

INTRODUCCIÓN

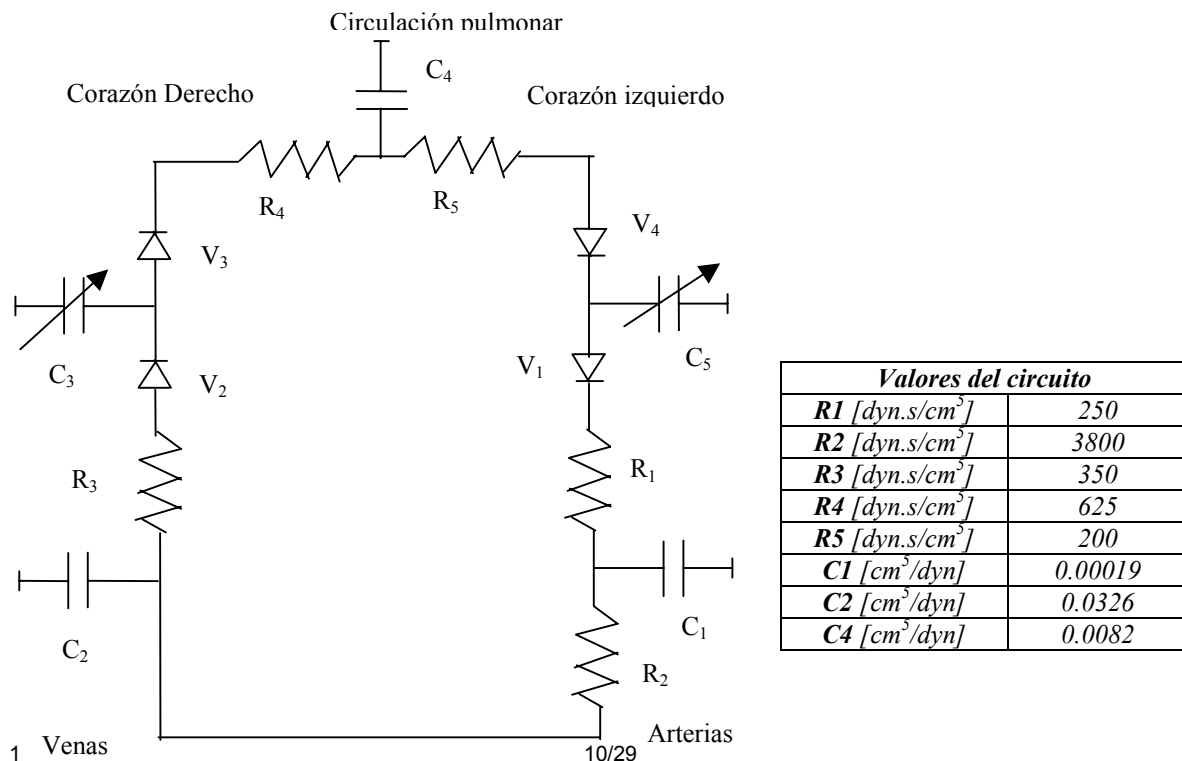
En este trabajo se reproduce el modelo circulatorio de Campbell que acopla el corazón con el sistema vascular y permite establecer relaciones con diferentes parámetros cardíacos como los enunciados en el objetivo. Los programas se realizaron en **MatLab 6.1**. En la sección de discusión y resultados, se expone una breve síntesis de los inconvenientes que se encontraron en la resolución del algoritmo, así como también las simplificaciones y soluciones propuestas.

OBJETIVO

El objetivo del siguiente trabajo es la simulación de las curvas Presión-Volumen del ventrículo izquierdo y verificar cuales son los índices que indican anomalías de funcionamiento cardíaco, o bien, como caracterizar a ventrículo mediante sus funciones de fin de sístole (lineal) y su función de fin de diástole. De esa forma, pueden identificarse parámetros de la curva como son el volumen de fin de sístole, el volumen de fin de diástole, la descarga sistólica, precarga, posgarga, etc.

MODELO MATEMÁTICO

A continuación se presenta el modelo matemático propuesto por Campbell. Puede observarse a los ventrículos como cámaras de complianza variable, el árbol circulatorio como un modelo de Windkessel y las válvulas del corazón como diodos ideales.



El ventrículo izquierdo y el derecho se simulan como cámaras de complianza variable de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C_5(t) = \begin{cases} 0.002 - 0.001875 * \sin\left(\frac{\pi}{0.39} t\right) & 0 \leq t \leq 0.39s \\ 0.002 & 0.39 \leq t \leq 0.62 \end{cases}$$

La compliance del ventrículo derecho será $C_3(t) = C_5(t)/3$.

