

Teoría de circuitos

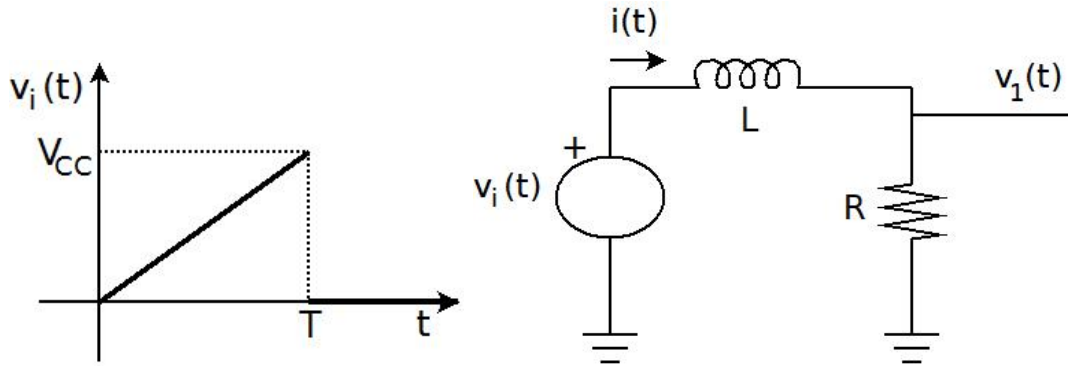
Segundo parcial

2º semestre 2022-1sem

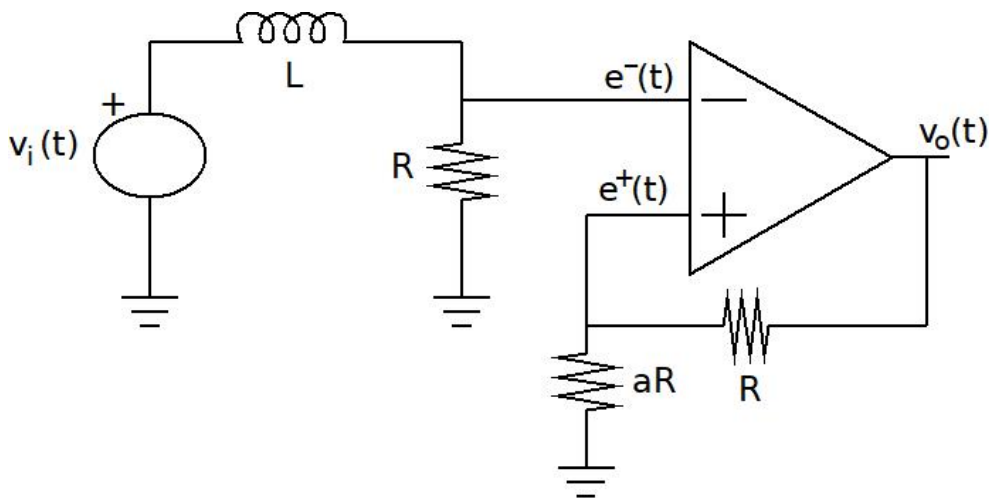
Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No demorarse mucho tiempo en un solo ejercicio.
- **SER PROLIJO. EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS, RESALTANDO LOS RESULTADOS.** Expresar los resultados exactamente en el formato pedido. Tener presente que si algo no es claro para el evaluador, se podrían perder puntos de la pregunta.
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- Al finalizar la prueba, escanear las hojas y subir el pdf en la tarea específica del EVA.
- Se recuerda que la prueba es individual.

Problema 1 (15 puntos)



- a) En el circuito $R-L$ de la figura de arriba, hacer un análisis por tramos y hallar la expresión temporal de la salida $v_1(t)$ para todo tiempo positivo, cuando se aplica la señal $v_i(t)$. Se sabe que la inductancia arranca descargada y que $L/R = T$.
- b) En el circuito de abajo, con a positivo, se quiere hallar la evolución de la salida $v_o(t)$ del comparador. Se asume que inicialmente $v_o(t) = +V_{CC}$.
 - i) Verificar el estado inicial asumido para el comparador.
 - ii) Hallar un valor de a que asegure que el comparador conmuta en $t = \frac{T}{2}$.
 - iii) ¿Volverá a conmutar el comparador para t mayor que $\frac{T}{2}$? **Justificar!!**



Problema 2 (10 puntos)

Se considera un cuadripolo descrito por sus constantes generales (A, B, C, D) . Se conecta una fuente de tensión $V_i(s)$ al lado 1 y una impedancia $Z_L(s)$ al lado 2.

