Teoría de circuitos

Segundo parcial

2^o semestre 2024

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte**.
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No demorarse mucho tiempo en un solo ejercicio**.
- **SER PROLIJO. Explicar y deatllar bien todos los pasos, RESALTANDO los resultados. Expresar los mismos exactamente en el formato pedido. Tener presente que si algo no es claro para el evaluador, se podrían perder puntos de la pregunta**.
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS**.
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS**.
- **Al finalizar la prueba, escanear las hojas y subir el pdf en la tarea específica del EVA.**
- **Se recuerda que la prueba es individual**.

Problema 1 (8 puntos)

Se considera una impedancia trifásica conformada por tres impedancias idénticas, de módulo $|Z|$ y de factor de potencia inductivo igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, conectadas en triángulo. Se alimenta mediante un sistema trifásico equilibrado y perfecto de fuentes en estrella de pulsación ω_0, de valor eficaz E. Se desea compensar la potencia reactiva total consumida por la carga al sistema de fuentes, colocando en paralelo a la carga un triángulo de condensadores idénticos. El valor de capacidad de cada condensador debe ser $C_\Delta =$

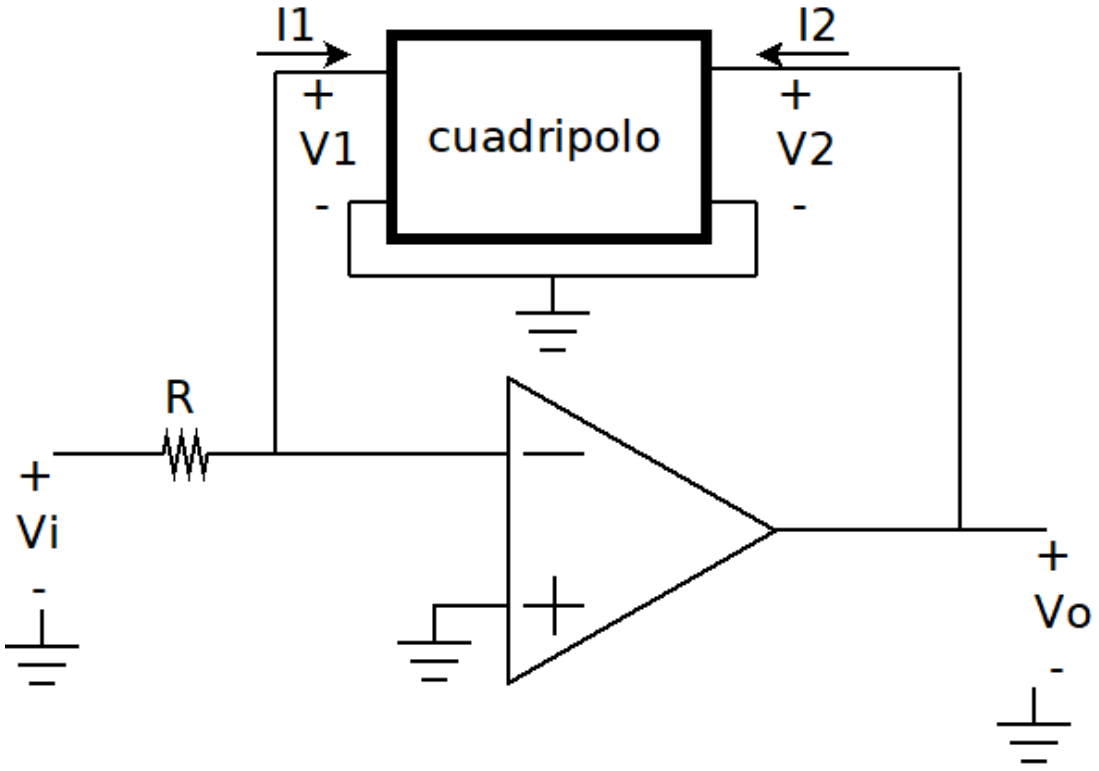
$$(a)\,\frac{1}{3.\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}, \quad (b)\,\frac{1}{9.\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}, \quad (c)\,\frac{1}{\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}, \quad (d)\,\frac{3}{\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}, \quad (e)\,\frac{9.E}{\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}$$

¡¡Justificar bien la respuesta!!

Problema 2 (10 puntos)

Se considera el circuito de la figura. El amplificador operacional es ideal y funciona en zona lineal. El cuadripolo se describe a través de sus impedancias de vacío $z_{11}(s), z_{12}(s), z_{21}(s), z_{22}(s)$:

$$\begin{cases} V_1 &= z_{11}.I_1 + z_{12}.I_2 \\ V_2 &= z_{21}.I_1 + z_{22}.I_2 \end{cases}$$



