Teoría de circuitos

Segundo parcial

2^o semestre 2021

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No demorarse mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SER PROLIJO. EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS, RESALTANDO LOS RESULTADOS. Expresar los resultados exactamente en el formato pedido. Tener presente que si algo no es claro para el evaluador, se podrían perder puntos de la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Al finalizar la prueba, escanear las hojas y subir el pdf en la tarea específica del EVA.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**

Problema 1 (15 puntos)

a) Dado un cuadripolo descrito por sus constantes generales (A, B, C, D), calcular la impedancia vista desde el lado 1 cuando el lado 2 se carga con una impedancia de valor Z.

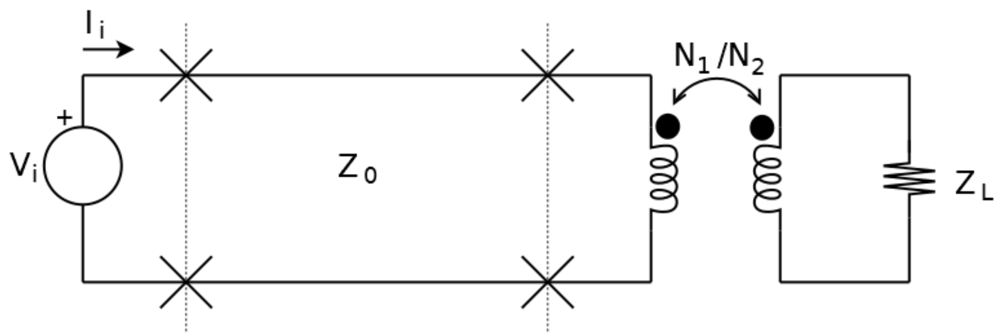
b) i) Hallar las constantes generales que describen un transformador ideal, con relación de transformación $\frac{N_1}{N_2}$.

   ii) A partir de lo anterior, calcular la impedancia vista desde el primario cuando en el secundario se conecta una impedancia de carga de valor Z.

c) Se considera el circuito de la figura, donde el transformador es ideal, de relación de transformación $\frac{N_1}{N_2}$, y la línea de transmisión es sin pérdidas, de impedancia característica Z_0.

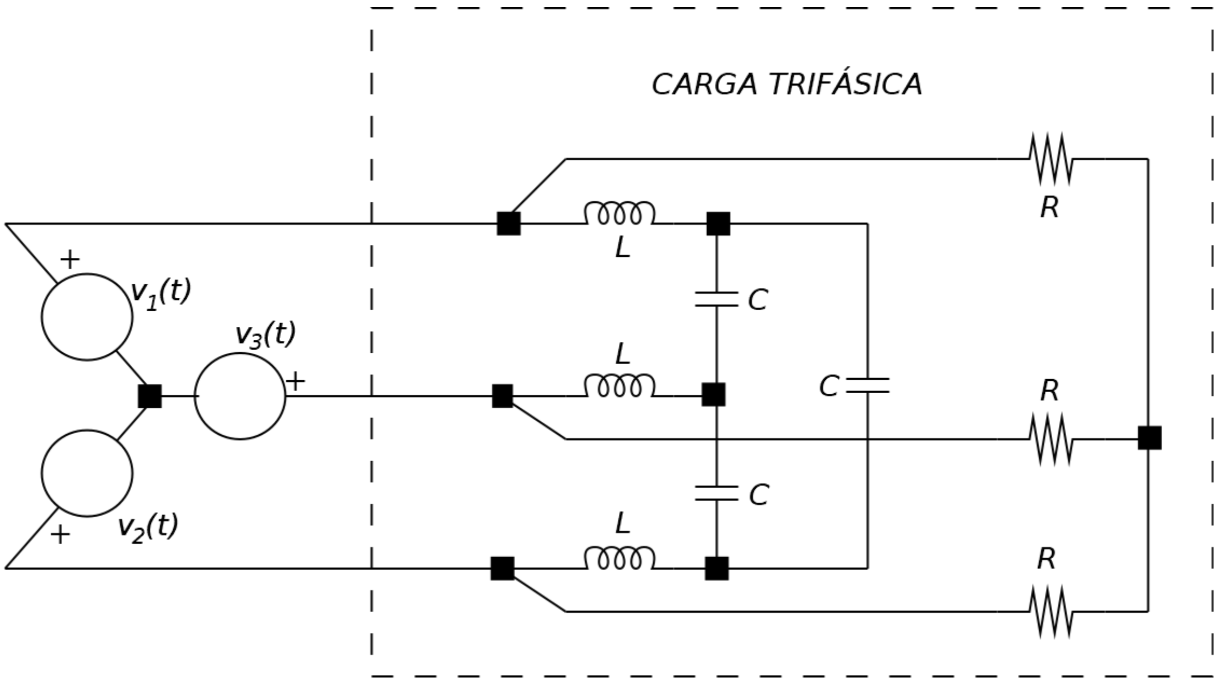
   i) Determinar el valor de la impedancia Z_L para que la línea se encuentre adaptada.

   ii) Si la tensión de alimentación es $v_i(t) = A.\cos(\omega_0 t + \phi)$, hallar la expresión temporal de la corriente que entrega la fuente en régimen, para el caso en que la línea está adaptada.