Hallar la transferencia del sistema

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_i(s)}$$

en función de los datos disponibles.

Problema 3 (10 puntos)

- a) Enunciar el Teorema de Blondel.
- b) Demostrarlo para el caso de una carga en estrella.

Problema 4 (15 puntos)

Se considera el circuito en Laplace de la figura. Los operacionales son ideales y funcionan en zona lineal.

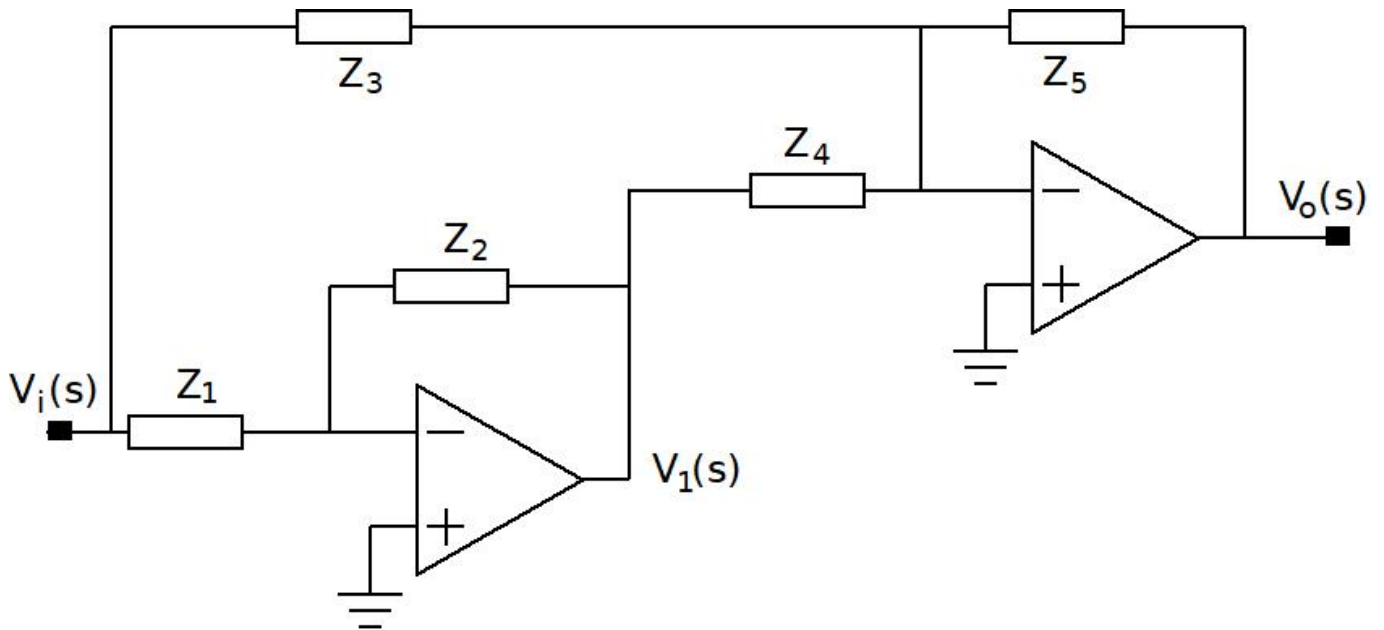
- a) Para cada operacional, identificar la configuración en la que se encuentra.
- b) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.
- c) Para el caso

