Herramientas para el diseño y análisis de redes de transporte urbano de pasajeros

Tema 6: Redes de transporte privado

Redes de transporte privado

- Autos, motos y bicicletas pertenecientes a particulares.
- Auto es el modo más estudiado, dada su importancia en la repartición modal de la mayoría de las ciudades (32% del total de los viajes en el área Metropolitana de Montevideo en 2016).
- En este curso:
  - Modelos descriptivos: equilibrio de usuario para obtener flujos y tiempos de viaje.
  - Normativos: optimización de la red (tiempos de viaje en equilibrio), variando su estructura, capacidad, orientación, señalización y restricciones en general.

Equilibrio en redes de transporte

- Enfoque sistémico para el análisis de redes de transporte urbano.
- Para analizar el efecto de pequeños cambios en el sistema de transporte, es suficiente con aislar la parte afectada y analizarla por separado. Por ejemplo, semáforos en una parte específica de la red.
- Cuando el impacto puede ser más significativo, es necesario adoptar una visión más integral. Por ejemplo, ensanche de una avenida congestionada.
- Cambios en la red alteran el equilibrio entre la oferta (la propia red) y la demanda (viajes que se realizan sobre ella).

Equilibrio en redes de transporte (cont.)

- Equivalencia con la noción física de equilibrio.
- Equilibrio: estado en el cual no hay fuerzas que dirigen el sistema a otro estado.
- Desequilibrio: fuerzas que tienden a dirigir el sistema hacia el equilibrio.
- En transporte: los flujos de viajes sobre la red son llevados al equilibrio mediante el cambio de rutas por parte de los usuarios.

Hipótesis y definiciones

- El tiempo de viaje en todo arco de la red depende del flujo sobre el mismo.
- Existen diferentes pares OD de demanda en la red.
- Para cada par OD existen diferentes caminos desde el origen al destino.
- Los usuarios siempre buscan minimizar su tiempo de viaje (todos son perfectos optimizadores y se comportan igual).
- El flujo en un arco es la suma de los flujos de todos los pares OD que pasan por el mismo.

Hipótesis y definiciones (cont.)

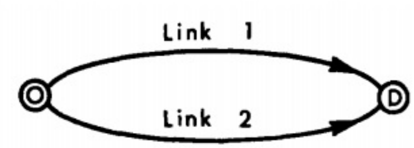
- Cálculo del equilibrio:
  - Entrada: grafo, función de tiempo de viaje de cada arco y matriz origen-destino.
  - Salida: flujo en cada arco.

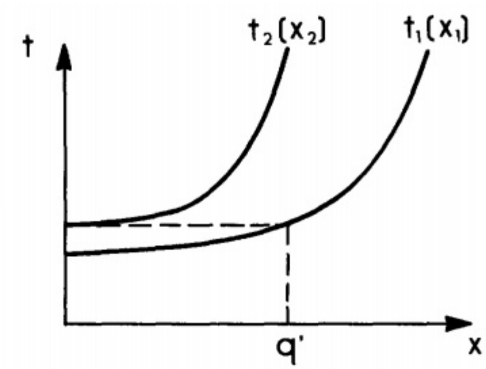
- Condición estable: cuando ningún usuario puede mejorar su tiempo de viaje cambiando unilateralmente de ruta (equilibrio de usuario, UE).

- Notar que:
  - El problema es a nivel de sistema. No se puede analizar por separado a nivel de par OD, arco o camino.
  - El período de análisis debe ser razonable para que el sistema esté en estado estable.

Ejemplo sencillo

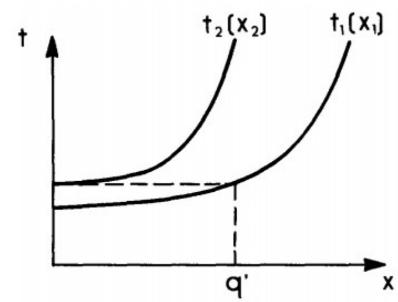
- Un par OD conectado por dos caminos alternativos.
- Sean t_1 y t_2 los tiempos de viaje (funciones del flujo) en los arcos 1 y 2 respectivamente.
- Sean x_1 y x_2 los flujos de tráfico en dichos arcos.
- El flujo total es $q = x_1 + x_2$.





Ejemplo sencillo (cont.)

Asumir que q es muy pequeño. Todos van a usar el arco 1 (menor tiempo de viaje).



- Es una situación de equilibrio mientras $q < q'$. Para $q = q'$, un nuevo usuario puede elegir cualquier arco.