a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

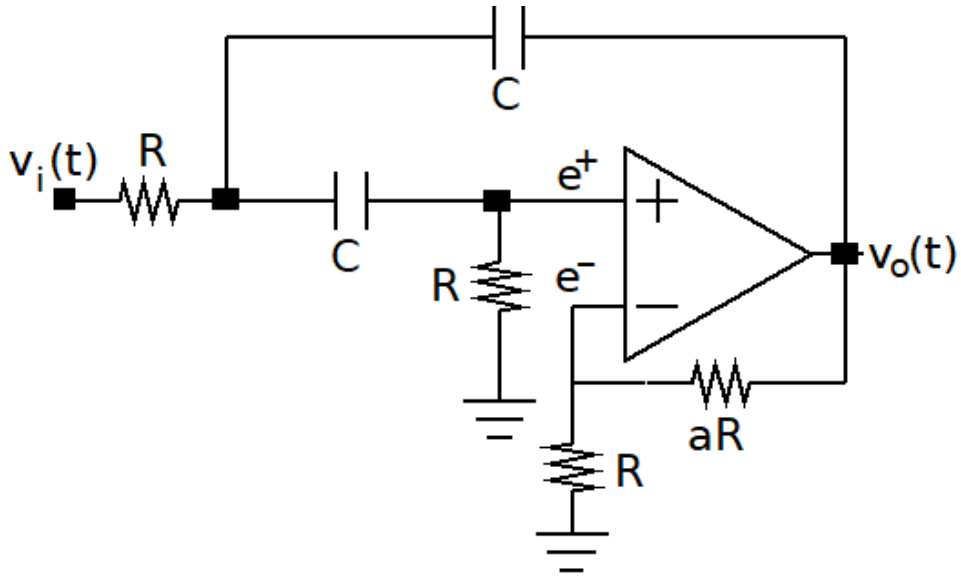
b) Se sabe que el cuadripolo es recíproco y que a cierta frecuencia de trabajo ω_0 se cumple:

$$z_{11}(j\omega_0) = 20k\Omega, \quad z_{12}(j\omega_0) = 10k\Omega, \quad z_{22}(j\omega_0) = 1k\Omega, \quad R = 10k\Omega$$

Si se inyecta la señal $v_i(t) = E\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$, hallar la respectiva respuesta en régimen $v_o(t)$.

Problema 3 (19 puntos)

Se considera el circuito de la figura, con el amplificador operacional ideal, funcionando en zona lineal.



a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

b) Introduciendo la pulsación auxiliar $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, hallar a para que:

$$H(s) = K.\frac{\omega_0.s}{(s-\omega_0).\left(s+\frac{\omega_0}{4}\right)}$$

Indicar el valor resultante de K y verificar que es negativo. Se sugiere trabajar de ahora en más con esta expresión.

c) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de H, explicando claramente cómo se procede.

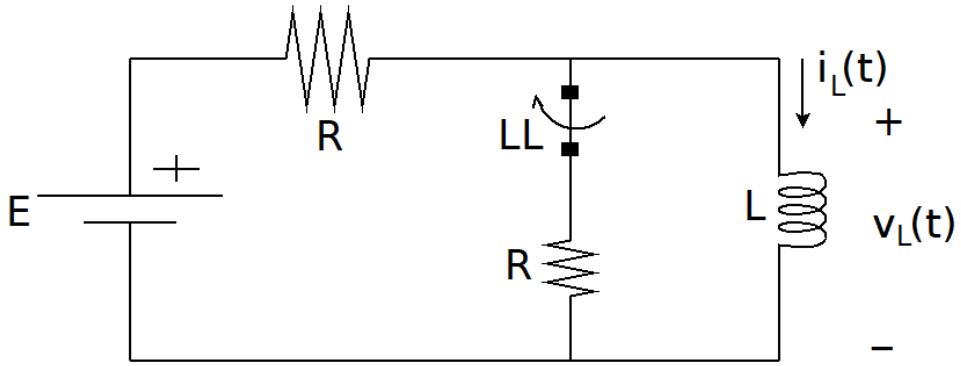
c) Hallar los valores exactos de módulo y fase de H para las frecuencias críticas y ubicarlos en los diagramas anteriores.

d) Hallar la respuesta del circuito a un escalón de amplitud E.

e) Si el amplificador operacional está alimentado con $\pm V_{CC}$, hallar la ecuación que define el instante de tiempo en que el amplificador satura.

Problema 4 (13 puntos)

Se considera el circuito de la figura, con la llave LL cerrada. Al estar funcionando en régimen de continua, podemos considerar que la bobina está cortocircuitada. Se introduce la constante de tiempo $\tau = \frac{L}{R}$.



a) En un instante que llamaremos $t = 0$, se abre la llave LL. Hallar la expresión temporal de la tensión en bornes de la bobina y la corriente a través de ella, $v_L(t)$, $i_L(t)$, para t positivo.

b) ¿Es consistente el resultado con la situación previa a abrir la llave?

c) En $t = 2\tau$ se vuelve a cerrar la llave LL y, al mismo tiempo, se triplica el valor de la fuente de continua, pasando a $3E$. Redefiniendo un nuevo origen de tiempos $t' = 0$, volver a hallar $v_L(t')$ e $i_L(t')$, para t' positivo.

d) Bosquejar la tensión y la corriente por la bobina para todo instante positivo.

Solución

Problema 1 (puntos)

Se considera una impedancia trifásica conformada por tres impedancias idénticas, de módulo $|Z|$ y de factor de potencia inductivo igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, conectadas en triángulo. Se alimenta mediante un sistema trifásico equilibrado y perfecto de fuentes en estrella de pulsación ω_0, de valor eficaz E. Se desea compensar la potencia reactiva total consumida por la carga al sistema de fuentes, colocando en paralelo a la carga un triángulo de condensadores idénticos. El valor de capacidad de cada condensador debe ser $C_\Delta =$

$$(a)\ \frac{1}{3.\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}, \quad (b)\ \frac{1}{9.\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}, \quad (c)\ \frac{1}{\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}, \quad (d)\ \frac{3}{\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}, \quad (e)\ \frac{9.E}{\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}$$

¡¡Justificar bien la respuesta!!

