

# Modulación OFDM

Notas del curso Tecnología de Servicios Audiovisuales

Pablo Flores Guridi

4 de noviembre de 2018

## Índice

<b>1. Sistemas OFDM</b>	<b>2</b>
1.1. Fundamentos . . . . .	2
1.2. Modelo continuo . . . . .	3
1.2.1. Transmisor . . . . .	3
1.2.2. Canal . . . . .	3
1.2.3. Receptor . . . . .	5
1.3. Modelo discreto . . . . .	6
<b>Referencias</b>	<b>7</b>

# 1. Sistemas OFDM

Acrónimo de *Orthogonal Frequency-Division Multiplexing*, OFDM es un caso particular de *Multi Carrier Modulation* (MCM). Esta técnica se basa en la transmisión de múltiples portadoras ortogonales, con diferentes secuencias de bits en paralelo. Su historia se remonta a los años 60 cuando R. W. Chang publicó un artículo [1] demostrando los principios detrás de la transmisión de múltiples mensajes simultáneos, a través de un canal lineal de ancho de banda acotado, sin *Inter Symbol Interference* (ISI) o *Inter Channel Interference* (ICI).

En el año 1971 S.B. Weinstein y P.M Ebert [5] introdujeron el uso de la transformada discreta de Fourier (DFT, del inglés *Discrete Fourier Transform*) para realizar tanto la modulación como la demodulación en banda base. Lo interesante de este trabajo es que pudo eliminar el uso de un banco de osciladores ortogonales perfectamente sincronizados, necesarios hasta el momento para lograr las múltiples portadoras ortogonales; aunque imposibles de implementar.

La modulación OFDM es ampliamente utilizada en múltiples sistemas digitales a lo largo de todo el mundo. Tal es el caso de los estándares IEEE802.11a, IEEE802.11g y IEEE802.11n; especificados para conexiones del tipo *Wireless Local Area Network* (WLAN), y comunmente llamados Wi-Fi. Los estándares *Worldwide Interoperability for Microwave Access* (WiMAX) y *Long Term Evolution* (LTE) también utilizan OFDM; así como los estándares de televisión digital terrestre ISDB-T, DVB-T y DVB-T2, que son de especial de interés en este texto, y el estándar de televisión digital por cable DVB-C2. Finalmente, la clásica tecnología de acceso de Internet de banda ancha, *Asymmetric Digital Subscriber Line* (ADSL), también utiliza OFDM para transmitir datos [3].

## 1.1. Fundamentos

Un esquema básico de un sistema OFDM digital se muestra en la figura 1.1. Los bloques *CP* y ~~*CP*~~ denotan la inserción y la supresión de cierto prefijo cíclico que será descrito.

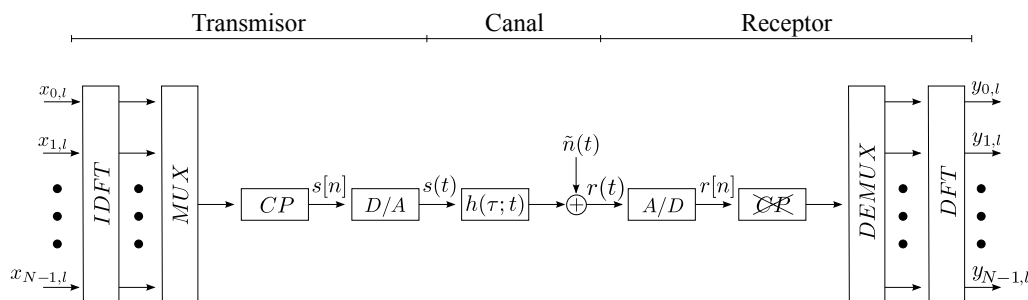


Figura 1.1: Esquema básico de un sistema OFDM [3].

Lo que logra OFDM es dividir el espectro en múltiples subcanales (subportadoras). Como cada uno de estos subcanales es pequeño, es posible asumir que la respuesta en frecuencia del canal radioeléctrico es lo suficientemente plana para cada subportadora. Esto hace a la equalización del canal muy sencilla.