- Si eligió el arco 2, su tiempo de viaje aumentará, por lo que el próximo usuario eligirá el arco 1.

- Más allá de $q = q'$ el equilibrio se mantendrá solo si el tiempo de viaje en ambos arcos es igual.

Ejemplo sencillo (cont.)

- A partir de $q > q'$ ambos arcos serán usados.

- Si los tiempos de viaje no son iguales, algunos usuarios pueden cambiar de camino y disminuir su propio tiempo de viaje.

- El proceso de cambio de camino no ocurrirá más solo si el tiempo de viaje en ambos caminos es igual, no presentando incentivos a los usuarios para cambiarse de camino.

- Las dos caracterizaciones de equilibrio que pueden ocurrir en este ejemplo sencillo (la primera para $q < q'$ y la segunda para $q > q'$) motivan la definición operacional de equilibrio de usuario en redes de transporte.

Equilibrio de usuario (UE)

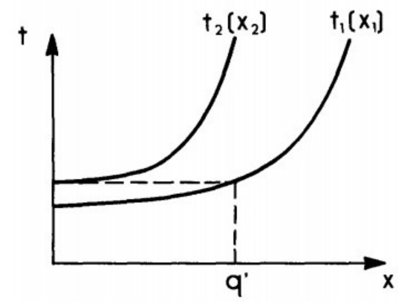
Definición Para cada par OD, en el estado de equilibrio de usuario, el tiempo de viaje en todos los caminos es igual y a su vez menor o igual que el tiempo de viaje que experimentaría cualquier usuario (vehículo) adicional en cualquier camino no utilizado por ningún otro.

Implicancia En equilibrio, los caminos que conectan cada par OD pueden ser divididos en dos grupos:

- Uno que incluye caminos que llevan flujo. El tiempo de viaje en todos es el mismo.
- Uno que incluye caminos que no llevan ningún flujo. El tiempo de viaje en estos caminos es al menos igual o mayor que el de los caminos del primer grupo.

Cálculo del equilibrio

En el ejemplo anterior, intentamos resolver el problema de calcular el equilibrio (flujos en cada arco y tiempo de viaje) para cualquier valor de demanda total q entre origen y destino.



- Si $q < q'$ toda la demanda utilizará el arco 1.

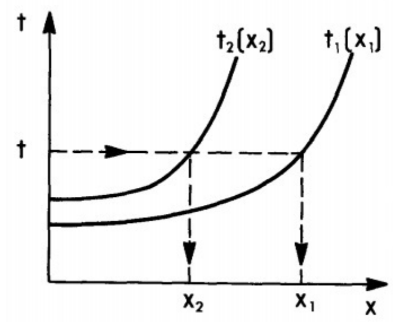
- Se debe asegurar que más allá de $q = q'$ los tiempos de viaje serán iguales.

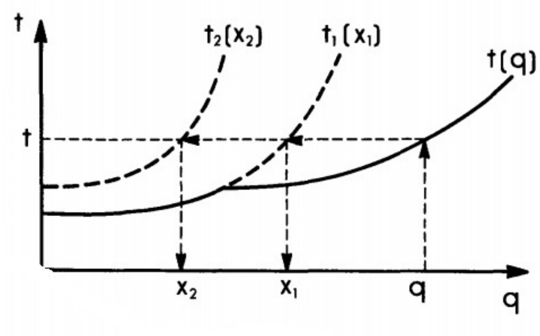
- Si conocemos el tiempo de viaje t, los flujos x_1 y x_2 se encuentran mediante la inversa de las funciones t_1 y t_2 respectivamente (para cualquier valor de t, pero no lo conocemos de antemano).

Cálculo del equilibrio (cont.)

- Nueva función de tiempo de viaje, dependiente de la demanda entre el par OD. Suma horizontal de las curvas t_1 y t_2, asegura que para todo t, su correspondiente flujo q es la suma de los flujos a través de los dos arcos.

- Permite obtener el tiempo de viaje en equilibrio y asegura que para cada valor de tiempo de viaje, el flujo total es la suma de los flujos en los diferentes caminos.





Cálculo de UE utilizando programación matemática

- El método anterior no escala para redes más grandes y estructuradas, y con muchos pares OD.

- Un método alternativo es formular el problema mediante programación matemática.

- Habilita diseñar métodos de cálculo y proporciona un marco para razonar sobre el problema (por ejemplo, unicidad de la solución).