Observemos que la opción (e) es dimensionalmente incorrecta. Para ver de las restantes cuál es la correcta, podemos hacer el cálculo del condensador para compensar la reactiva. La potencia aparente consumida al sistema de fuentes está dada por la expresión

$$S = 3.V_Z\overline{I_Z} = 3.|V_Z|^2.\frac{1}{\overline{Z}} = 3.\frac{|V_Z|^2}{|Z|^2}.Z = P + jQ$$

siendo V_Z e I_Z los valores eficaces de la tensión en bornes de Z y la corriente a través de Z, medidas con la convención habitual. Sabemos que $Q = |S|.sen(\varphi)$, siendo φ el argumento de Z. Tenemos que

$$sen(\varphi) = +\sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(positivo, ya que el factor de potencia es inductivo).

Entonces

$$Q = \left| 3.\frac{|V_Z|^2}{|Z|^2}.Z \right| .sen(\varphi) = 3.\frac{|V_Z|^2}{|Z|}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.\frac{|V_Z|^2}{|Z|}$$

Determinemos $|V_Z|$. Acá hay varios caminos posibles. Uno es encontrar el equivalente monofásico del circuito, pasando la carga en triángulo a una estrella equivalente. Otro es observar que V_Z coincide con la tensión compuesta, por lo que $|V_Z| = \sqrt{3}.E$. Entonces

$$Q = \frac{3.(\sqrt{3}.E)^2}{\sqrt{2}.|Z|} = \frac{9.E^2}{\sqrt{2}.|Z|}$$

Al colocar un triángulo de condensadores idénticos en paralelo con la carga, cada condensador ve la tensión compuesta. Entonces, la reactiva del banco de condensadores es

$$Q_C = -3.|\sqrt{3}.E|^2.C.\omega_0$$

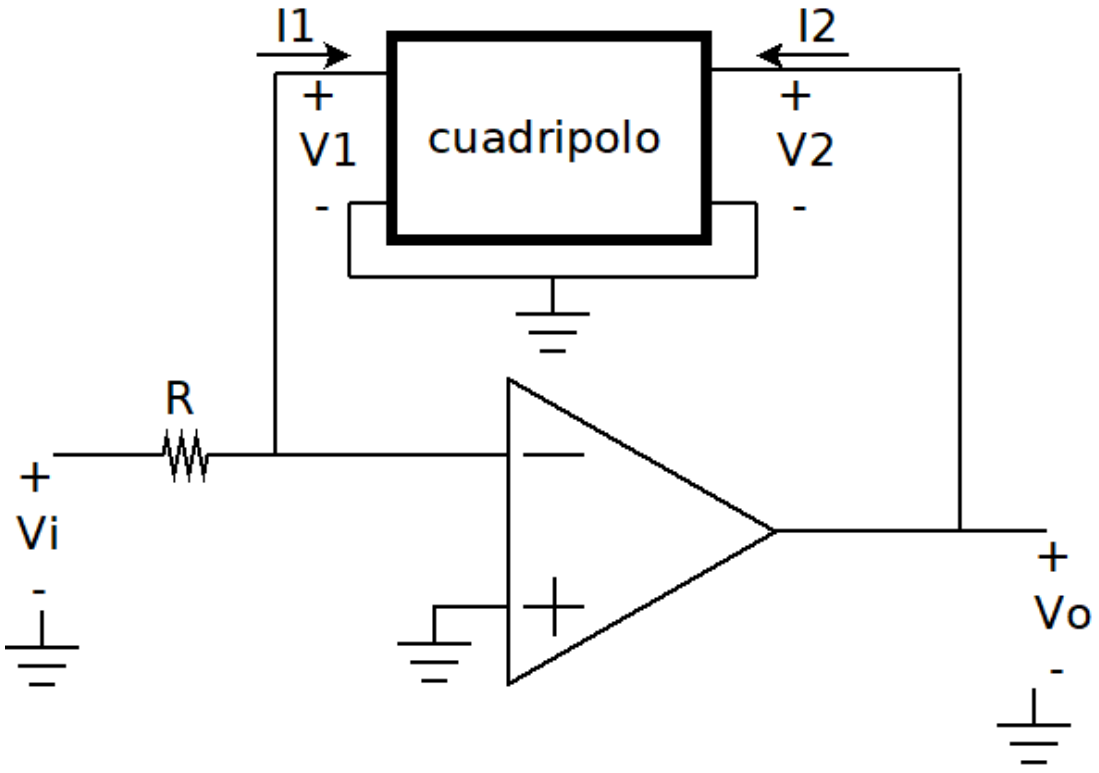
Para compensar la reactiva consumida a la fuente, se debe cumplir que

$$Q + Q_C = 0 \Rightarrow 9.|E|^2.C.\omega_0 = \frac{9.E^2}{\sqrt{2}.|Z|} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2}.|Z|.\omega_0}$$

La opción correcta es la (c).

Problema 2 (puntos)

Se considera el circuito de la figura. Los amplificadores operacionales son ideales y funcionan en zona lineal. El cuadripolo se describe a través de sus impedancias de vacío $z_{11}(s), z_{12}(s), z_{21}(s), z_{22}(s)$.



a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

Usamos que el operacional es ideal y funciona en zona lineal, por lo que tenemos: cortocircuito virtual (por la ganancia infinita) y que no entra corriente por las patas + y - (por la impedancia de entrada infinita). Entonces, la corriente que viene desde la entrada vale $\frac{V_i}{R} = I_1$. Además, mirando laas conexiones del circuito: $V_1 = 0$ y $V_2 = V_o$.