En general, la propagación de la señal desde un punto a otro se realiza por medio de múltiples caminos en simultáneo; y esto provoca cierto desvanecimiento en la señal denominado *multipath fading*, en particular, porque puede generar ISI en el receptor. Para combatir este problema, a todo símbolo OFDM se le agrega un prefijo cíclico (CP del inglés *Cyclic Prefix*), que no es otra cosa que un copia de cierta parte final del símbolo replicada a su inicio. Esto se puede ver en la figura 1.2.

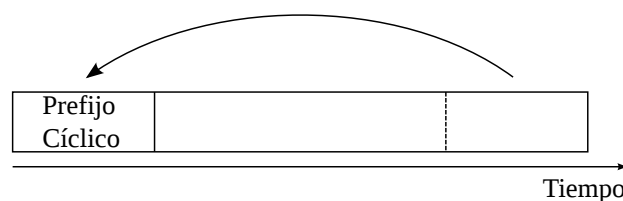


Figura 1.2: El prefijo cíclico es una copia de la última parte del símbolo OFDM [3].

## 1.2. Modelo continuo

Aunque hoy en día los sistemas OFDM son implementados digitalmente, para un primer acercamiento a la teoría detrás de esta tecnología, el modelo ideal, en bandabase y continuo, es presentado en la figura 1.3.

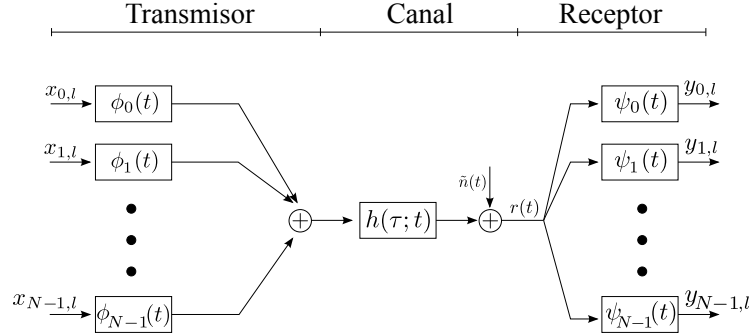


Figura 1.3: Sistema OFDM ideal bandabase y continuo [3].

### 1.2.1. Transmisor

En el transmisor, los valores  $x_{0,l}, \dots, x_{N-1,l}$  son números complejos denominados *constellation points*, que representan tantos bits como lo permita el esquema de modulación utilizado. Por ejemplo, una modulación 16-QAM permite representar 4 bits por *constellation point*. Cada uno de estos números complejos es multiplicado por un pulso rectangular que modula una subportadora, ortogonal a todas las demás. Estas subportadoras multiplicadas por pulsos rectangulares pueden ser expresadas como en la ecuación 1.1.

$$\phi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}} \cdot e^{j2\pi \frac{W}{N} k(t-T_{CP})} & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $T$  es la duración total de un símbolo OFDM incluido el prefijo cíclico,  $T_{CP}$  es la duración de este prefijo cíclico,  $W = \frac{N}{T-T_{CP}}$  es el ancho de banda de toda la señal y  $N$  es la cantidad total de portadoras. Sea  $T_s = T - T_{CP}$  la duración de un símbolo activo, es posible ver que el ancho de banda de toda la señal es en rigor  $W = \frac{N}{T_s}$ , al tiempo que la separación entre portadoras adyacentes vale  $\frac{1}{T_s}$ . Nótese que  $\phi_k(t) = \phi_k(t + \frac{N}{W})$  cuando  $t$  está dentro del tiempo de prefijo cíclico  $[0, T_{CP}]$ .

La señal transmitida, para el símbolo  $l$ -ésimo, puede ser expresada como

$$s_l(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{k,l} \phi_k(t - lT) \quad (1.2)$$

En la figura 1.4 se muestra la formación del espectro de la señal OFDM al sumar la contribución de cada uno de los  $N$  osciladores enventanados.