Problema 2 (12 puntos)

En el circuito trifásico de la figura, el sistema de fuentes es equilibrado y perfecto,



de valor eficaz $220V$ y frecuencia $50Hz$. Se sabe que

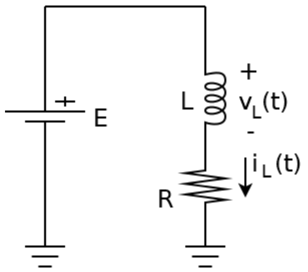
$$L = 10\,Hy \quad , \quad C = 0.4\,\mu F \quad , \quad R = 250\,\Omega$$

a) Hallar el equivalente monofásico.

b) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas por la carga trifásica.

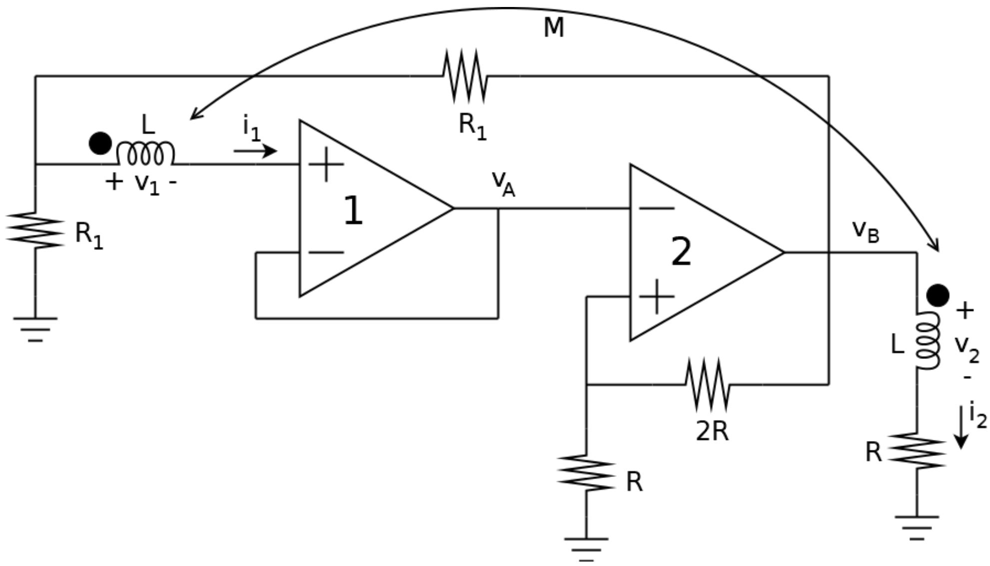
c) Se desea compensar la potencia reactiva, procurando utilizar los componentes de menor valor posible. Indicar qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Problema 3 (23 puntos)



a) En el circuito de la figura, la tensión E es constante y la inductancia tiene una carga inicial i_0. Usando Laplace, hallar la tensión $v_L(t)$ y la corriente $i_L(t)$ para todo instante positivo.

A partir de ahora, se considera el circuito de la figura. Los amplificadores operacionales son ideales y están alimentados por $\pm V_{CC}$. El operacional de la derecha funciona como comparador. Las inductancias conforman un transformador simple, con inductancia mutua $M = \frac{L}{2}$. Se introduce la constante de tiempo $\tau = L/R$.



b) A partir de las ecuaciones temporales del transformador simple, demostrar que en este caso $v_2(t) = 2.v_1(t)$.

c) Probar que se cumple que $v_A(t) = \frac{1}{2}.v_B(t) - v_1(t)$.

d) Se asume que el circuito comienza inicialmente descargado y que la salida del comparador arranca en $+V_{CC}$. Verificar la hipótesis del comparador y analizar el comportamiento del circuito desde $t = 0$ hasta el primer instante (t_1) en el que conmuta el comparador.

e) Analizar el segundo tramo del circuito, hasta que vuelve a conmutar el comparador. (No olvidar verificar la hipótesis del comparador).

f) Hallar los datos previos del siguiente tramo y comentar *cualitativamente* cómo evolucionaría el circuito.

Solución

Problema 1

a) Dado un cuadripolo descrito por sus constantes generales (A, B, C, D), calcular la impedancia vista desde el lado 1 cuando el lado 2 se carga con una impedancia de valor Z.