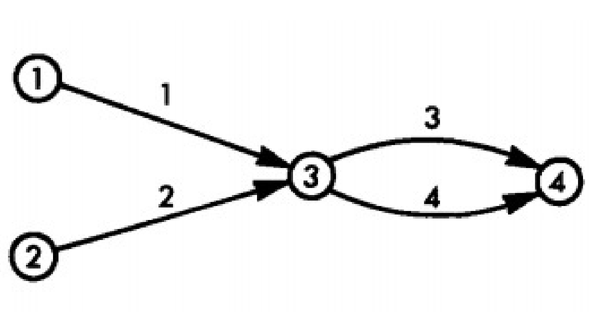
- Se formula un problema de optimización en lugar de plantear y resolver el cumplimiento de varias condiciones.

Notación

- Grafo dirigido $G = (N, A)$, conjunto K de pares OD (con demandas R_k).
- Conjunto de caminos P_k que conectan O_k con D_k.
- Flujo x_a y tiempo de viaje t_a en el arco a.
- Flujo f_p^k y tiempo de viaje c_p^k del par OD k en el camino p.
- Indicatriz δ_{ap}^k si el arco a está en el camino p entre del par OD k.

Notación (ejemplo)

- Tiempo de viaje en caminos: $c_p^k = \sum_a t_a \delta_{ap}^k,\ \forall p \in P_k, k \in K$
- Flujo en arcos: $x_a = \sum_k \sum_p f_p^k \delta_{ap}^k,\ \forall a \in A$



$$
\begin{array}{c}
 \\
 \\
\text{path} \\
\text{link} \\
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{\text{O–D}} & \multicolumn{2}{c}{\text{O–D}} \\ \multicolumn{2}{c}{1\text{–}4} & \multicolumn{2}{c}{2\text{–}4} \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \\
 \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Formulación del UE

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{a\in A} \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega & & (1)\\
\text{s.a.} \quad & \sum_{p\in P_k} f_p^k = R_k & \forall\ k \in K, \qquad & (2)\\
& f_p^k \geq 0 & \forall\ p \in P_k, k \in K, \qquad & (3)\\
& x_a = \sum_k \sum_p f_p^k \delta_{ap}^k & \forall\ a \in A. \qquad & (4)
\end{aligned}
$$

Formulación del UE (cont.)

- La función objetivo (1) establece la minimización de las integrales de las funciones de tiempo de viaje de los arcos.
- La restricción (2) establece conservación de flujo sobre todos los caminos de cada par OD.
- El tiempo de viaje en un arco depende solamente del flujo en el propio arco; la función se asume positiva y creciente.
- El problema (1)-(4) resuelve el UE; ver ejemplo de página 61 y sección 3.2 por más detalles.

Formulación del UE (cont.)

Condiciones de primer orden:

$$
\begin{aligned}
f_p^k(c_p^k - u_k) = 0 &\quad \forall\, p \in P_k, k \in K, \\
c_p^k - u_k \geq 0 &\quad \forall\, p \in P_k, k \in K, \\
\sum_{p \in P_k} f_p^k = R_k &\quad \forall\, k \in K, \\
f_p^k \geq 0 &\quad \forall\, p \in P_k, k \in K.
\end{aligned}
$$

donde u_k es el costo (tiempo de viaje) de los caminos desde O_k a D_k.

Unicidad de la solución

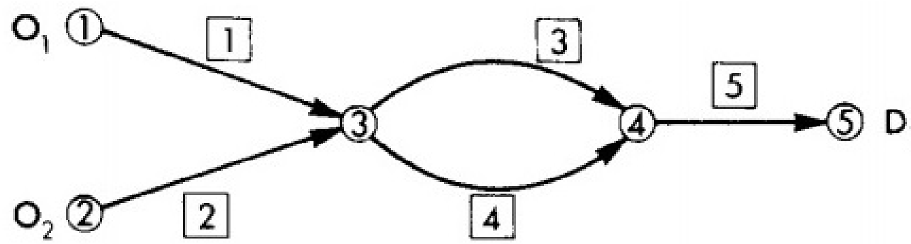
- Relevante a los efectos de la planificación.
- Probar que en el problema de minimización:
  - (i) la función objetivo es estrictamente convexa en un entorno de la solución óptima (y en general).
  - (ii) la región factible (determinada por las restricciones) es convexa.
- (i) se prueba observando que el Hessiano es definido positivo.
- (ii) se prueba observando que las restricciones son todas lineales.