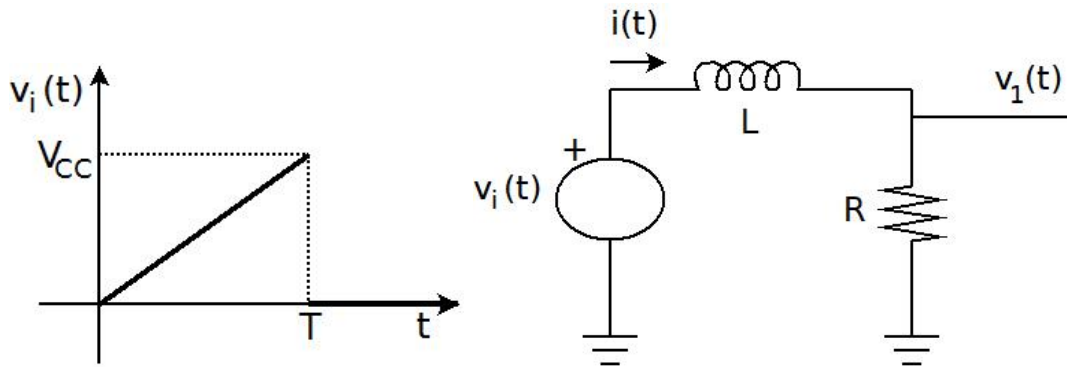
$$Z_1 = Z_2 = Z_4 = R \quad , \quad Z_3 = Ls \quad , \quad Z_5 = R \parallel \frac{1}{Cs} \quad , \quad \frac{R}{L} = \omega_0 \quad , \quad \frac{1}{RC} = 10\omega_0$$

mostrar que puede escribirse como

$$H(s) = 10 \cdot \frac{\omega_0 \cdot (s - \omega_0)}{s \cdot (s + 10\omega_0)}$$

- d) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.
- e) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo $\tilde{\omega}$ tal que ante una entrada de la forma $A \cdot \cos(\tilde{\omega}t)$ el sistema responda en régimen con una señal exactamente igual?



SoluciónProblema 1 (15 puntos)

- a) En el circuito $R - L$ de la figura de arriba, hacer un análisis por tramos y hallar la expresión temporal de la salida $v_1(t)$ para todo tiempo positivo, cuando se aplica la señal $v_i(t)$. Se sabe que la inductancia arranca descargada y que $L/R = T$.

Miremos el primer tramo $[0, T]$. En él, la entrada podemos representarla por la rampa, lo que en Laplace nos da

$$V_i(s) = \frac{V_{CC}}{Ts^2}$$

Pasamos al circuito equivalente en Laplace. La única fuente independiente corresponde a la entrada, ya que los datos previos son nulos. Entonces, la corriente de la única malla vale:

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{R + Ls} = \frac{\frac{V_{CC}}{Ts^2}}{R + Ls} = \frac{V_{CC}}{Ts^2(R + Ls)}$$

Para pasar al tiempo, vamos hacia fracciones simples:

$$I(s) = \frac{V_{CC}}{Ts^2(R + Ls)} = \frac{V_{CC}}{TL} \cdot \frac{1}{s^2 \cdot (s + \frac{R}{L})} = \frac{V_{CC}}{TL} \cdot \left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s + \frac{R}{L}} \right]$$

Las constantes A y C salen por *tapadita*:

$$A = \frac{L}{R} \quad , \quad C = \frac{L^2}{R^2} = A^2$$

Para hallar B , hacemos común denominador e igualamos a la expresión original, obteniendo:

$$1 = A \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right) + B \cdot s \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right) + A^2 \cdot s^2 = s^2 \cdot (A^2 + B) + s \cdot \left(A + B \cdot \frac{R}{L} \right) + A \cdot \frac{R}{L}$$

Obtenemos

$$A = \frac{L}{R} \quad , \quad B = -A^2 = -\frac{L^2}{R^2} = -C$$

Entonces, la expresión simple de la corriente es

$$I(s) = \frac{V_{CC}}{TL} \cdot \left[\frac{L/R}{s^2} - \frac{L^2/R^2}{s} + \frac{L^2/R^2}{s + \frac{R}{L}} \right] = \frac{V_{CC}}{R} \cdot \left[\frac{1}{Ts^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right]$$

Donde hemos usado que $T = L/R$. Pasando al tiempo, obtenemos

$$i(t) = Y(t) \cdot \frac{V_{CC}}{R} \cdot \left[\frac{t}{T} + e^{-t/T} - 1 \right]$$

La tensión de interés es $v_o(t) = R \cdot i(t)$.