Por otro lado, conocemos las ecuaciones que describen el cuadripolo a partir de las impedancias de vacío:

$$\begin{cases} V_1 &= z_{11}.I_1 + z_{12}.I_2 \\ V_2 &= z_{21}.I_1 + z_{22}.I_2 \end{cases}$$

Entonces, usando la primera ecuación del cuadripolo:

$$0 = z_{11}.\frac{V_i}{R} + z_{12}.I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{z_{11}}{z_{12}}.\frac{V_i}{R}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación del cuadripolo:

$$V_2 = V_o = z_{21}.\frac{V_i}{R} + z_{22}.\left(-\frac{z_{11}}{z_{12}}.\frac{V_i}{R}\right) = \left(z_{21} - \frac{z_{11}.z_{22}}{z_{12}}\right).\frac{V_i}{R} = \left(\frac{z_{21}.z_{12} - z_{11}.z_{22}}{z_{12}}\right).\frac{V_i}{R}$$

Entonces

$$H(s) = \frac{z_{21}(s).z_{12}(s) - z_{11}(s).z_{22}(s)}{R.z_{12}(s)}$$

b) Se sabe que el cuadripolo es recíproco y que a cierta frecuencia de trabajo ω_0 se cumple:

$$z_{11}(j\omega_0) = 20k\Omega, \quad z_{12}(j\omega_0) = 10k\Omega, \quad z_{22}(j\omega_0) = 1k\Omega, \quad R = 10k\Omega$$

Si se inyecta la señal $v_i(t) = E\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$, hallar la respectiva respuesta en régimen $v_o(t)$.

Sabemos que la respuesta en régimen tendrá la forma siguiente:

$$v_o(t) = E.|H(j\omega_0)|.\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4} + argH(j\omega_0)\right)$$

por lo que basta con hallar módulo y fase de $H(j\omega_0)$. Con los valores dados, y usando que el cuadripolo es recíproco ($z_{21} = z_{12}$):

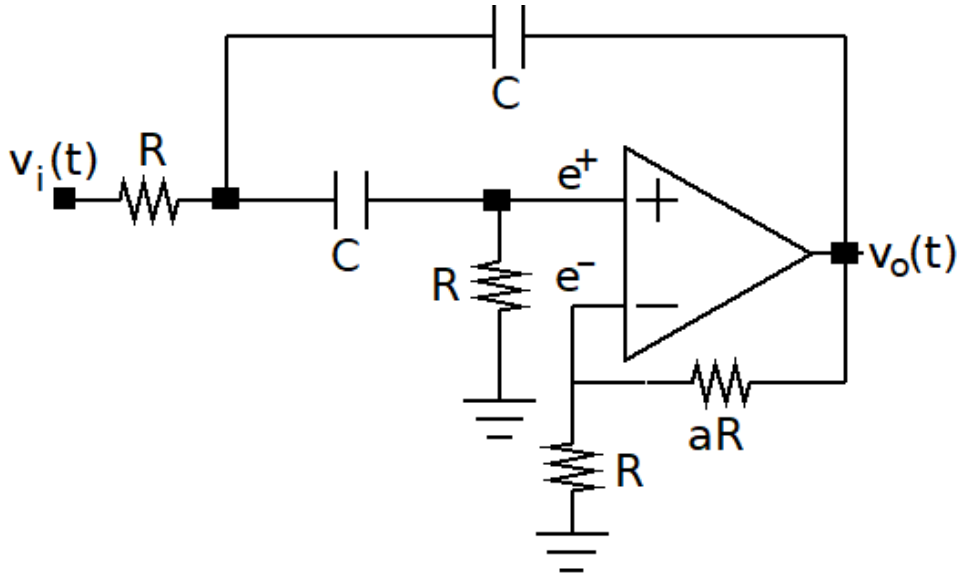
$$H(j\omega_0) = \frac{z_{21}(j\omega_0).z_{12}(j\omega_0) - z_{11}(j\omega_0).z_{22}(j\omega_0)}{R.z_{12}(j\omega_0)} = \frac{10k\Omega.10k\Omega - 20k\Omega.1k\Omega}{10k\Omega.10k\Omega} = \frac{100-20}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Entonces, la respuesta en régimen es