Unicidad de la solución, respecto a flujos en arcos

- Función objetivo $z(\mathbf{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$
- Gradiente $\frac{\partial z(\mathbf{x})}{\partial x_a} = t_a(x_a)$
- Hessiano $\frac{\partial^2 z(\mathbf{x})}{\partial x_a \partial x_{a'}} = \frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_{a'}} = \frac{d t_a(x_a)}{d x_a}$ si $a = a'$ y 0 en otro caso.
- Matriz diagonal de valores positivos, por definición de la función de tiempo.
- Solución es única respecto a flujos en los arcos.

Unicidad de la solución, respecto a flujos en caminos

- La solución no es única respecto a caminos.
- La distribución de flujos del UE puede lograrse a través de diferentes combinaciones de caminos entre los diferentes pares OD.
- Implicandias prácticas: dado un UE, no es posible identificar caminos individuales (a nivel de par OD).
- Ejemplo sencillo con dos pares OD, conectados por dos caminos cada uno.
- Equilibrio: $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 3; x_4 = 2; x_5 = 5.$



Link Volume / Delay Curves

$t_1 = 1$
$t_2 = 2$
$t_3 = 2 + x_3$
$t_4 = 1 + 2x_4$
$t_5 = 1$

O - D Trip Rates

$q_{15} = 2$

$q_{25} = 3$

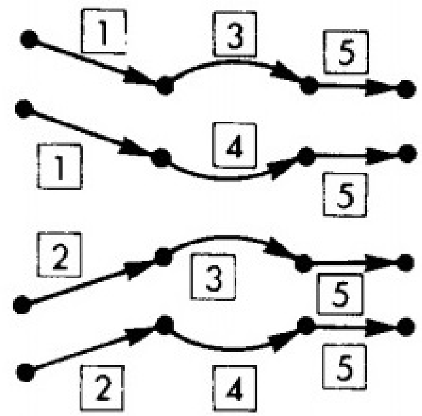
Path numbering

O - D 1 → 5, Path 1

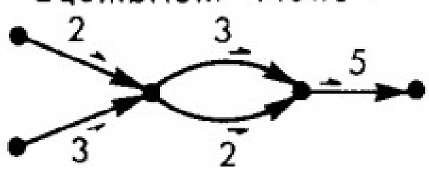
O - D 1 → 5, Path 2

O - D 2 → 5, Path 1

O - D 2 → 5, Path 2



Equilibrium Flows :



$$c_1^{15} = t_1(x_1) + t_3(x_3) + t_5(x_5) = 1 + (2+3) + 1 = 7$$
$$c_2^{15} = t_1(x_1) + t_4(x_4) + t_5(x_5) = 1 + (1+2\cdot2) + 1 = 7$$
$$c_1^{25} = t_2(x_2) + t_3(x_3) + t_5(x_5) = 2 + (2+3) + 1 = 8$$
$$c_2^{25} = t_2(x_2) + t_4(x_4) + t_5(x_5) = 2 + (1+2\cdot2) + 1 = 8$$

Unicidad de la solución, respecto a flujos en caminos

- Diferentes combinaciones de flujos en caminos permiten obtener los flujos en equilibrio en arcos, por ejemplo:
  - $f_1^1 = 0$, $f_2^1 = 2$, $f_1^2 = 3$ y $f_2^2 = 0$.
  - $f_1^1 = 2$, $f_2^1 = 0$, $f_1^2 = 1$ y $f_2^2 = 2$.

- Cualquier patron de flujos que satisfaga $f_1^1 = 2\alpha$, $f_2^1 = 2(1-\alpha)$, $f_1^2 = 3 - 2\alpha$ y $f_2^2 = 2\alpha$, para cualquier $0 \leq \alpha \leq 1$, genera flujos en arcos en equilibrio.

Bibliografía

- Mauttone, A; Hernández, D (2017) Encuesta de movilidad del área metropolitana de Montevideo. Principales resultados e indicadores. CAF, IM, IC, ISJ, MTOP, Udelar, PNUD. Disponible en http://scioteca.caf.com/handle/123456789/1078

- Sheffi, Y (1985) Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods. Prentice Hall. Disponible en http://web.mit.edu/sheffi/www/selectedMedia/sheffi_urban_trans_networks.pdf

- Zanjirani, R; Miandoabchi, E; Szeto, WY; Rashidi, H (2013) A review of urban transportation network design problems. European Journal of Operational Research 229(2):281-302.

- Notas del docente del curso.