Finalmente, si se transmite una secuencia infinita de símbolos OFDM, se obtiene

$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} s_l(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x_{k,l} \phi_k(t - lT) \quad (1.3)$$

La señal  $s(t)$  tendrá un espectro como el de la figura 1.5.

### 1.2.2. Canal

Se asume en este punto que la respuesta al impulso del canal físico,  $h(\tau; t)$ , es variable en el tiempo y está restringida a la duración del prefijo cíclico; o sea  $\tau \in [0, T_{CP}]$ . Esta última asunción es posible porque en general la duración del prefijo cíclico es configurable. Basta con tener cierto conocimiento del

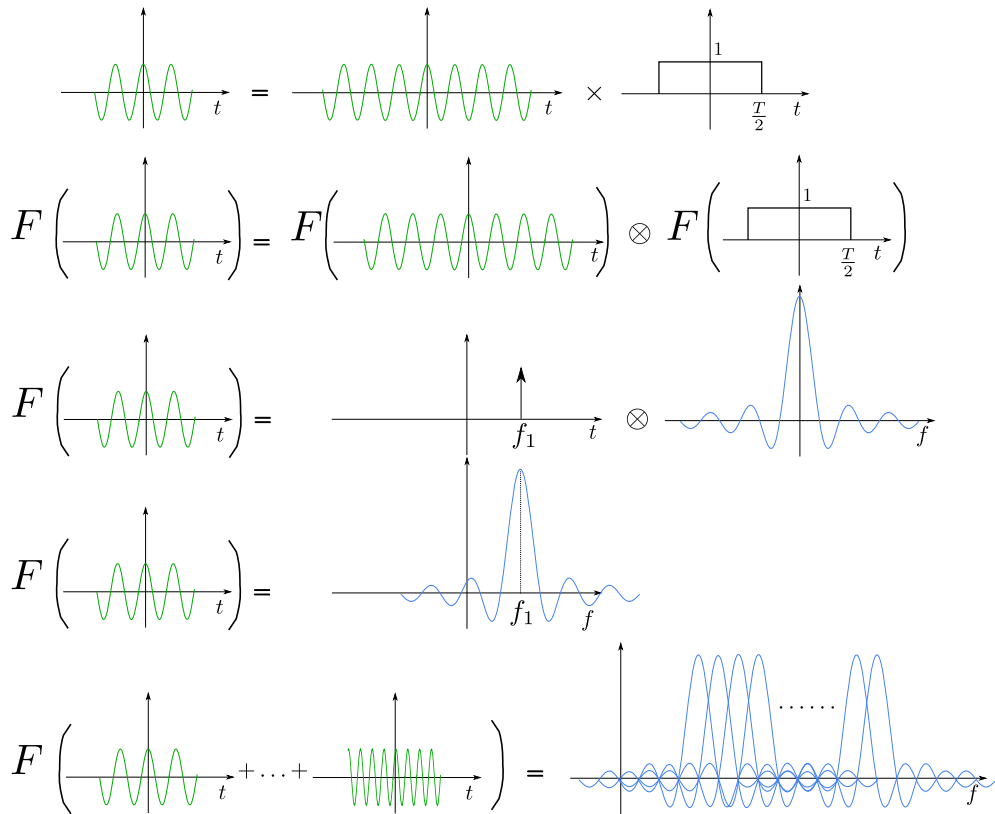


Figura 1.4: Espectro de la señal  $\phi_k(t - lT)$  [2]