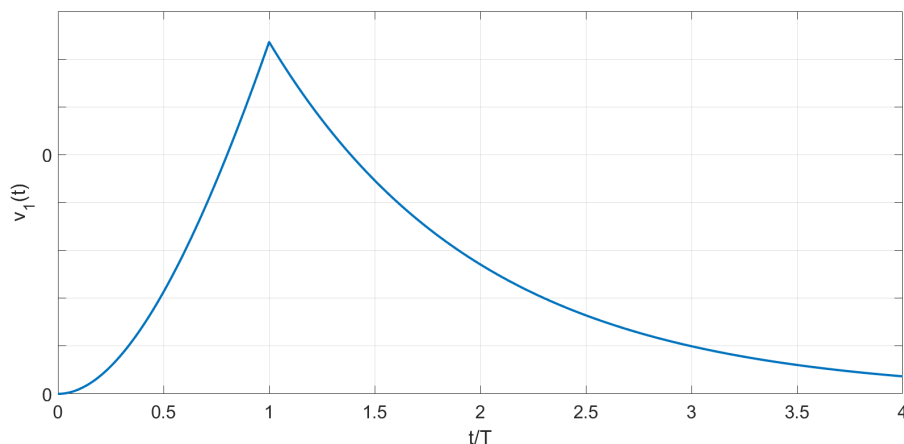
Las expresiones anteriores valen hasta $t = T$. A partir de allí, comienza un nuevo tramo, en el que la entrada se anula y hay un dato previo i_0 en la bobina. Ponemos un nuevo origen de tiempos en T para la variable $t' = t - T$. El circuito equivalente en Laplace tiene nuevamente una única fuente independiente, asociada al dato previo, de valor Li_0 . El valor del dato previo lo hallamos como la corriente al final del tramo anterior:

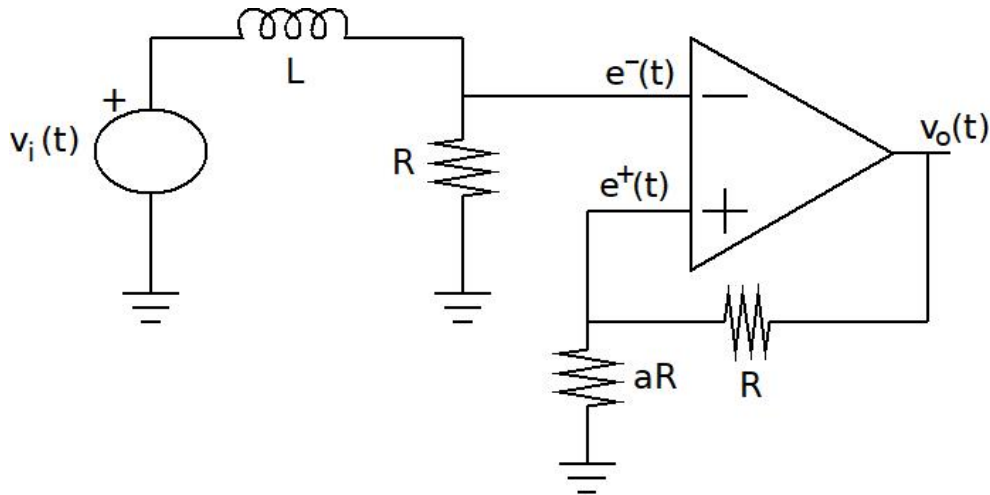
$$i_0 = i(t = T) = \frac{V_{CC}}{R} \cdot \left[\frac{T}{T} + e^{-T/T} - 1 \right] = \frac{V_{CC}}{R} \cdot e^{-1}$$

La corriente vale ahora

$$I(s) = \frac{Li_0}{R + Ls} = \frac{i_0}{s + \frac{R}{L}} \Rightarrow i(t') = Y(t') \cdot i_0 \cdot e^{-t'/T} = Y(t') \cdot \frac{V_{CC}}{R} \cdot e^{-1} \cdot e^{-t'/T}$$

y nuevamente la tensión de interés es $R \cdot i(t')$. La siguiente figura resume la evolución temporal de la tensión $v_1(t)$.





b) En el circuito de arriba, con a positivo, se quiere hallar la evolución de la salida $v_o(t)$ del comparador. Se asume que inicialmente $v_o(t) = +V_{CC}$.

i) Verificar el estado inicial asumido para el comparador.