La definición de impedancia vista nos dice que:

$$Z_v = \frac{V_1}{I_1}$$

Por la ley de Ohm en el segundo puerto:

$$Z = \frac{V_2}{-I_2}$$

donde el signo de menos viene de que I_2 se define entrante al cuadripolo.

Utilizando las relaciones dadas por las constantes generales:

$$Z_v = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{A\frac{V_2}{-I_2} + B}{C\frac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{AZ + B}{CZ + D}$$

b) i) Hallar las constantes generales que describen un transformador ideal, con relación de transformación $\frac{N_1}{N_2}$.

Las relaciones del transformador ideal son:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0$$

Por lo tanto:

$$V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 + 0(-I_2)$$

$$I_1 = 0(V_2) + \frac{N_2}{N_1}(-I_2)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_1}{N_2} & 0 \\ 0 & \frac{N_2}{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{N_1}{N_2} \quad , \quad B = 0 \\ \\ C = 0 \quad , \quad D = \frac{N_2}{N_1} \end{cases}$$

ii) A partir de lo anterior, calcular la impedancia vista desde el primario cuando en el secundario se conecta una impedancia de carga de valor Z.

Utilizando las partes anteriores:

$$Z_v = \frac{AZ + B}{CZ + D} = \frac{\frac{N_1}{N_2}.Z + 0}{0.Z + \frac{N_2}{N_1}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$$

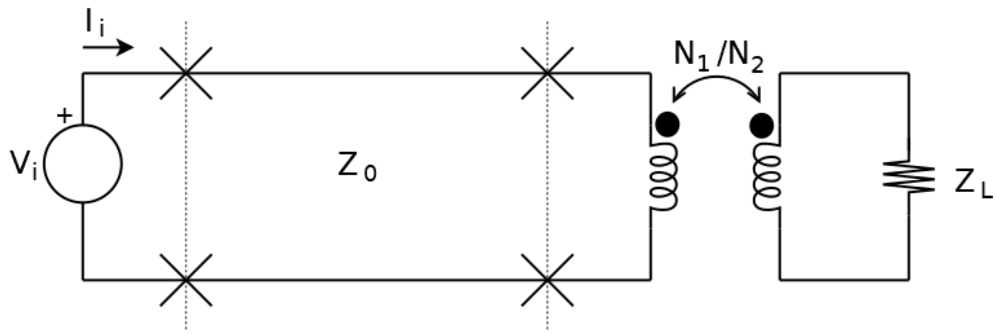
c) Se considera el circuito de la figura, donde el transformador es ideal, de relación de transformación $\frac{N_1}{N_2}$, y la línea de transmisión es sin pérdidas, de impedancia característica Z_0.

i) Determinar el valor de la impedancia Z_L para que la línea se encuentre adaptada.

Para que la línea esté adaptada, debe tener una carga igual a su impedancia característica, por lo que la impedancia *complexiva* transformador+carga, es decir, la impedancia vista desde el primario del transformador, debe ser igual a Z_0. Por lo tanto:

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L = Z_0 \Rightarrow Z_L = \frac{Z_0}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2}$$

ii) Si la tensión de alimentación es $v_i(t) = A.\cos(\omega_0 t + \phi)$, hallar la expresión temporal de la corriente que entrega la fuente en régimen, para el caso en que la línea está adaptada.



El fasor de tensión asociado a la fuente de tensión es:

$$V_i = Ae^{j\phi}$$

Por lo que el fasor asociado a la corriente que entrega la fuente depende de la impedancia de entrada a la linea, Z_{in}, del siguiente modo:

$$I_{in} = V_i/Z_{in}$$

Al estar la impedancia adaptada a la línea:

$$Z_{in} = Z_0$$

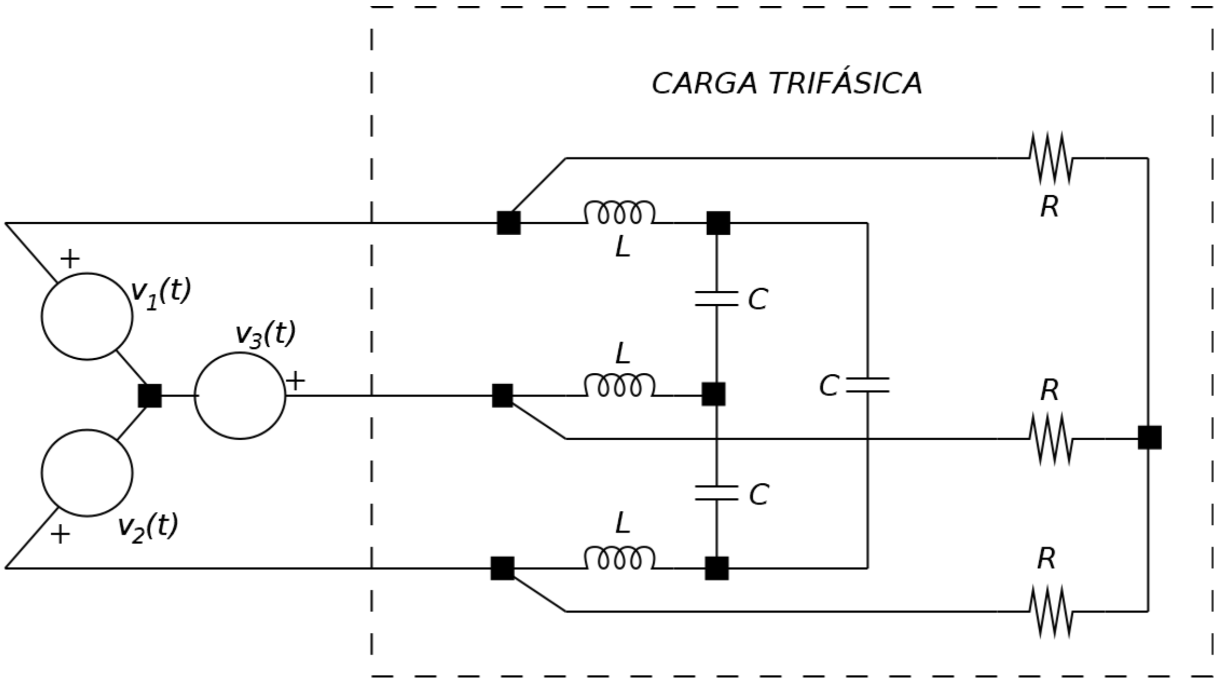
Por lo tanto:

$$I_{in} = V_i/Z_0 \Rightarrow i_{in}(t) = re\left(I_{in}.e^{j\omega t}\right) = \frac{A}{Z_0}cos(\omega t + \phi)$$

donde hemos usado que Z_0 es real, ya que la línea es sin pérdidas.

Problema 2

En el circuito trifásico de la figura, el sistema de fuentes es equilibrado y perfecto, de valor efi-