$$v_o(t) = \frac{4}{5}.E.\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

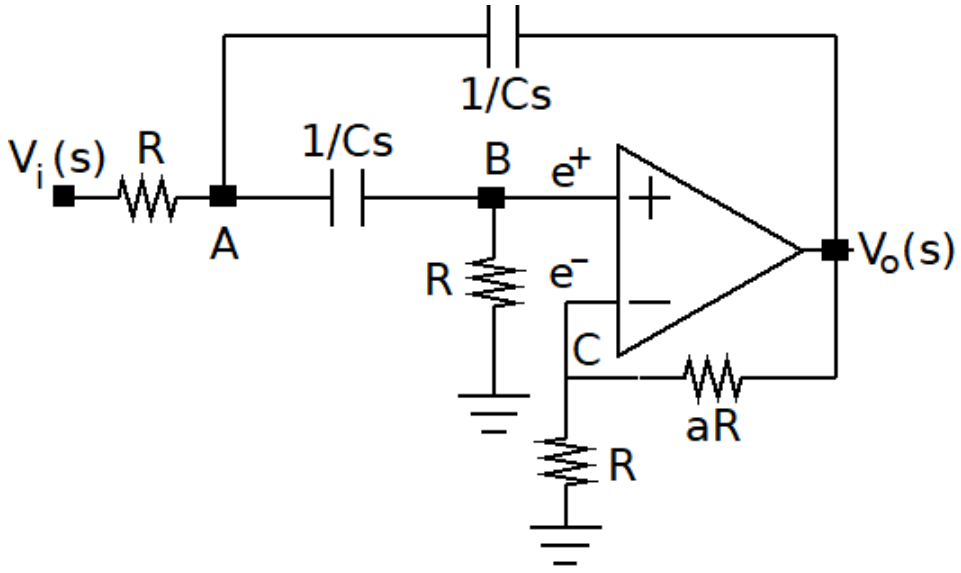
Problema 3 (puntos)

Se considera el circuito de la figura, con el amplificador operacional ideal, funcionando en zona lineal.



a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

Primeramente, pasamos al circuito equivalente en Laplace, introduciendo las respectivas impedancias de las componentes. Al quere hallar la transferencia, está implícito que los datos previos son nulos.



Para resolver el circuito, observamos que basta con plantear los nudos A, B y C, teniendo en cuenta que por las idealidades del opamp, no entra corriente por las patas de entrada y tenemos el cortocircuito virtual de las mismas.

Nudo A:

$$\frac{V_i - V_A}{R} = Cs.(V_A - V_o) + Cs.(V_A - V_B)$$

Nudo B:

$$Cs.(V_A - V_B) = \frac{V_B}{R}$$

Nudo C (divisor de tensión):

$$V_C = V_o.\frac{R}{aR + R} = \frac{V_o}{(1+a)}$$

Usando que $V_B = V_C$, operamos con estas identidades:

$$\frac{V_i - V_A}{R} = Cs.(V_A - V_o) + \frac{V_C}{R} = Cs.(V_A - V_o) + \frac{V_o}{(1+a)R}$$

$$\frac{V_i}{R} = V_A.\left[\frac{1}{R} + Cs\right] + V_o.\left[\frac{1}{(1+a)R} - Cs\right]$$

$$\frac{V_i}{R} = V_A.\left[\frac{1+RCs}{R}\right] + V_o.\left[\frac{1-(1+a)RCs}{(1+a)R}\right]$$

Por otro lado:

$$Cs.V_A = V_B.\left[\frac{1}{R} + Cs\right] = \frac{V_o}{(1+a)}.\left[\frac{1+RCs}{R}\right] \Rightarrow V_A = \frac{V_o}{(1+a)}.\left[\frac{1+RCs}{RCs}\right]$$

Combinando ambos resultados:

$$\frac{V_i}{R} = \frac{V_o}{(1+a)}.\left[\frac{1+RCs}{RCs}\right].\left[\frac{1+RCs}{R}\right] + V_o.\left[\frac{1-(1+a)RCs}{(1+a)R}\right]$$

$$\frac{V_i}{R} = V_o.\left[\frac{(1+RCs)^2}{(1+a)R^2Cs} + \frac{1-(1+a)RCs}{(1+a)R}\right]$$

$$\frac{V_i}{R} = V_o.\left[\frac{1+2RCs+R^2C^2s^2}{(1+a)R^2Cs} + \frac{RCs-(1+a)R^2C^2s^2}{(1+a)R^2Cs}\right]$$

$$\frac{V_i}{R} = V_o.\left[\frac{1+(2+1)RCs+(1-1-a)R^2C^2s^2}{(1+a)R^2Cs}\right] = V_o.\left[\frac{1+3RCs-aR^2C^2s^2}{(1+a)R^2Cs}\right]$$

Entonces

$$\boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(1+a)RCs}{1+3RCs-aR^2C^2s^2}}$$

b) Introduciendo la pulsación auxiliar $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, hallar a para que:

$$H(s) = K.\frac{\omega_0.s}{(s-\omega_0).\left(s+\frac{\omega_0}{4}\right)}$$

Indicar el valor resultante de K.

Operemos sobre la expresión

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(1+a)RCs}{1+3RCS-aR^2C^2s^2} = \frac{(1+a)RCs}{-aR^2C^2.\left(\frac{1}{-aR^2C^2}+\frac{3RC}{-aR^2C^2}s+s^2\right)}$$

$$H(s) = -\frac{1+a}{a}.\frac{\frac{1}{RC}s}{-\frac{1}{aR^2C^2}-\frac{3}{aRC}s+s^2} = -\frac{1+a}{a}.\frac{\omega_0 s}{s^2-\frac{3}{a}\omega_0 s-\frac{1}{a}\omega_0^2}$$

Comparamos esta expresión con la que queremos obtener:

$$H_{deseada}(s) = K.\frac{\omega_0.s}{(s-\omega_0).\left(s+\frac{\omega_0}{4}\right)} = K.\frac{\omega_0.s}{s^2-\frac{3}{4}\omega_0 s-\frac{\omega_0^2}{4}}$$

Observamos que se debe cumplir:

$$a = 4 \quad , \quad K = -\frac{1+a}{a} = -\frac{5}{4}$$

$$H(s) = -\frac{5}{4}.\frac{\omega_0.s}{(s-\omega_0).\left(s+\frac{\omega_0}{4}\right)}$$

c) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de H, explicando claramente cómo procede.

