Curso: Teoría, Algoritmos y Aplicaciones de Gestión Logística.

Modelos simples de Ruteo de Vehículos, Parte 2: VRP

Departamento de Investigación Operativa
Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

dictado semestre 2 - 2022

Resolución de VRP utilizando un enfoque de generación de columnas (cap. 19 libro referencia)

- Modelo clásico de VRP de vehículos: dado un conjunto de puntos de entrega (o recolección), y un conjunto de vehículos disponibles, decidir cómo organizar los recorridos de los vehículos para cubrir todos los puntos.

- Capacidad de cada vehículo Q, número de vehículos no acotado; grafo $N = (V, E)$, demanda en cada nodo $i \in N$ igual a w_i, distancias entre nodos d_{ij}.

- Objetivo: encontrar el conjunto de rutas, partiendo del nodo especial (depósito) 0, que atiende todas las demandas al menor costo de ruteo posible.

Formulación alternativa, basada en conjuntos de rutas

Sea $\{1, \ldots, R\}$ el conjunto de rutas factibles, y sea c_r el largo de la ruta r. Se definen los parámetros . $\alpha_{ir} = 1$ si el cliente i pertenece a la ruta r, 0 si no, para todo i y todo r.

Se definen las v.d. $y_r = 1$ si la ruta r es parte de la solución, y 0 si no. Entonces, la formulación de particionamiento de conjuntos (set partitioning problem) del VRP consiste en seleccionar un conjunto de rutas de costo mínimo tal que todo cliente está incluido en alguna ruta.

Formulación

$$\text{Problema S} \min \quad \sum_{r=1}^{R} c_r y_r \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^{R} \alpha_{ir} y_r \geq 1, \forall i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$y_r \in \{0, 1\}, \forall r = 1, \ldots, R. \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Observar las restricciones escritas en formato de desigualdad (que en el caso de distancias con desigualdad triangular, son idénticas a las formulaciones con restricción de igualdad).

La formulación depende de la cantidad de rutas, que es en principio un número exponencial. Un método basado en esta formulación tiene que lograr funcionar sin conocer explícitamente todas las rutas, y resolver de manera eficiente el problema lineal entero de gran escala.

Para esto usaremos dos metodologías potentes que se emplean en diversos contextos: generación de columnas, y planos de corte.

Resolución de la relajación lineal del problema S utilizando generación de columnas

- Ideas base: resolver el problema sobre un conjunto (acotado) de rutas; si la solución no es óptima para el problema original, buscar una ruta no incluida en el conjunto inicial que puede reducir el valor de la función objetivo; iterar hasta encontrar el óptimo. Sea un conjunto de rutas de tamaño $R' < R$.

$$\text{Problema S' } \min \quad \sum_{r=1}^{R'} c_r y_r \tag{5}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^{R'} \alpha_{ir} y_r \geq 1, \forall i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$y_r \geq 0 \forall r = 1, \ldots, R'. \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Sea $\bar{y}$ una solución óptima de S', y sea $\bar{\pi}$ la solución correspondiente del problema dual. Queremos saber si estas son soluciones óptimas de la relajación lineal del problema S o su dual.

$$\text{Problema dual SD} \max \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i \tag{9}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ir}\pi_i \leq c_r, \forall r = 1, \ldots, R, \tag{10}$$

$$\pi_i \geq 0 \forall i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

Si $\bar{\pi}$ cumple todas las restricciones, entonces es óptima también para SD (y entonces $\bar{y}$ es óptima para la relajación lineal de S). Si no cumple todas las restricciones, entonces existe alguna restricción r tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ir}\pi_i > c_r$. En definitiva, tenemos que identificar la columna r que minimiza la cantidad $c_r - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ir}\pi_i$; si esa cantidad es negativa, identificamos una restricción violada, y podemos agregar la columna correspondiente al problema S' , y resolverlo nuevamente, hasta que no haya ninguna restricción no cumplida, en cuyo caso tenemos la solución óptima de la relajación lineal de S.