Observemos que por ser el operacional ideal, no entra corriente en las patas $+$ y $-$, por lo que podemos hallar e^+ a través de un divisor de tensión:

$$e^+ = \frac{aR}{R + aR} \cdot v_o(t)$$

Por otro lado, la tensión e^- es la tensión v_1 hallada en la parte a). De ella sabemos que es siempre positiva, que arranca en 0, que crece hasta un máximo en $t = T$ y que luego decrece hacia 0 exponencialmente.

Asumiendo que el comparador arranca inicialmente saturado a $+V_{CC}$, tenemos entonces que

$$e^+ = \frac{a}{a+1} V_{CC}$$

que es estrictamente positivo. Como $e^-(0)$ es nulo, entonces confirmamos el estado supuesto para el comparador.

ii) Hallar un valor de a que asegure que el comparador conmuta en $t = \frac{T}{2}$.

Si bien inicialmente se confirma la hipótesis de que el comparador arranca saturado a $+V_{CC}$, sabemos que la tensión $e^-(t)$ crece monótonamente hasta $t = T$. Para que el comparador conmute en $T/2$, se debe cumplir que en ese instante, la pata menos alcance a la pata más, es decir:

$$\frac{a}{a+1} V_{CC} = e^-(T/2) = V_{CC} \cdot \left[\frac{T}{2T} + e^{-T/2T} - 1 \right] = V_{CC} \cdot \left[\frac{1}{2} + e^{-1/2} - 1 \right]$$

⇒

$$\frac{a}{a+1} = e^{-1/2} - \frac{1}{2} = \alpha \approx 0.11$$

donde introdujimos la constante auxiliar α . Despejamos a en función de α :

$$a = (1+a).\alpha \Rightarrow (1-\alpha).a = \alpha \Rightarrow a = \frac{\alpha}{1-\alpha} \approx 0.12$$

iii) ¿Volverá a conmutar el comparador para t mayor que $\frac{T}{2}$? **Justificar!!**

Al conmutar el comparador, su salida pasa a ser $-V_{CC}$ y, por lo tanto, e^+ pasa a ser negativo. Por su parte, la pata menos es siempre positiva, lo que no solamente confirma el estado del comparador, sino que muestra que el mismo no va a volver a conmutar.

Problema 2 (10 puntos)

Se considera un cuadripolo descrito por sus constantes generales (A, B, C, D). Se conecta una fuente de tensión $V_i(s)$ al lado 1 y una impedancia $Z_L(s)$ al lado 2.

Hallar la transferencia del sistema $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_i(s)}$, en función de los datos disponibles.

El cuadripolo puede describirse por la relación:

$$\begin{cases} V_1 = A.V_2 - B.I_2 \\ I_1 = C.V_2 - D.I_2 \end{cases}$$

Por el circuito, sabemos que $V_1 = V_i$ y que

$$V_2 = -Z_L.I_2$$

donde el signo de menos está asociado a que la corriente I_2 es entrante al cuadripolo. Entonces, podemos escribir la relación

$$V_i = A.V_2 - B.I_2 = A.V_2 + B.\frac{V_2}{Z_L} = \left[A + \frac{B}{Z_L} \right].V_2 = \left[\frac{A.Z_L + B}{Z_L} \right].V_2$$

De donde:

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L}{A.Z_L + B}$$

Problema 3 (10 puntos)

a) Enunciar el Teorema de Blondel.

Se considera una carga q -fásica conectada a una fuente de tensión q -fásica a través de q líneas. Se sabe que la carga, o bien está en polígono o bien está en estrella sin neutro. Se considera un punto arbitrario X respecto del cual se medirán las tensiones de las líneas. V_{jX} denotará el fasor de la tensión entre la línea j y el punto X . Por otro lado, I_j denotará el fasor de la corriente por la línea j , medida hacia la carga. Bajo estas hipótesis, la potencia activa total P que consume la carga polifásica viene dada puede calcularse por la expresión

$$P = \sum_{j=1}^q \operatorname{re}[V_{jX} \bar{I}_j]$$

b) Demostrarlo para el caso de una carga en estrella.