Para deducir los diagramas de Bode asintóticos, hacemos un análisis por bandas. Primero identificamos las frecuencias críticas, es decir, las raíces del numerador y denominador. En el numerador tenemos la raiz nula. En el denominador hay dos raíces reales distintas: ω_0 y $-\frac{\omega_0}{4}$. Tomando los respectivos módulos en orden creciente, obtenemos tres bandas de análisis: una de baja frecuencia, desde continua hasta $\frac{\omega_0}{4}$, una banda intermedia entre $\frac{\omega_0}{4}$ y ω_0 y una banda de alta frecuencia desde ω_0 hasta infinito. Notemos desde ya que como las frecuencias críticas distan menos de una década (están a dos octavas), la aproximación asintótica en la banda intermedia no será muy buena.

Evaluemos en $s = j\omega$

$$H(j\omega) = -\frac{5}{4}.\frac{\omega_0.j\omega}{(j\omega-\omega_0).\left(j\omega+\frac{\omega_0}{4}\right)}$$

y procedamos a hacer el análisis asintótico, que esencialmente consiste en despreciar parte real o parte imaginaria de los términos de primer orden presentes en la expresión:

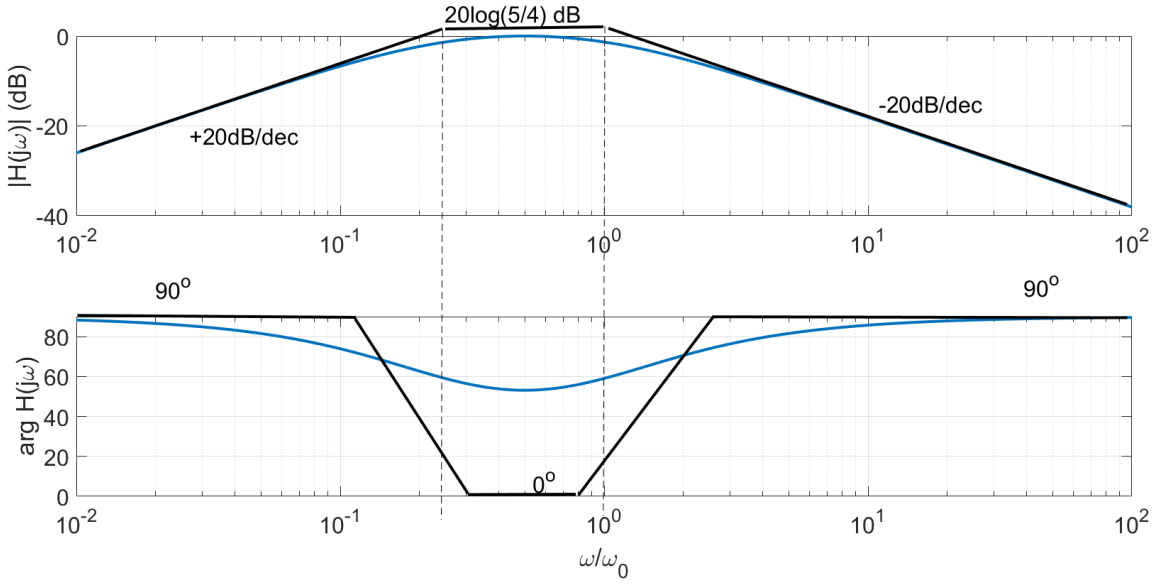
$$\omega \ll \frac{\omega_0}{4} \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{5}{4}.\frac{\omega_0.j\omega}{(-\omega_0).\left(\frac{\omega_0}{4}\right)} = +\frac{5j\omega}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & +20\log\left(\frac{5}{\omega_0}\right)+20\log(\omega)\ dB \\ arg(H) & \approx & +90^o\ (\acute{o}\ -270^o) \end{cases}$$

$$\frac{\omega_0}{4} \ll \omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{5}{4}.\frac{\omega_0.j\omega}{(-\omega_0).(j\omega)} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |H| & \approx & 20\log(5/4)\ dB \\ arg(H) & \approx & 0^o\ (\text{ó}\ \pm 360^o) \end{array} \right.$$

$$\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{5}{4}.\frac{\omega_0.j\omega}{(j\omega).(j\omega)} = -\frac{5\omega_0}{4j\omega} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |H| & \approx & 20\log(5\omega_0/4) - 20\log(\omega)\ dB \\ arg(H) & \approx & +90^o \quad (\text{ó}\ -270^o) \end{array} \right.$$

Como la fase está definida a menos de múltiplos enteros de 2π, elegimos uno de los posibles valores para *anclar* del diagrama de Bode de fase. Tomamos $+90^o$. Luego seguimos de manera consistente. Como las raíces involucradas son reales y simples, solo pueden aportar variaciones de $\pm 90^o$, por lo que en la segunda banda tendremos la fase asintótica 0^o. Para la tercer banda entonces resulta una fase asintótica de 90^o. Estas asíntotas horizontales las unimos por curvas continuas, ya que la fase es continua, al no haber singularidades en el eje imaginario.

La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de $H(j\omega)$. En negro se muestran los diagramas asintóticos, en tanto en azul se muestran los diagramas reales. Se señalan también las frecuencias críticas. Se observa un comportamiento del módulo de tipo *pasabanda*, filtrando las altas y bajas frecuencias. Es clara la pobre aproximación en la zona entre las dos frecuencias críticas, especialmente en la fase.



c) Hallar los valores exactos de módulo y fase de H para las frecuencias críticas y ubicarlos en los diagramas anteriores.

