Solución del tercer parcial- 8 de octubre de 2018.

Ejercicio 1

1. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones y $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $\lim_{x\to c} f(x) = a$ y $\lim_{x\to c} f(x) = b$
$$\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = a + b.$$

Queremos probar que
$$\lim_{x\to a} fg(x) = 0;$$
lo cual es equivalente a que:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta$ se cumple que $|f(x)g(x)| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, primeramente g es acotada lo que implica que exite $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$. Por otro lado sabemos que
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$
existe $\delta' > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta'$ se cumple que $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Luego si $x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta'$ se cumple:
$$0 < |f(x)g(x)| = |f(x)|.|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

2. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f(x) \leq \frac{|x^2-16|}{3}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule el siguiente límite.
$$\lim_{x\to 4} f(x)\sin x + \frac{\ln \frac{x-4+e}{e^2} + x^2 + 1}{4x^2}$$

En primer lugar, como la función $0 \leq f(x) \leq \frac{|x^2-16|}{3}$ y que
$$\lim_{x\to 2} \frac{|x^2 - 16|}{3} = 0$$
se cumple que
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$$
y la función $\sin x$ es acotada en $\mathbb{R}$. Concluimos que :
$$\lim_{x\to 4} f(x)\sin x = 0$$

Luego usando la continuidad de la fucnión logaritmo deducimos que:
$$\lim_{x\to 4} \ln \frac{x - 4 + e}{e^2} = \ln \frac{1}{e} = -1$$

Por las propiedades algebraicas de límite se tiene que:
$$\lim_{x\to 4} f(x)\sin x + \frac{\ln \frac{x-4+e}{e^2} + x^2 + 1}{4x^2} = \frac{-1 + 4^2 + 1}{4^3} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 2

1. Enuncie el Teorema de Valor Medio para la integral de funciones continuas.

Teorema del Valor Medio: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

2. Muestre que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x + e^x = 0$$

Probar que existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + e^x = 0$ es equivalente a probar que la función $f(x) = x + e^x$ tiene una raíz. Para esto, veamos que f cumple las hipótesis del teorema de Bolzano:

- f es continua por ser suma de funciones continuas.
- $f(0) = 0 + e^0 = 1 > 0$
- $f(-1) = -1 - e^{-1} < 0$ ya que $e > 1$

por lo tanto, por Bolzano, existe $x \in [-1, 0]$ tal que $f(x) = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Considere la siguiente afirmación:

Si f está acotada entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

Probar o dar un contraejemplo.

La afirmación es falsa y un contraejemplo es la función $f(x) = \sin x$ es acotada y no tiene límite cuando $x \to \infty$:

Considere $L \in [-1, 1]$ existe un $\alpha \in [-\pi, \pi]$ tal que $\sin\alpha = L$ porque el la función $\sin x$ definida en dicho intervalo es sobreyectiva y su imagen igual a $[-1, 1]$. Observe que dado un número muy grande $M > 0$:

Considere $2\pi M + \alpha > M$ se tiene que :

$$\sin(2\pi M + \alpha) = \sin\alpha = L.$$

Ejercicio 3

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = |x^2 - 2x + 3|$$

Estudie la derivabilidad en todos los reales usando la definición.

Estudiando el discriminante de $x^2 - 2x + 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 < 0,$$

concluimos que no tiene raíces reales y por lo tanto su signo es positivo para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) + 3 - x^2 + 2x - 3}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) + 3 - x^2 + 2x - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2xh - 2h}{h} = 2x - 2$$

Por lo tanto podemos afirmar que f es derivable para todo x en los reales.

2. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \cos(\sin(\cos(x)))$$

Justifique la derivabilidad de f en los reales.

Las funciones $h(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ son ambas derivables en los reales y verifican:

$$h'(x) = \cos x \quad \text{y} \quad g'(x) = -\sin x$$

.

Podemos escribir a f como:

$$f(x) = g \circ h \circ g(x).$$

Primeramente como $h \circ g = \sin(\cos x)$ es derivable usando la regla de la cadena y su derivada:

$$(h \circ g)'(x) = h'(g(x)).g'(x) = -\cos(\cos x).\sin x$$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena tenemos que f es derivable en los reales y además por ser composición de funciones derivables en los reales.

$$f'(x) = g'(h \circ g(x)).(h \circ g(x))' = \sin(\sin(\cos x))\cos(\cos x).\sin x$$