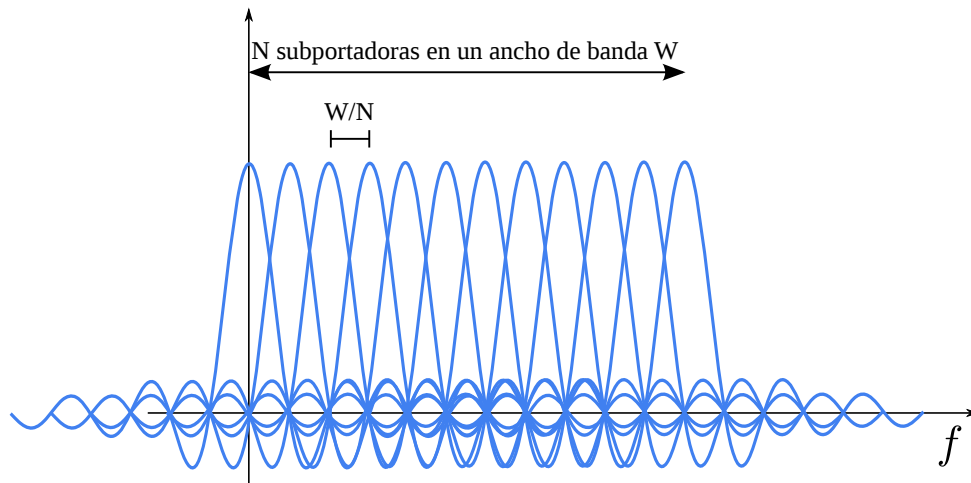


Figura 1.5: Espectro de una señal OFDM con  $N$  subportadoras superpuestas y un ancho de banda  $W$  [3].

canal radioeléctrico para configurar  $T_{CP}$  de manera que esta condición se cumpla. La señal recibida será entonces

$$r(t) = (h * s)(t) + \tilde{n}(t) = \int_0^{T_{CP}} h(\tau; t) s(t - \tau) d\tau + \tilde{n}(t) \tag{1.4}$$

donde  $\tilde{n}(t)$  es ruido blanco y Gaussiano, complejo y aditivo.

### 1.2.3. Receptor

El receptor OFDM consta de un banco de filtros, sincronizado con la última parte de cada símbolo OFDM  $[T_{CP}, T]$ ,

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \phi_k^*(T-t) & \text{si } t \in [0, T - T_{CP}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (1.5)$$

Esto quiere decir que el prefijo cíclico es removido en el receptor. Como se supuso anteriormente, la respuesta al impulso del canal está restringida a la duración del prefijo cíclico; y por lo tanto, al removerlo, la salida del banco de filtros queda libre de toda ISI. De esta manera, es posible realizar un análisis independiente para cada símbolo OFDM. Esto es, trabajar con  $s_l(t)$  en vez de  $s(t)$ . De las ecuaciones (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) se obtiene que la salida del filtro  $k$ -ésimo en recepción es

$$\begin{aligned} y_k &= (r * \psi_k)(t)|_{t=T} = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t)\psi_k(T-t)dt \\ &= \int_{T_{CP}}^T \left( \int_0^{T_{CP}} h(\tau; t) \left[ \sum_{k'=0}^{N-1} x_{k'}\phi_{k'}(t-\tau) \right] d\tau \right) \phi_k^*(t)dt + \\ &\quad \int_{T_{CP}}^T \tilde{n}(T-t)\phi_k^*(t)dt. \end{aligned}$$

Si se asume que la respuesta en frecuencia del canal es constante durante toda la duración del símbolo OFDM, se tiene que  $h(\tau; t) = h(\tau)$ , y por lo tanto

$$y_k = \sum_{k'=0}^{N-1} x_{k'} \int_{T_{CP}}^T \left( \int_0^{T_{CP}} h(\tau)\phi_{k'}(t-\tau)d\tau \right) \phi_k^*(t)dt + \int_{T_{CP}}^T \tilde{n}(T-t)\phi_k^*(t)dt.$$

Como los límites de integración son  $T_{CP} < t < T$  y  $0 < \tau < T_{CP}$ , se puede concluir que  $0 < t - \tau < T$ . Las tres relaciones anteriores aseguran que la siguiente integral está contenida dentro del soporte de  $\phi_k$ , por lo que su cálculo es directo,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_{CP}} h(\tau)\phi_{k'}(t-\tau)d\tau &= \int_0^{T_{CP}} h(\tau) \frac{e^{j2\pi\frac{W}{N}k'(t-\tau-T_{CP})}}{\sqrt{T-T_{CP}}} d\tau = \\ &= \frac{e^{j2\pi\frac{W}{N}k'(t-T_{CP})}}{\sqrt{T-T_{CP}}} \int_0^{T_{CP}} h(\tau)e^{-j2\pi\frac{W}{N}k'\tau} d\tau, \quad T_{CP} < t < T \end{aligned} \quad (1.6)$$