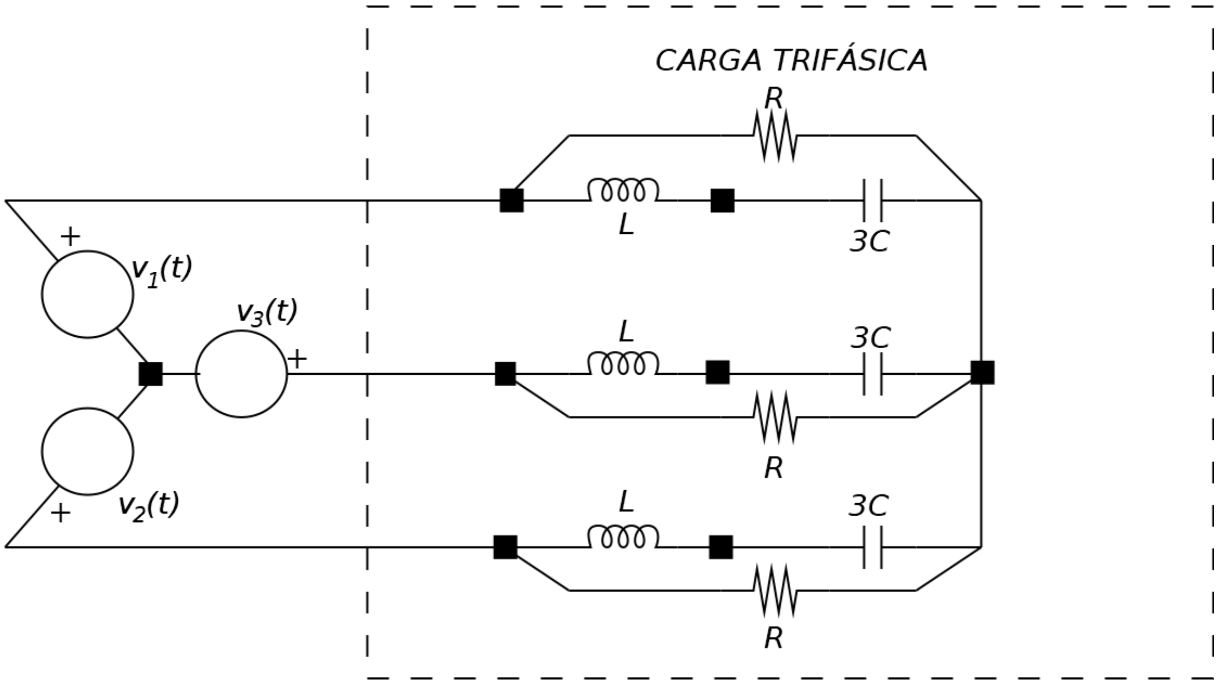


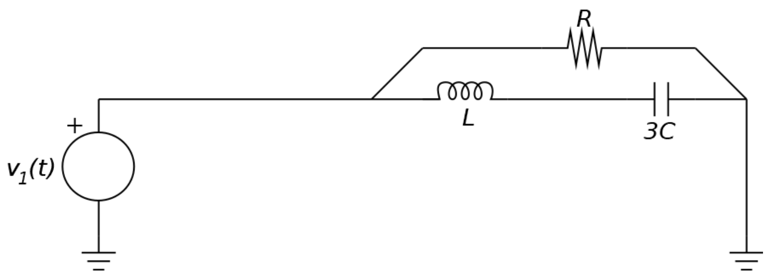
caz $220V$ y frecuencia $50Hz$. Se sabe que

$$L = 10\,Hy \quad , \quad C = 0.4\,\mu F \quad , \quad R = 250\,\Omega$$

a) Hallar el equivalente monofásico.

Trabajamos en fasores. Del lado de la carga podemos pasar los condensadores de configuración triángulo a configuración estrella, dividiendo entre 3 las impedancias, por ser idénticas. Notemos entonces los nuevos condensadores quedan en serie con las bobinas, y obtenemos una estrella con tres impedancias idénticas, de valor $Z = Lj\omega + \frac{1}{3Cj\omega} = j489\,\Omega$. Esta estrella queda *en paralelo* co la estrella de resistencias. Hay que observar que al ser impedancias idénticas, los centros de la estrellas quedan *necesariamente* al mismo potencial y el circuito se podría redibujar así:
Por lo tanto, el equivalente monofásico resulta ser el de la siguiente figura.





b) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas por la carga trifásica.

Planteamos $Z_T = R||Z$, con $Z = Lj\omega + \frac{1}{3Cj\omega} = j.\left(L\omega - \frac{1}{3C\omega}\right)$, y observamos que es el paralelo de una resistencia con una reactancia. Es decir, que tanto la resistencia como la reactancia ven la tensión de la fuente. Además, la resistencia es la que consume la activa y la reactancia es la que consume reactiva. Entonces, en el equivalente monofásico,

$$P = \frac{|V_1|^2}{R} \quad , \quad Q = \pm\frac{|V_1|^2}{|Z|} \quad (\textit{el signo de } Q \textit{ depende de los valores numéricos})$$

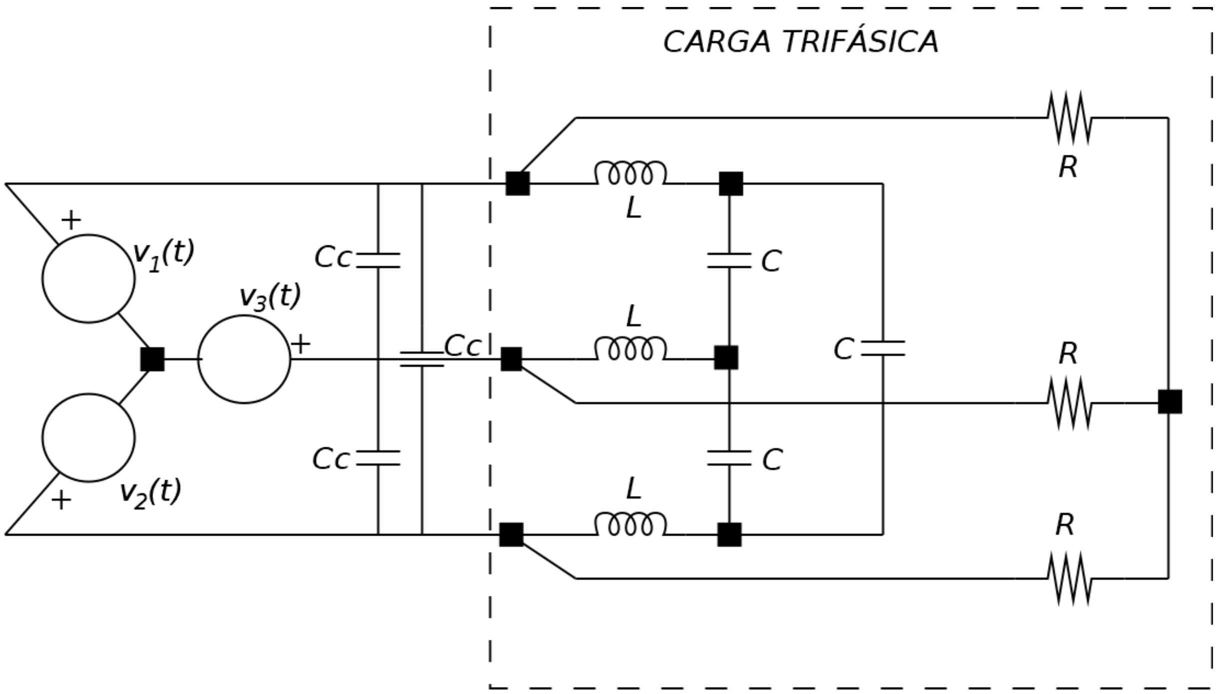
y $S = P + jQ$ (donde hemos puesto la expresión en valores eficaces). Con los valores dados, la carga resulta ser inductiva, por lo que Q es positiva. En el circuito trifásico, las potencias son el triple, ya que son idénticas por fase.