La prueba se basa en la afirmación siguiente:

$$\sum_{j=1}^q I_j = 0$$

la cual es trivial si la carga está en triángulo y es necesariamente cierta si la carga está en estrella y no tiene neutro. Si hubiera neutro, la suma daría la corriente que se va por el neutro. Escribamos primero la expresión de la potencia que consume la carga, asumiendo el caso de carga en estrella, sin neutro.

$$P = \sum_{j=1}^q \operatorname{re}[V_j' \bar{I}_j']$$

donde V_j' es la tensión de la carga de la fase j e I_j' es la corriente por la carga de la fase j . Por ser una carga en estrella, tenemos que $I_j' = I_j$. Por otra parte, si denotamos por N el centro de la estrella de la carga, tenemos que

$$V_{jX} = V_j' + V_{NX}$$

donde hemos escrito la tensión entre la línea j y el punto X como la tensión de fase más la diferencia de tensión entre el punto N y el punto X . Entonces

$$V_j' = V_{jX} - V_{NX}$$

Sustituyendo en la expresión de la potencia polifásica, obtenemos

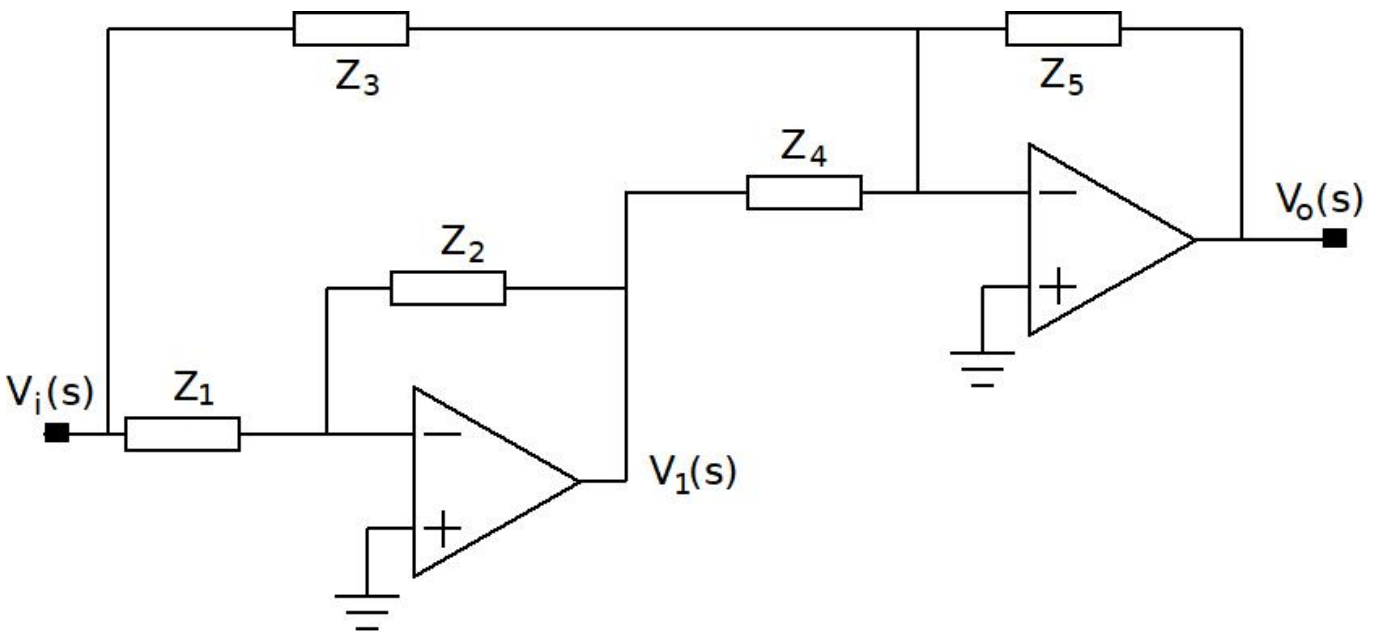
$$P = \sum_{j=1}^q \operatorname{re}[(V_{jX} - V_{NX}) \bar{I}_j] = \sum_{j=1}^q \operatorname{re}[V_{jX} \bar{I}_j] - \sum_{j=1}^q \operatorname{re}[V_{NX} \bar{I}_j]$$

En el último término, aplicamos la linealidad de tomar la parte real, observamos que V_{NX} no depende del índice de sumación y podemos sacarlo de la sumatoria, y aplicamos la linealidad de tomar el conjugado:

$$P = \sum_{j=1}^q \operatorname{re}[V_{jX} \bar{I}_j] = \operatorname{re} \left[V_{NX} \sum_{j=1}^q \bar{I}_j \right] = \sum_{j=1}^q \operatorname{re}[V_{jX} \bar{I}_j]$$

Problema 4 (15 puntos)

Se considera el circuito en Laplace de la figura. Los operacionales son ideales y funcionan en zona lineal.