La parte izquierda del corazón está formada por la válvula mitral V4, la válvula aórtica V1, y una compliance variable C5. La parte derecha del corazón está simulada por la válvula tricúspide V2, la válvula pulmonar V3 y la compliance variable C3. El sistema vascular pulmonar se modela con una compliance con una resistencia al flujo entrante y al flujo saliente.

Para resolver el sistema hay que aplicar el método de nudos. A continuación se observa el desarrollo:

Nodo del capacitor C_1 :

$C_1 \frac{dP_1}{dt} + \frac{P_1 - P_2}{R_2} + \frac{P_1 - P_5}{R_1} V_1 = 0$, de donde se obtiene que la ecuación de estado en C_1 será:

$$\frac{dP_1}{dt} = -\left(\frac{V_1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) P_1 + \frac{P_2}{R_2 C_1} + \frac{V_1}{R_1 C_1} P_5 \quad 1.$$

Nodo del capacitor C_2 :

$C_2 \frac{dP_2}{dt} + \frac{P_2 - P_1}{R_2} + \frac{P_2 - P_3}{R_3} V_2 = 0$, de donde se obtiene que la ecuación de estado en C_2 será:

$$\frac{dP_2}{dt} = -\left(\frac{V_2}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) P_2 + \frac{P_1}{R_2 C_2} + \frac{V_2}{R_3 C_2} P_3 \quad 2.$$

Nodo del capacitor C_3 :

$C_3 \frac{dP_3}{dt} + P_3 \frac{dC_3}{dt} + \frac{P_3 - P_2}{R_3} V_2 + \frac{P_3 - P_4}{R_4} V_3 = 0$, de donde se obtiene que la ecuación de estado en C_3 será:

$$\frac{dP_3}{dt} = -\left(\frac{V_2}{R_3 C_3} + \frac{V_3}{R_4 C_3} + \frac{dC_3/dt}{C_3}\right) P_3 + \frac{V_2}{R_3 C_3} P_2 + \frac{V_3}{R_4 C_3} P_4 \quad 3.$$

Nodo del capacitor C_4 :

$$C_4 \frac{dP_4}{dt} + \frac{P_4 - P_3}{R_4} V_3 + \frac{P_4 - P_5}{R_5} V_4 = 0, \text{ de donde se obtiene que la ecuación de estado en}$$

C_4 será:

$$\frac{dP_4}{dt} = - \left(\frac{V_3}{R_4 C_4} + \frac{V_4}{R_5 C_4} \right) P_4 + \frac{V_3}{R_4 C_4} P_3 + \frac{V_4}{R_5 C_4} P_5 \quad \mathbf{4.}$$

Nodo del capacitor C_5 :

$$C_5 \frac{dP_5}{dt} + P_5 \frac{dC_5}{dt} + \frac{P_5 - P_1}{R_1} V_1 + \frac{P_5 - P_4}{R_5} V_4 = 0, \text{ de donde se obtiene que la ecuación de}$$

estado en C_5 será:

$$\frac{dP_5}{dt} = - \left(\frac{V_1}{R_1 C_5} + \frac{V_4}{R_5 C_5} + \frac{dC_5/dt}{C_5} \right) P_5 + \frac{V_1}{R_1 C_5} P_1 + \frac{V_4}{R_5 C_5} P_4 \quad \mathbf{5.}$$

Si ponemos las ecuaciones **1.** a **5.** en forma matricial obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{P}_3 \\ \dot{P}_4 \\ \dot{P}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 & 0 & f_{15} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & 0 \\ 0 & f_{32} & f_{33} & f_{34} & 0 \\ 0 & 0 & f_{43} & f_{44} & f_{45} \\ f_{51} & 0 & 0 & f_{54} & f_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{6.}$$

donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{11} = -\frac{V_1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1} \\ f_{12} = \frac{1}{R_2 C_1} \\ f_{15} = \frac{V_1}{R_1 C_1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_{21} = \frac{1}{R_2 C_2} \\ f_{22} = -\frac{V_2}{R_3 C_2} - \frac{1}{R_2 C_2} \\ f_{23} = \frac{V_2}{R_3 C_2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_{32} = \frac{V_2}{R_3 C_3} \\ f_{33} = -\frac{V_2}{R_3 C_3} - \frac{V_3}{R_4 C_3} - \frac{dC_3/dt}{C_3} \\ f_{34} = \frac{V_3}{R_4 C_3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{43} = \frac{V_3}{R_4 C_4} \\ f_{44} = -\frac{V_3}{R_4 C_4} - \frac{V_4}{R_5 C_4} \\ f_{45} = \frac{V_4}{R_5 C_4} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_{51} = \frac{V_1}{R_1 C_5} \\ f_{54} = \frac{V_4}{R_5 C_5} \\ f_{55} = -\frac{V_1}{R_1 C_5} - \frac{V_4}{R_5 C_5} - \frac{dC_5/dt}{C_5} \end{array} \right.$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 1 \text{ si } P_5 > P_1 \text{ sino } V_1 = 0 \\
 V_2 &= 1 \text{ si } P_2 > P_3 \text{ sino } V_2 = 0 \\
 V_3 &= 1 \text{ si } P_3 > P_4 \text{ sino } V_3 = 0 \\
 V_4 &= 1 \text{ si } P_4 > P_5 \text{ sino } V_4 = 0
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO

El modelo se implementó mediante el lenguaje de programación MatLab 5.3. En el apéndice se encuentra la definición del algoritmo principal Pres_Vol.m y de la rutina Ec_DifPV.m. se utilizó el método de Runge-Kutta de tercer orden. En el algoritmo principal se realizan los gráficos de las señales y el llamado a la ecuación diferencial dada por la Ec. 6. teniendo presente las condiciones de los diodos ideales.

RESULTADOS DEL MODELO

A continuación se presentan los resultados que se obtienen del modelo al aumentar o disminuir la resistencia periférica de la circulación arterial, dado por la resistencia R_2 y ante variaciones de la compliance C_2 que corresponde a la circulación venosa.

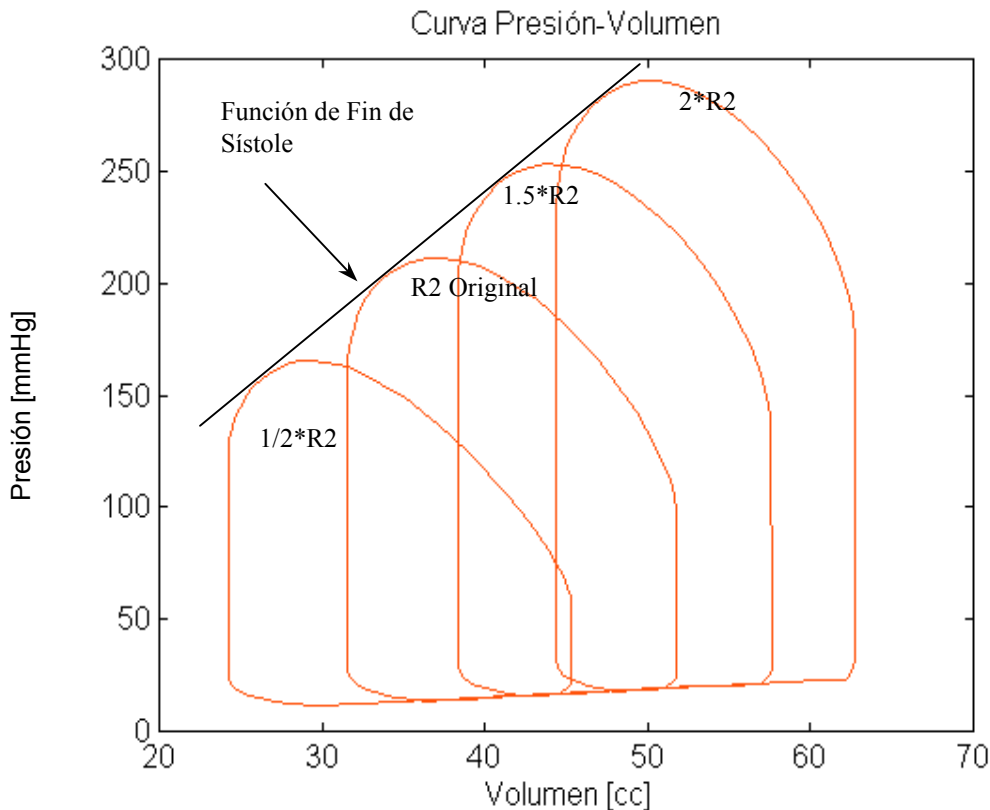


Figura 1. Curva Presión – Volumen en el ventrículo izquierdo ante variaciones de resistencia periférica R_2 .