Miremos primero $\omega = \omega_0$:

$$H(j\omega_0) = -\frac{5}{4}.\frac{\omega_0.j\omega_0}{(j\omega_0 - \omega_0).\left(j\omega_0 + \frac{\omega_0}{4}\right)} = H(j\omega) = -\frac{5}{4}.\frac{j}{(j-1).\left(j + \frac{1}{4}\right)}$$

$$|H(j\omega_0)| = \frac{5}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{1+\frac{1}{16}}} = \frac{5}{4}.\frac{4}{\sqrt{2}.\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{2}.\sqrt{17}} \approx 0.85 \quad (-1,3\,dB)$$

$$arg\,H(j\omega_0) = 180^o + 90^o - 135^o - atan(4) \approx 59^o$$

Miremos ahora $\omega = \frac{\omega_0}{4}$:

$$H(j\omega_0/4) = -\frac{5}{4}.\frac{\omega_0.j\frac{\omega_0}{4}}{(j\frac{\omega_0}{4}-\omega_0).\left(j\frac{\omega_0}{4}+\frac{\omega_0}{4}\right)} = H(j\omega) = -\frac{5}{4}.\frac{\frac{j}{4}}{(\frac{j}{4}-1).\frac{1}{4}.(j+1)}$$

$$|H(j\omega_0/4)| = \frac{5}{4}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{16}}.\sqrt{2}} = \frac{5}{4}.\frac{4}{\sqrt{2}.\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{2}.\sqrt{17}} \approx 0.85 \quad (-1,3\,dB)$$

$$arg\,H(j\omega_0/4) = 180^o + 90^o - (atan(1/16)+180) - 45^o \approx 59^o$$

d) Hallar la respuesta del circuito a un escalón de amplitud E.

En Laplace,

$$V_o(s) = H(s).V_i(s) = -\frac{5}{4}.\frac{\omega_0.s}{(s-\omega_0).\left(s+\frac{\omega_0}{4}\right)}.\frac{E}{s} = -\frac{5E\omega_0}{4}.\left[\frac{\frac{4}{5\omega_0}}{s-\omega_0} - \frac{\frac{4}{5\omega_0}}{s+\frac{\omega_0}{4}}\right]$$

donde hemos aplicado fracciones simples. Entonces

$$v_o(t) = -Y(t).E.\left[e^{+\omega_0 t} - e^{-\frac{\omega_0}{4}t}\right]$$

e) Si el amplificador operacional está alimentado con $\pm V_{CC}$, hallar la ecuación que define el instante de tiempo en el que el mplificador satura.

Vemos que $v_o(t)$ diverge a $+\infty$, por lo que el operacional saturará a $-V_{CC}$, en el instante $t = T$ en el que se cumpla

$$\boxed{-V_{CC} = -E.\left[e^{+\omega_0 T} - e^{-\frac{\omega_0}{4}T}\right]} \Rightarrow \frac{V_{CC}}{E} = e^{+\omega_0 T} - e^{-\frac{\omega_0}{4}T} =$$

La ecuación recuadrada es la respuesta a la pregunta. Si ponemos $\alpha = e^{\omega_0 T}$, nos queda

$$\frac{V_{CC}}{E} = \alpha - \alpha^{-\frac{1}{4}} = g(\alpha)$$

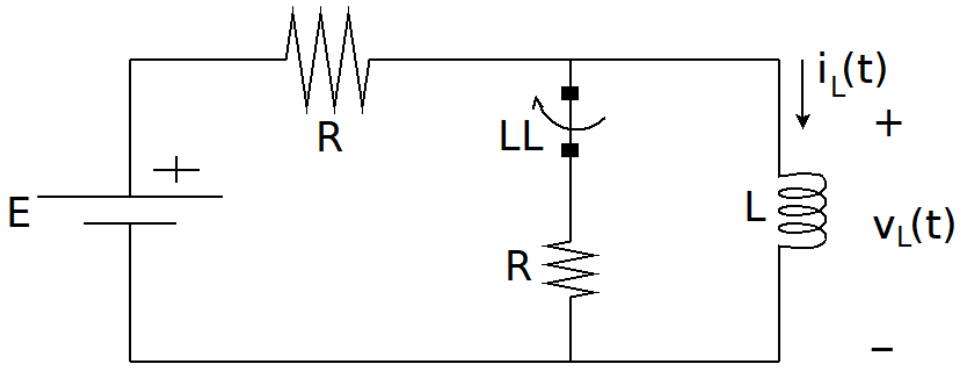
La función $g : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ arranca en $-\infty$ y es monótona creciente, tendiendo a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$, ya que

$$g'(\alpha) = 1 + \frac{1}{4}\alpha^{-\frac{3}{4}}$$

Entonces, existirá un único instante de tiempo positivo en el cual el operacional satura.