- a) Para cada operacional, identificar la configuración en la que se encuentra.

El opamp de la izquierda se encuentra en una configuración inversora, con entrada V_i y salida V_1 , en tanto el otro configura un sumador inversor, con entradas V_i y V_1 y salida V_o .

- b) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

Por la ganancia infinita, tenemos el cortocircuito virtual de las patas de entrada de los operacionales, en tanto que por la resistencia de entrada infinita, no entra corriente por dichas patas

al operacional.

De la configuración inversora, sabemos que

$$V_1(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot V_i(s)$$

En el sumador, planteando el nudo en la pata $-$, obtenemos

$$\frac{V_i(s)}{Z_3} + \frac{V_1(s)}{Z_4} = -\frac{V_o(s)}{Z_5} \Rightarrow \frac{V_i(s)}{Z_3} - \frac{Z_2}{Z_1 Z_4} \cdot V_i(s) = -\frac{V_o(s)}{Z_5}$$

De donde:

$$-\frac{V_o(s)}{Z_5} = V_i(s) \cdot \left[\frac{1}{Z_3} - \frac{Z_2}{Z_1 Z_4} \right] = V_i(s) \cdot \left[\frac{Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3}{Z_1 Z_3 Z_4} \right]$$

Entonces

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_5 \cdot (Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3)}{Z_1 Z_3 Z_4}$$

c) Para el caso

$$Z_1 = Z_2 = Z_4 = R \quad , \quad Z_3 = Ls \quad , \quad Z_5 = R \parallel \frac{1}{Cs} \quad , \quad \frac{R}{L} = \omega_0 \quad , \quad \frac{1}{RC} = 10\omega_0$$

mostrar que

$$H(s) = \frac{10\omega_0 \cdot (s - \omega_0)}{s \cdot (s + 10\omega_0)}$$

Notemos que

$$Z_5 = \frac{R}{1 + RCs}$$

Entonces

$$H(s) = -\frac{R}{1 + RCs} \cdot \frac{R \cdot R - R \cdot Ls}{R \cdot Ls \cdot R} = -\frac{R - Ls}{Ls(RCs + 1)} = \frac{L \cdot (s - \frac{R}{L})}{RLC \cdot s \cdot (s + \frac{1}{RC})}$$

Finalmente, llegamos a la expresión

$$H(s) = \frac{10\omega_0 \cdot (s - \omega_0)}{s \cdot (s + 10\omega_0)}$$

d) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

Vamos a hacer un análisis por bandas. En primer término hallamos las frecuencias singulares, es decir, los valores absolutos de las raíces del numerador y denominador, que delimitarán las bandas de interés. Obtenemos $0, \omega_0$ y $10\omega_0$. Descartamos la raíz nula, dado que miraremos las frecuencias positivas. Observemos las restantes raíces están separadas una década, por lo

que la aproximación asintótica del diagrama de Bode de módulo va a ser una buena representación del diagrama real.

Tenemos tres bandas para el análisis. Consideremos

$$H(j\omega) = \frac{10\omega_0 \cdot (j\omega - \omega_0)}{j\omega \cdot (j\omega + 10\omega_0)}$$

Comenzamos por la banda de baja frecuencia.