Formulación alternativa permitiendo la repetición de clientes en la misma ruta

- Ideas base: admitir rutas que visitan al mismo cliente dos veces. Sea R_M el número de rutas expandido, y ξir el número de veces que un cliente es visitado en la ruta r.

$$\text{Problema } S_M \min \quad \sum_{r=1}^{R_M} c_r y_r \tag{13}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^{R_M} \xi_{ir} y_r \geq 1, \forall i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

$$y_r \in \{0, 1\} \forall r = 1, \ldots, R_M. \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

Este problema, de particionamiento de conjuntos, tiene la propiedad que su óptimo entero es también solución óptima del VRP; pero el óptimo de la relajación lineal de S y S_M pueden ser distintos (la relajación lineal de S_M provee una cota inferior de la relajación lineal de S). Sea $\bar{y}$ una solución óptima de S'_M, y sea $\bar{\pi}$ la solución correspondiente del problema dual.

Queremos saber si estas son soluciones óptimas de la relajación lineal del problema S o su dual.

Para resolverlo, seguimos el mismo formato, enumerando un conjunto de rutas parcial de tamaño R'_M; resolviendo el problema S'_M, relajación lineal del S_M; y usamos las variables duales para identificar una columna (ruta) que no sea factible (es decir, que $c_r - \sum_{i=1}^{n} \xi ir\pi_i$ sea negativa), para agregarla a la formulación y proceder de manera iterativa

Con la nueva formulación, es más sencillo identificar estas columnas.

Sea un camino $P = (0, u1, u2, ..., u_\ell)$, y sea la carga del camino $\sum_{i=1}^{\ell} w_{u_i}$. Sea $d'_{ij} = d_i j - \bar{\pi}_i/2 - \bar{\pi}_j/2$.

Sea $f_q(i)$ el costo , usando estas d', del camino de menor costo que comienza en el depósito y termina en i con carga total q; es posible calcular estos valores con la fórmula $f_q(i) = \min_{j \neq i}\{f_{q-w_i}(j) + d'_{ij}\}$. Las condiciones de borde son $f_q(i) = d'_{0i}$ si $q = w_i$, infinito en otro caso.

Finalmente, se define $f_q^0(i) = f_q(i) + d'_{0i}$, por lo cual corresponde al tour de menor costo que comienza en el depósito, recorre un conjunto de clientes, el último siendo i, tiene carga total q y vuelve al depósito.

Si existe un q e i tales que $f_q^0(i) < 0$, entonces los vectores no son óptimos, y se puede agregar una columna al problema inicial.

Resumen del algoritmo de generación de columnas

1. Paso 1: Generar un conjunto inicial de columnas R'_M.
2. Paso 2: Resolver el problema lineal S'_M y encontrar $\bar{y}$ y $\bar{\pi}$.
3. Paso 3: Construir la matriz de distancias d' y encontrar los valores $f_q^0(i)$ para todo q e i.
4. Para todo i y q tal que $f_q^0(i) < 0$, agregar la columna correspondiente a R'_M e ir al paso 2.
5. Si $f_q^0(i) \geq 0$ para todo i y q, parar (se encontró el óptimo del problema relajado S_M).

Algoritmo de planos de corte para resolver el problema de particionamiento de conjuntos

1. Paso 1: Generar un conjunto inicial de columnas R'_M.

2. Paso 2: usar generación de columnas para resolver el problema lineal S'_M.

3. Paso 3: Si la solución óptima a S'_M es entera, parar.
   Si no, generar planos de corte que separen esta solución.
   Agregar estos planos de corte al problema lineal S'_M.

4. Resolver el problema lineal S'_M modificado, ir al paso 3.

El desafío es identificar los planos de corte (restricciones que separan la solución fraccional encontrada de S'_M de la solución entera. Un ejemplo de familia de planos de corte para este problema está dado por la observación siguiente. Sea G el grafo donde los nodos son las columnas de S'_M, y dos nodos tienen una arista en común si las dos columnas comparten un cliente. En la solución óptima del VRP, no pueden utilizarse dos columnas (dos rutas) que compartan clientes. Sea un conjunto de nodos de G,K, tal que cada par de nodos de K está conectado; decimos que K es una clique. Para cada conjunto K, tiene que cumplirse que $\sum_{r \in K} y_r \leq 1$. Buscamos una clique máximal de G, y agregamos esta desigualdad.