La última integral de la ecuación (1.6) no es otra cosa que la respuesta en frecuencia del canal de radiofrecuencia, evaluada en  $f = k'W/N$ ; o lo que es lo mismo, evaluada en la portadora  $k'$ -ésima. Sea  $H(f)$  la Transformada de Fourier de  $h(\tau)$ ,

$$H_{k'} = H\left(k'\frac{W}{N}\right) = \int_0^{T_{CP}} h(\tau)e^{-j2\pi\frac{W}{N}k'\tau} d\tau \quad (1.7)$$

Utilizando los resultados de las ecuaciones (1.6) y (1.7) es posible simplificar la salida del banco de filtros a la forma

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{k'=0}^{N-1} x_{k'} \int_{T_{CP}}^T \frac{e^{j2\pi\frac{W}{N}k'(t-T_{CP})}}{\sqrt{T-T_{CP}}} H_{k'}\phi_k^*(t)dt + \underbrace{\int_{T_{CP}}^T \tilde{n}(T-t)\phi_k^*(t)dt}_{n_k} \\ &= \sum_{k'=0}^{N-1} x_{k'} H_{k'} \int_{T_{CP}}^T \phi_{k'}(t)\phi_k^*(t)dt + n_k \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como los filtros  $\phi_k(t)$  son ortogonales entre sí,

$$\int_{T_{CP}}^T \phi_{k'}(t)\phi_k^*(t)dt = \int_{T_{CP}}^T \frac{e^{j2\pi\frac{W}{N}k'(t-T_{CP})}}{\sqrt{T-T_{CP}}} \cdot \frac{e^{-j2\pi\frac{W}{N}k(t-T_{CP})}}{\sqrt{T-T_{CP}}} dt = \delta[k-k'],$$

donde  $\delta[n]$  es la función delta de Kronecker.

Finalmente, la salida del banco de filtros,  $y_k$ , puede ser escrita como

$$y_k = H_k x_k + n_k \quad (1.9)$$

donde  $n_k$  es ruido blanco, Gaussiano y aditivo (AWGN).

### 1.3. Modelo discreto

En la figura 1.6 se muestra el diagrama completo de un sistema OFDM enteramente discreto. Véase cómo la modulación y demodulación de las portadoras ortogonales eventanadas temporalmente,  $\phi_k(t)$ , puede reemplazarse por el cómputo de la transformada inversa de Fourier en transmisión (IDFT) y de la transformada de Fourier en recepción (DFT). El efecto del canal se ve representado por una convolución discreta.

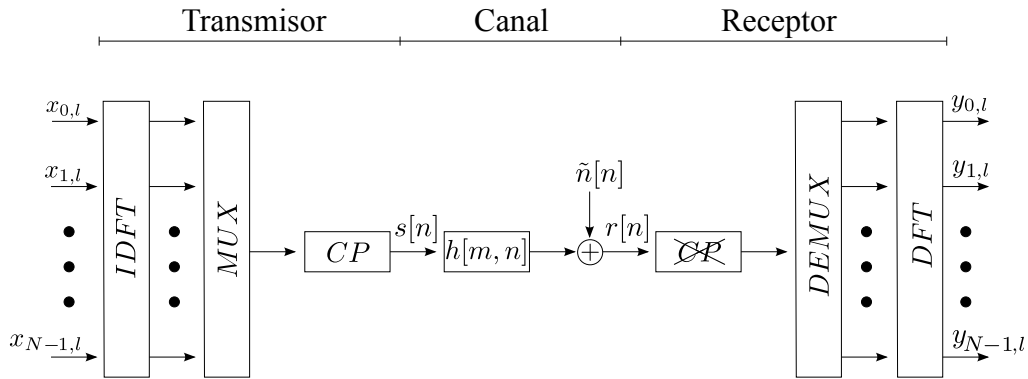


Figura 1.6: Sistema OFDM discreto [3].

