ dB} \Rightarrow |H(j\omega_0)|^2 = \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}-\omega_0^2\right)^2+4\omega_0^2}$

$$\Rightarrow \omega_0^4+\omega_0^2-\frac{391}{4}=0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 \simeq 3{,}07\,\frac{rad}{s}}$$

d) $V_{in}(t)=\hat{V}\sin(10t)$

A la salida del rectificador tengo una señal periódica de pulsación $20\frac{rad}{s}=\frac{2\pi}{T'}$

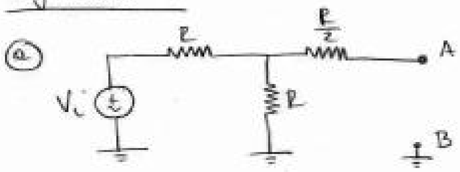
Por lo visto antes, el filtro paso bajos sólo dejará pasar su valor de continua con una ganancia de $\frac{2}{3}$.

Notando que el valor medio de la señal rectificada es $\frac{2\hat{V}}{\pi} \Rightarrow \boxed{V_o(t)\simeq\frac{4V}{3\pi}}$

4

Ejercicio 2:

a)

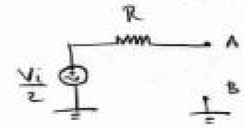


Para el cálculo de Z_{AB} se anula V_i y es inmediato ver que resulta $Z_{AB} = \frac{R}{2} + R/\!/R = R$

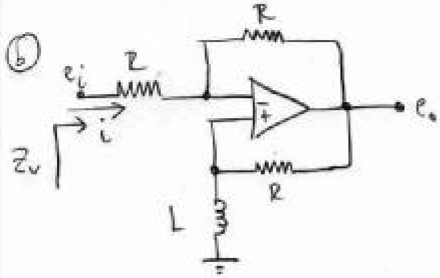
$\Rightarrow \boxed{Z_{AB} = R}$

V_{AB} se obtiene también fácilmente del divisor resistivo $\Rightarrow \boxed{V_{AB} = \frac{V_i}{2}}$

El equivalente visto entre A y B resulta:



b)



De la tierra virtual y el divisor se tiene que

$$e_+ = e_- = \frac{Ls}{R+Ls}\, e_o$$

Planteando el nudo de entrada:

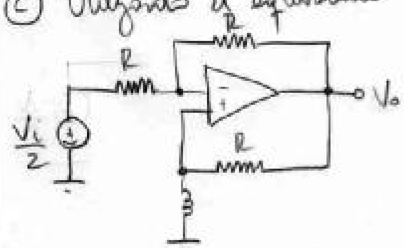
$$\frac{e_i - e_+}{R} = \frac{e_+ - e_o}{R} \Rightarrow e_i = 2e_+ - e_o$$

$$\Rightarrow e_i = e_o\left(\frac{2Ls - R - Ls}{R+Ls}\right) \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{e_o}{e_i} = -\frac{(R+Ls)}{R-Ls}}$$

Para la impedancia vista: $Ri = e_i - e_+ = e_i - \frac{e_i + e_o}{2} = \frac{e_i}{2} - \frac{e_o}{2} = \frac{e_i}{2}\left(1 - H(s)\right)$

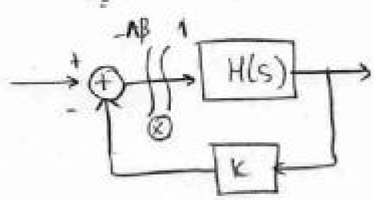
$$\Rightarrow Z_V = \frac{e_i}{i} = \frac{2R}{1-H(s)} = \frac{2\cancel{R}(R-Ls)}{2\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{Z_V = R - Ls}$$

c) Utilizando el equivalente Thevenin queda:



$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{2}\,\frac{R+Ls}{R-Ls}}$$

d)



Abriendo el lazo en x e inyectando una señal unitaria se tiene que: $-A\beta(s) = -KH(s)$

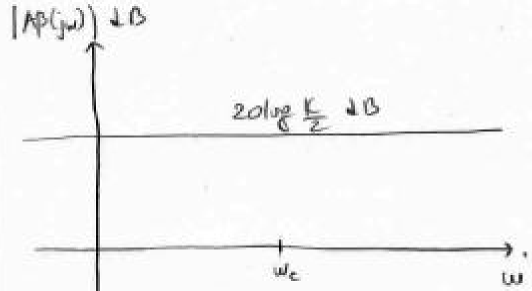
5

Realizamos los Diagramas de Bode asintóticos de $A\beta(j\omega) = K H(j\omega)$

Sea $\omega_c = \frac{R}{L} \Rightarrow A\beta(j\omega) = \frac{K}{2}\,\frac{j\omega+\omega_c}{j\omega-\omega_c}$

Para $\omega \ll \omega_c \Rightarrow A\beta(j\omega) \approx -\frac{K}{2} \Rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| = 20\log\frac{K}{2}\ dB \\ arg(A\beta(j\omega)) \approx -\pi \end{cases}$

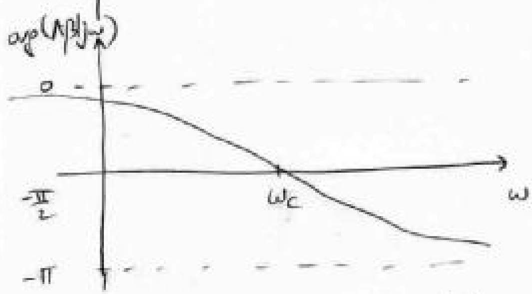
Para $\omega \gg \omega_c \Rightarrow A\beta(j\omega) \approx \frac{K}{2} \rightarrow \begin{cases} |A\beta(j\omega)| = 20\log\frac{K}{2}\ dB \\ arg(A\beta(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$



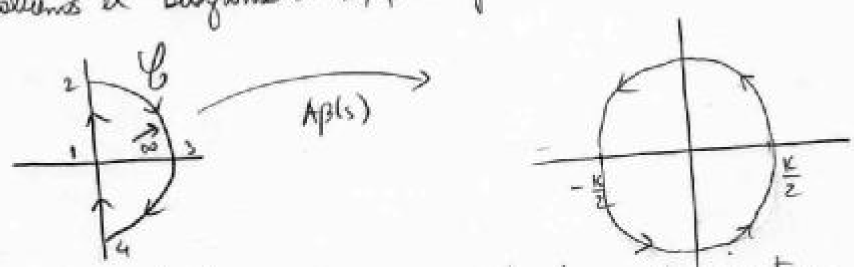
$A\beta(j\omega_c) = \frac{K}{2}\,\frac{j+1}{j-1}$

$\Rightarrow |A\beta(j\omega_c)| = 20\log\frac{K}{2}$ dB

$arg(A\beta(j\omega_c)) = -\frac{\pi}{2}$



Realizamos el Diagrama de Nyquist y vemos cuantas vueltas da alrededor de -1.



Para la curva $\mathcal{C}$ elegida $P=1$ ya que el polo es real y positivo.

De 1 a 2 uso la información del Bode

De 2 a 3 se mapea a $\frac{K}{2}$

El resto simétrico respecto al eje real.

Vemos del Nyquist que si $-\frac{K}{2} < -1$, se da una vuelta antihoraria alrededor del -1

$\rightarrow N = Z - P = -1 \Rightarrow Z = 0$ y el sistema es estable

$\Rightarrow$ Si $\boxed{K>2}$ es ESTABLE