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{10\omega_0 \cdot (-\omega_0)}{j\omega \cdot (10\omega_0)} = \frac{-\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} \approx 20 \log(\omega_0) dB - 20 \log(\omega) dB \\ \arg(H) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Analicemos la segunda banda:

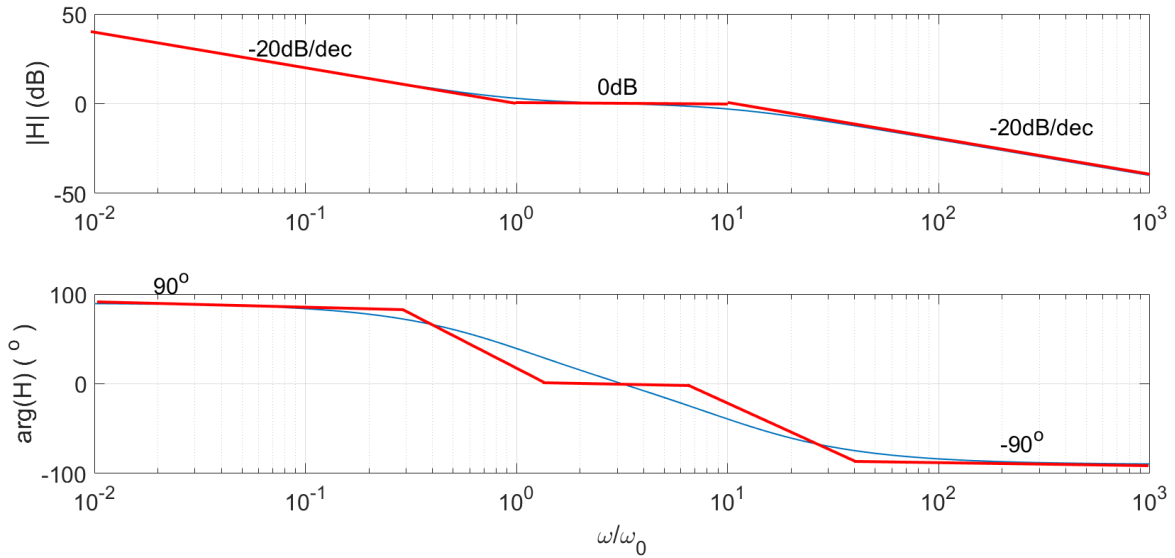
$$\omega_0 \ll \omega \ll 10\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{10\omega_0 \cdot (j\omega)}{j\omega \cdot (10\omega_0)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} \approx 0 dB \\ \arg(H) \approx 0 (\pm 2\pi) \end{cases}$$

Al ser raíces simples, las variaciones de fase no pueden superar los $\pi/2$ radianes, por lo que en esta banda el $\arg(H)$ se aproxima a 0 radianes. Analicemos finamente la banda de alta frecuencia:

$$10\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{10\omega_0 \cdot (j\omega)}{j\omega \cdot (j\omega)} = \frac{10\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} \approx 20 \log(10\omega_0) dB - 20 \log(\omega) dB \\ \arg(H) \approx -\frac{\pi}{2} (\pm 2\pi) \end{cases}$$

Con un argumento similar a lo expresado antes, concluimos que la fase disminuye hacia $-\frac{\pi}{2}$.

La siguiente figura muestra los diagramas reales y asintóticos.



- e) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo $\tilde{\omega}$ tal que ante una entrada de la forma $A \cos(\tilde{\omega}t)$ el sistema responda con una señal exactamente igual?

La clave para responder la pregunta nos la da la expresión genérica de la respuesta en régimen. Para la entrada $v_i(t) = A \cos(\tilde{\omega}t)$, la respectiva respuesta en régimen vale:

$$v_o(t) = A \cdot |H(j\tilde{\omega})| \cdot \cos(\tilde{\omega}t + \arg H(j\tilde{\omega}))$$

Para que la salida sea idéntica a la entrada, se debe cumplir al mismo tiempo que $|H(j\tilde{\omega})| = 1$ y $\arg H(j\tilde{\omega}) = 0 (\pm 2\pi)$. De la observación de los diagramas de Bode, vemos que hay una banda entre ω_0 y $10\omega_0$ en la que la ganancia del sistema es $0dB$. También vemos que, por la continuidad de la fase, existe una frecuencia a la que el sistema no introduce desfase. Lo anterior parece sugerir que es posible que haya una frecuencia de trabajo a la que la salida sea igual a la entrada (tengamos presente que estamos mirando un diagrama aproximado!!). El cálculo exacto nos daría que la frecuencia buscada es $\tilde{\omega} = \sqrt{10} \cdot \omega_0$ (si bien no lo pide la letra, queda como ejercicio!!).