c) Se desea compensar la potencia reactiva, procurando utilizar los componentes de menor valor posible. Indicar qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Como $Q > 0$, para compensar necesitamos colocar capacitores. Además, nos piden usar componentes de menor valor posible. Sabemos que $Z_{estrella} < Z_{triangulo}$. Para el caso de un condensador, la impedancia inversamente proporcional al valor de la capacidad. Entonces, necesitamos colocar capacitores en triangulo para que la capacitancia sea del menor valor posible.

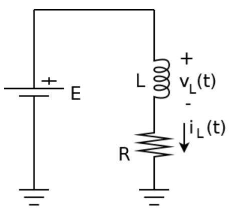
Para calcular el valor de los capacitores, podemos usar el equivalente monofásico, calcular el condesandor por fase necesario y luego transfigurarlo a triángulo. También podemos observar la conenxión trifásica propuesta y observar que los capacitores están sometidos a las tensiones compuestas $U = \sqrt{3}V$. Luego cada uno debe consumir un tercio de la reactiva que queremos compensar:

$Q_{C_C} = -Q/3 = -99 = -(\sqrt{3}|V_1|)^2 w C_C \Rightarrow C_C = \frac{Q}{9|V_1^{|}2w} = 2.2\,\mu F$



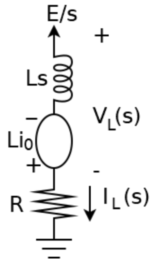
Problema 3

Pasamos al circuito equivalente en Laplace: Vemos que:



a) En el circuito de la figura, la tensión E es constante y la inductancia tiene una carga inicial i_0. Usando Laplace, hallar la tensión $v_L(t)$ y la corriente $i_L(t)$ para todo instante positivo.

$$\frac{E}{s} = (Ls + R)I_L(s) - Li_0 \Rightarrow I_L(s) = \frac{\frac{E}{s} + Li_0}{Ls + R} = \frac{\frac{E}{s}}{Ls + R} + \frac{Li_0}{Ls + R}$$



$$I_L(s) = \frac{E}{L}\frac{1}{s.\left(s+\frac{R}{L}\right)} + \frac{i_0}{s+\frac{R}{L}} = \frac{E}{R}.\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right] + \frac{i_0}{s+\frac{1}{\tau}}$$

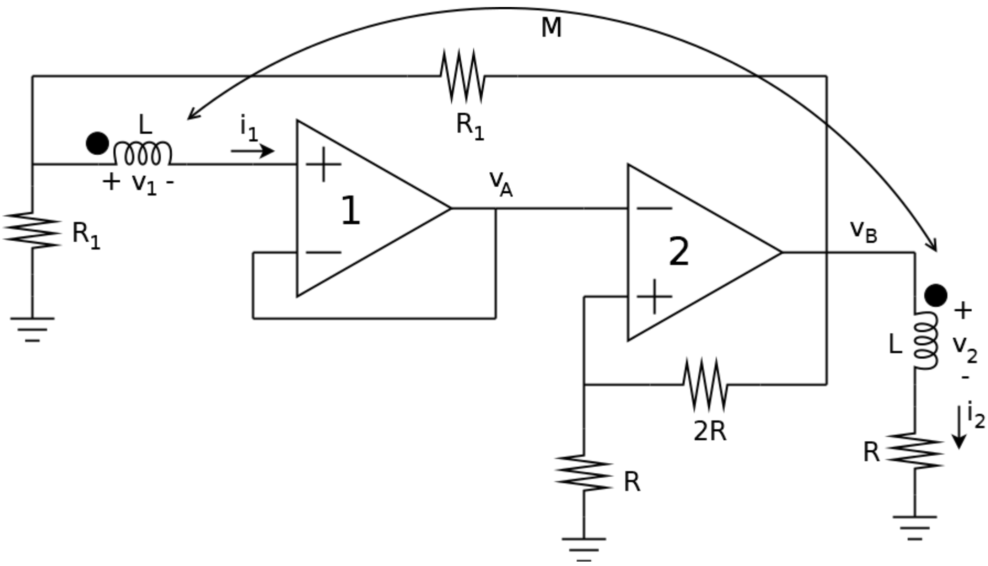
donde hemos aplicado fracciones simples para obtener una expresión sencilla de antitransformar. Entonces

$$i_L(t) = Y(t).\frac{E}{R}.\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + Y(t).i_0.e^{-t/\tau}$$