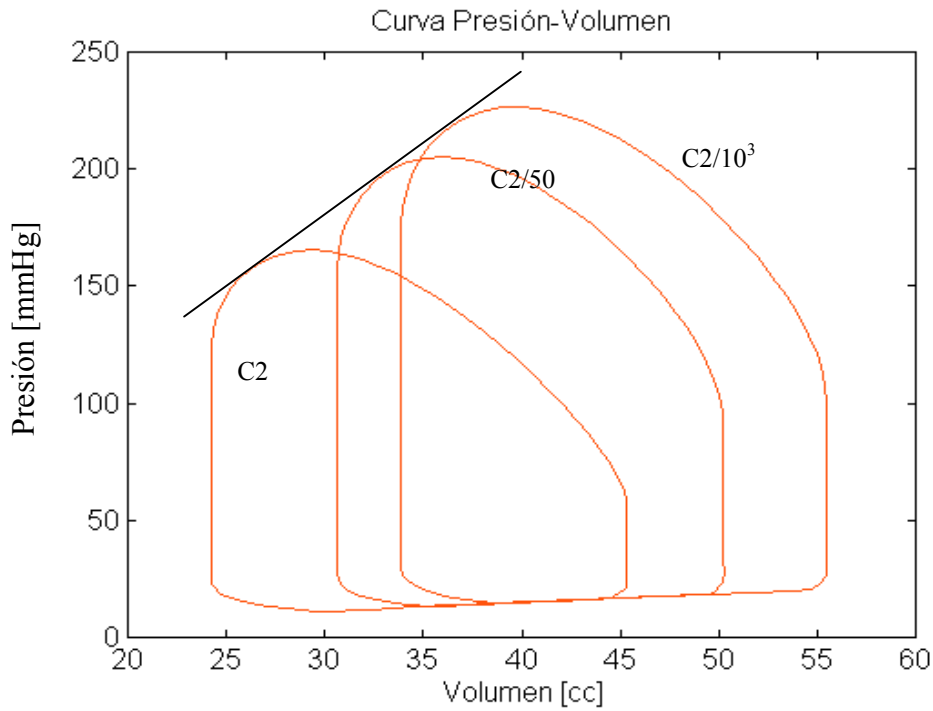


Figura 2: Curvas Presión – Volumen en el ventrículo izquierdo ante variaciones de la compliance C_2