Desde el punto de vista del receptor, el uso de un prefijo cíclico más largo que la respuesta al impulso del canal, transforma a la convolución lineal entre el canal y la señal transmitida en una convolución cíclica ( $\circledast$ ). Es posible describir entonces el sistema OFDM según

$$\mathbf{y}_l = DFT(IDFT(\mathbf{x}_l) \circledast \mathbf{h}_l + \tilde{\mathbf{n}}_l) = DFT(IDFT(\mathbf{x}_l) \circledast \mathbf{h}_l) + \mathbf{n}_l$$

donde  $\mathbf{y}_l$  es un vector con los  $N$  puntos recibidos,  $\mathbf{x}_l$  son los  $N$  *constellation points* transmitidos,  $\mathbf{h}_l$  es el vector respuesta al impulso del canal y  $\tilde{\mathbf{n}}_l$  es el ruido introducido por el canal. Siempre durante el símbolo  $l$ -ésimo. El término  $\mathbf{n}_l = DFT(\tilde{\mathbf{n}}_l)$  se considera ruido blanco, Gaussiano y aditivo.

Ocurre sólo para las convoluciones cíclicas que la DFT de la convolución de dos señales es igual al producto de las DFT individuales [4]. Por lo que gracias al prefijo cíclico se logra el siguiente resultado

$$\mathbf{y}_l = \mathbf{x}_l \cdot DFT(\mathbf{h}_l) + \mathbf{n}_l = \mathbf{H}_l \cdot \mathbf{x}_l + \mathbf{n}_l \quad (1.10)$$

donde  $\mathbf{H}_l$  es la respuesta en frecuencia del canal durante el símbolo  $l$ -ésimo.

Sea  $N_{CP}$  la cantidad de muestras al final del símbolo OFDM replicadas al comienzo para lograr el prefijo cíclico. Si se supone que el largo de la respuesta al impulso del canal es exactamente igual a  $N_{CP}$  y se entiende que en un caso real se tienen símbolos concatenados uno detrás del otro, se concluye que las primeras  $N_{CP}$  muestras de  $IDFT(\mathbf{x}_l) \circledast \mathbf{h}_l$  están corrompidas por ISI, asociada a las últimas  $N_{CP}$  muestras del símbolo anterior. De esta manera, la utilización del prefijo cíclico sirve para eliminar la ISI ocasionada por el multicamino.

Sin embargo, los beneficios de agregar un prefijo cíclico tienen un costo no menor: la reducción del bitrate útil es de  $\frac{N}{N+N_{CP}}$ . Resulta entonces importante, para todo sistema OFDM, elegir el largo adecuado del prefijo cíclico para que combata la ISI ocasionada por el multicamino, pero que no reduzca el bitrate útil más de lo necesario. Un buen conocimiento del canal de radiofrecuencia en cuestión es importante para tal fin.

## Referencias

- [1] R. W. Chang. Synthesis of band-limited orthogonal signals for multichannel data transmission. *Bell System Tech. J.*, 45:1775–1796, Dec. 1966.
- [2] Benigno Rodríguez Díaz. *Differential STBC for OFDM Based Wireless Systems*. PhD thesis, Technischen Universität Hamburg-Harburg, 2007.
- [3] Ove Edfors, Magnus Sandell, Jan-Jaap van de Beek, Daniel Landström, and Frank Sjöberg. An introduction to orthogonal frequency-division multiplexing. Technical Report TULEA 1996:16, Luleå University of Technology, 1996.
- [4] Andrea Goldsmith. *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2005.
- [5] S. Weinstein and P. Ebert. Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform. *IEEE Transactions on Communications*, 19(5):628–634, October 1971.