La tensión en bornes de la inductancia podemos obtenerla en el tiempo como

$$v_L(t) = Y(t).E - R.i_L(t) = Y(t).\left[E - E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - R.i_0.e^{-t/\tau}\right] = Y(t).(E - R.i_0).e^{-t/\tau}$$

A partir de ahora, se considera el circuito de la figura. Los amplificadores operacionales son ideales y están alimentados por $\pm V_{CC}$. El operacional de la derecha funciona como comparador. Las inductancias conforman un transformador simple, con inductancia mutua $M = \frac{L}{2}$. Se introduce la constante de tiempo $\tau = L/R$.



b) A partir de las ecuaciones temporales del transformador simple, demostrar que en este caso $v_2(t) = 2.v_1(t)$.

Recordemos las ecuaciones del transformador simple:

$$\begin{cases} v_1(t) &= L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ \\ v_2(t) &= L_1\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1(t) &= L\frac{di_1}{dt} + \frac{L}{2}\frac{di_2}{dt} \\ \\ v_2(t) &= L\frac{di_2}{dt} + \frac{L}{2}\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Observando el circuito, vemos que la inductancia del primario está conectada directamente a la pata - del seguidor. Al ser un amplificador operacional ideal, tiene resistencia de entrada infinita y, por lo tanto, no permite que circule corriente por la inductancia, por lo que $i_1(t) \equiv 0$ siempre!!! Imponiendo eso en las ecuaciones anteriores la tensión del secundario duplica la del primario. Además, vemos que al no circular corriente por la bobina del primario, lo que sucede del lado del primario no influye en lo que sucede del lado del secundario, esto es, que la inductancia del secundario *actúa como si no tuviera mutua!!!*.

c) Probar que se cumple que $v_A(t) = \frac{1}{2}.v_B(t) - v_1(t)$.

El seguidor es una configuración lineal, por lo que, debido a la ganancia infinita, tenemos el cortocircuito virtual de las patas de entrada del operacional y amnas tensiones de entrada son iguales a la tensión de salida v_A. Al no circula corriente por la inductancia del primario, tenemos presente un divisor de tensión con dos impedancias idénticas, por lo que en cada una cae la mitad de v_B. La tensión v_1 es directamente:

$$v_1(t) = \frac{v_B(t)}{2} - v_A(t) \Rightarrow v_A(t) = \frac{v_B(t)}{2} - v_1(t)$$

d) Se asume que el circuito comienza inicialmente descargado y que la salida del comparador arranca en $+V_{CC}$. Verificar la hipótesis del comparador y analizar el comportamiento del circuito desde $t = 0$ hasta el primer instante (t_1) en el que conmuta el comparador.

Primer tramo

Fijamos el instante inicial $t = 0$, con datos previos nulos y el comparador saturado a $+V_{CC}$. Pasamos al circuito equivalente en Laplace. Vamos a ver la evolución temporal de las tensiones de interés y, en particular, confirmar el estado del comparador y monitorear su validez.

Para ver qué pasa en la rama del secundario, usamos la parte a), con dato previo nulo y $E = +V_{CC}$:

$$i_2(t) = Y(t).\frac{V_{CC}}{R}.\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$
$$v_2(t) = Y(t).V_{CC}.e^{-t/\tau}$$

Observando el circuito, vemos que

$$v_A(t) = \frac{v_B(t)}{2} - v_1(t) \quad , \quad v_A(t) = e_2^-(t) \quad , \quad e_2^+(t) = \frac{v_B(t)}{3}$$

donde hemos usado que: no entra corriente en los operacionales ideales (por la resistencia de entrada infinita) y tenemos cortocircuito virtual en las entradas del seguidor (por la ganancia infinita y por estar en zona lineal). Juntando eso con $v_2(t) = 2.v_1(t)$, obtenemos lo siguiente:

$$v_1(t) = Y(t).\frac{V_{CC}}{2}.e^{-t/\tau}$$

$$v_A(t) = \frac{v_B(t)}{2} - v_1(t) = Y(t).\frac{V_{CC}}{2}.\left[1 - e^{-t/\tau}\right] = e_2^-(t)$$

Estamos en condiciones de verificar o rechazar la hipótesis del comparador. Observemos que la tensión en l apata + es constante y positiva, en tanto que la tensión en la pata - arranca en 0 y es monótona creciente. Por lo tanto, existirá un instante de tiempo $t = t_1$ en el que la pata - alcanza a la pata +, haciendo conmutar al comparador. Debe cumplirse que

$$\frac{V_{CC}}{3} = \frac{V_{CC}}{2}.\left[1 - e^{-t_1/\tau}\right] \Rightarrow \frac{2}{3} = 1 - e^{-t_1/\tau} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{-t_1/\tau} \Rightarrow t_1 = \tau.\ln(3)$$

e) Analizar el segundo tramo del circuito, hasta que vuelve a conmutar el comparador. (No olvidar verificar la hipótesis del comparador).