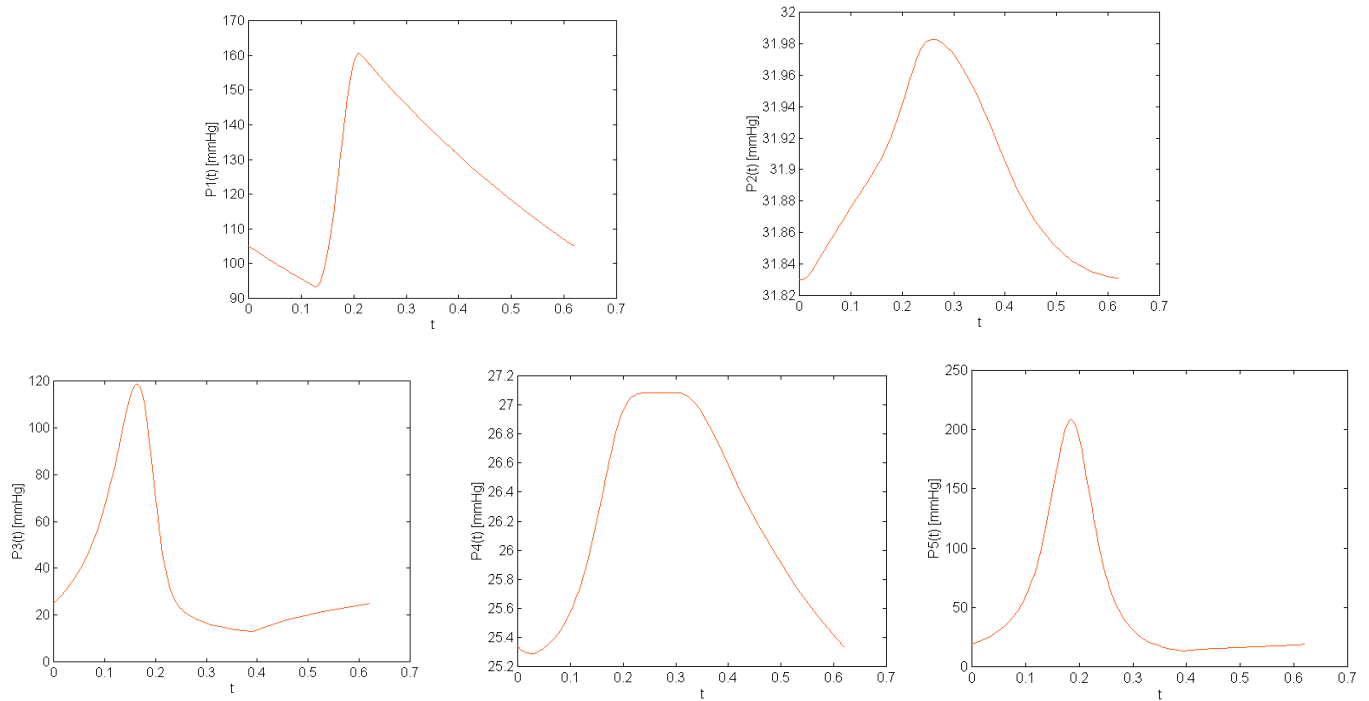


Figura 3. Presiones temporales en cada una de las complianzas del modelo. $P_1(t)$ es la presión en C_1 y $P_5(t)$ es la presión en el ventrículo izquierdo.

La figuras anteriores muestran las relaciones Presión–Volumen para distintas variaciones en el arbol circulatorio como así también las presiones instantaneas en cada 5 compliance del modelo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En la Figura 1 puede observarse la relación Presión–Volumen ante variaciones de resistencia periférica. Observamos que al aumentar la resistencia periférica, aumenta la presión sistólica y el volumen de fin de diástole como así también el volumen de fin de sístole. Por consiguiente, la descarga sistólica permanece casi constante ante aumentos de la resistencia periférica (teóricamente ya que la simulación demuestra que la descarga sistólica disminuye al aumentar la resistencia Periférica, “tener cuidado con este concepto”). Esto puede deberse según el siguiente postulado: los aumentos en la resistencia periférica tienden a aumentar la presión arterial y ventricular (ya que el flujo debe permanecer constante) y al VFS (volumen de fin de sístole). Esto reduce en gran medida DS (descarga sistólica). Sin embargo, debido a la retención de fluido dentro del ventrículo debido a la compliance del mismo, junto con el flujo aproximadamente constante del ventrículo derecho a través de la circulación pulmonar, resulta en un corrimiento de VDF (volumen de fin de diástole). Esto compensa la disminución de DS causado por esa elevación de resistencia periférica.

En la Figura 2, puede observarse la relación Presión–Volumen ante una variación de la compliance venosa. Vemos que al disminuir la capacidad de la red venosa aumenta la presión sistólica, indicando que el sistema está más rígido y en consecuencia provoca un aumento de presión al aumentar la velocidad de la onda de pulso asociada. Por otra parte, si la compliance del sistema aumenta, el sistema se vuelve más compliant con la consecuente disminución de la presión.

Se puede apreciar que el modelo propuesto por Campbell nos permite inferir características del ventrículo izquierdo que son muy útiles en los casos de enfermedades del corazón.

Con respecto a la solución del sistema de ecuaciones diferenciales que modela al sistema, se puede decir que se debieron simular tiempos de los órdenes de 60 o más segundos debido a las grandes constantes del sistema. Es decir, se simularon mas de 100 latidos cardíacos para que la solución de la ecuación diferencial alcance sus valores permanentes.

Por otra parte se presentaron problemas con la elección de las condiciones iniciales del sistema de ecuaciones diferenciales. Esto es debido a que el sistema no tiene una fuente externa que fuerce a la solución permanente, sino que son las compliances variables las que gobiernan el sistema. En consecuencia, es crítica la elección de las condiciones iniciales, ya que dependiendo de ellas, serán las válvulas del corazón que estarán abiertas y como evolucionará el sistema.

Para el caso de la compliance variable del ventrículo izquierdo $C_5(t)$, se tomó una aproximación por una senoidal invertida al modelo en lugar de la compliance propuesta por Campbell. De esta forma se intentó apreciar las soluciones y sus movimientos frente a variaciones de sus parámetros y no la morfología exacta de la señal. A pesar de esa aproximación, pueden verse que las presiones temporales son muy cercanas a la realidad, como por ejemplo la presión en aorta $P_1(t)$, donde se observa la fase sistólica rápida, junto con la relajación de la arteria durante la sístole.

El algoritmo se realizó con **MatLab 6.1** y consta de dos rutinas, una rutina principal que invoca al sistema de ecuaciones de estado