Segundo tramo

A partir de ahora consideramos un nuevo tramo, para el que definimos una nueva variable temporal $t' = t - t_1$, en el que asumimos que el comparador satura a $-V_{CC}$ (debemos verificarlo!!). Antes, debemos ver qué datos previos tienen las inductancias.

Ya sabemos que $i'_{10} = 0$ y, de las ecuaciones anteriores,

$$i'_{20} = i_2(t = t_1) = \frac{V_{CC}}{R}\left[1 - e^{-t_1/\tau}\right] = \frac{V_{CC}}{R}\left[1 - e^{-\ln(3)}\right] = \frac{2.V_{CC}}{3.R}$$

Para resolver este tramo, esencialmente repetimos lo que hicimos en la parte anterior, salvo que ahora tenemos datos previos en ambas inductancias (debidas a la corriente del secundario).

Para ver lo que sucede en el circuito del secundario, usamos la parte a), con $E = -V_{CC}$ y el dato previo i'_{20}.

$$i_2(t') = Y(t').\frac{-V_{CC}}{R}.\left(1 - e^{-t'/\tau}\right) + Y(t').i_{20}.e^{-t'/\tau} = Y(t').\frac{V_{CC}}{R}.\left[-1 + e^{-t'/\tau} + \frac{2}{3}.e^{-t'/\tau}\right]$$

$$i_2(t') = Y(t').\frac{V_{CC}}{R}.\left[-1 + \frac{5}{3}.e^{-t'/\tau}\right]$$

$$v_2(t') = Y(t').\left(-V_{CC} - R.i'_{20}\right).e^{-t'/\tau} = Y(t').\left(-V_{CC} - \frac{2V_{CC}}{3}\right).e^{-t'/\tau} = -Y(t').\frac{5V_{CC}}{3}.e^{-t'/\tau}$$

Nuevamente:

$$v_1(t') = -Y(t').\frac{5V_{CC}}{6}.e^{-t'/\tau} \quad , \quad v_A(t') = Y(t').V_{CC}.\left[-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}.e^{-t'/\tau}\right] = e_2^-(t')$$

$$e_2^+(t') = -Y(t').\frac{V_{CC}}{3}$$

Tenemos que la pata + del comparador es constante y negativa, en tanto la pata - arranca en un valor positivo y decrece monótonamente hacia $-\frac{V_{CC}}{2}$. Por lo tanto, se verifica la hipótesis del comparador (saturado a $-V_{CC}$) y va a existir un tiempo $t' = t_2$ en el que conmuta de nuevo. Se debe cumplir que

$$-\frac{V_{CC}}{3} = V_{CC}.\left[-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}.e^{-t_2/\tau}\right] \Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}.e^{-t_2/\tau} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.e^{-t_2/\tau} \Rightarrow t_2 = \tau.\ln(5)$$

f) Hallar los datos previos del siguiente tramo y comentar *cualitativamente* cómo evolucionaría el circuito.

Tercer tramo y de ahí en adelante

El siguiente tramo comienza con el comparador saturado a $+V_{CC}$ y el siguiente dato previo en la bobina del secundario:

$$i''_{20} = i_2(t' = t_2) = \frac{V_{CC}}{R}.\left[-1 + \frac{5}{3}.e^{-t_2/\tau}\right] = \frac{V_{CC}}{R}.\left[-1 + \frac{5}{3}.e^{-\ln(5)}\right] = \frac{V_{CC}}{R}.\left[-1 + \frac{1}{3}\right] = -\frac{2V_{CC}}{3R}$$

¿Cómo sigue el circuito? Si bien no es tan directo verlo sin analizar un nuevo tramo, esencialmente el circuito va a tener la pata + del comparador conmutando entre $\pm\frac{V_{CC}}{3}$ y la pata - del comparador moviéndose exponencialmente, con constante de tiempo τ, entre esos valores extremos. Luego del primer tramo *de arranque*, se genera una onda cuadrada simétrica, de periodo $T = 2.t_2$, ya que los tiempos de carga y descarga coinciden. Las siguientes gráficas ilustran la situación.