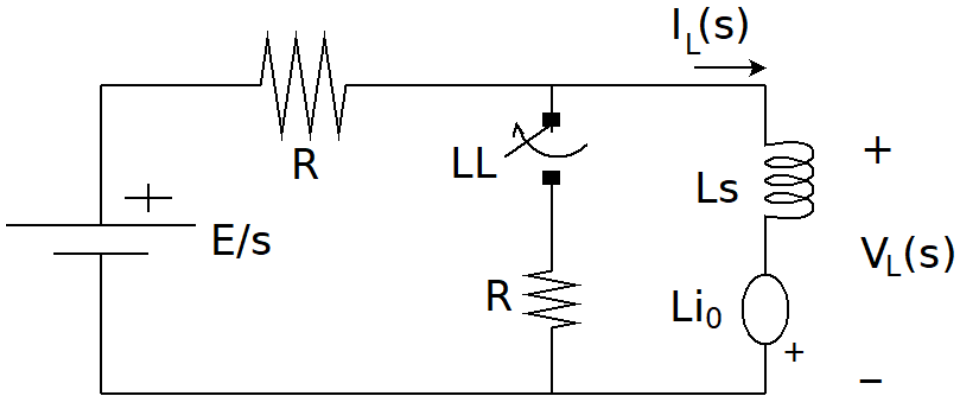
Problema 4 (puntos)

Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen de continua, es decir, podemos considerar que la bobina está cortocircuitada. Se introduce la constante de tiempo $\tau = \frac{L}{R}$.



a) En un instante que llamaremos $t = 0$, se abre la llave LL. Hallar la expresión temporal de la tensión en bornes de la bobina y la corriente a través de ella ($v_L(t)$, $i_L(t)$).

Cuando se abre la llave, al estar la bobina cortocircuitada. La corriente que circula por ella en el instante previo es $i_0 = \frac{E}{R}$, ya que no va a haber corriente por la resistencia vertical. Este valor constituye el dato previo del tramo que vamos a analizar. Entonces, el circuito en Laplace al abrirse la llave resulta ser el siguiente.



La corriente $I_L(s)$ coincide con la corriente que entrega la fuente de valor E/s. Al ser una sola malla, la corriente vale:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s} + Li_0}{R + Ls} = \frac{1}{L}.\frac{\frac{E}{s} + Li_0}{s + \frac{R}{L}} = \frac{E}{L}.\left[\frac{1}{s.\left(s + \frac{R}{L}\right)}\right] + \frac{i_0}{s + \frac{R}{L}}$$

Hacemos fracciones simples:

$$I(s) = \frac{E}{L}.\left[\frac{\frac{L}{R}}{s} - \frac{\frac{L}{R}}{s+\frac{R}{L}}\right] + \frac{i_0}{s+\frac{R}{L}} = \frac{E}{R}.\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right] + \frac{i_0}{s+\frac{R}{L}}$$

Pasamos al tiempo:

$$i_L(t) = Y(t).\frac{E}{R}.\left[1-e^{-t/\tau}\right] + Y(t).i_0.e^{-t/\tau} = Y(t).\frac{E}{R}.\left[1-e^{-t/\tau}\right] + Y(t).\frac{E}{R}.e^{-t/\tau}$$

$$i_L(t) = Y(t).\frac{E}{R}$$

Observemos que abrir la llave no impacta en el estado del circuito. Esto se debe a que la llave se encuentra en una rama por la que no está pasando corriente al momento de cambiar de estado!! La tensión en bornes de la inductancia la podemos hallar en Laplace, como

$$V_L(s) = Ls.I(s) - Li_0$$

o en el tiempo, por ejemplo como

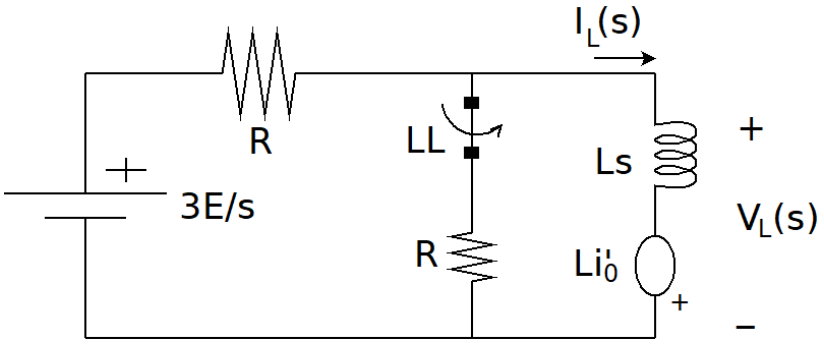
$$v_L(t) = Y(t).E - R.i_L(t) = Y(t).E - Y(t).E = 0$$

(se sugiere verificar que por Laplace se llega al mismo resultado!!!)

Entonces, al abrir la llave el circuito sigue en régimen de continua, con la bobina cortocircuitada.

b) En $t = 2\tau$ se vuelve a cerrar la llave LL y, al mismo tiempo, se triplica el valor de la fuente de continua, pasando a $3E$. Redefiniendo un nuevo origen de tiempos $t' = 0$, volver a hallar $v_L(t')$ e $i_L(t')$.

La siguiente figura muestra el nuevo circuito equivalente en Laplace.



El nuevo dato previo i'_0 se calcula a partir del tramo anterior, evaluando en $t = 2\tau$:

$$i'_0 = \frac{E}{R}$$

Planteamos el nudo central del circuito:

$$\frac{\frac{3E}{s} - V_L(s)}{R} = \frac{V_L(s)}{R} + \frac{V_L(s) + Li'_0}{Ls}$$

$$\frac{3E}{Rs} = V_L(s).\left[\frac{2}{R} + \frac{1}{Ls}\right] + \frac{i'_0}{s} = V_L(s).\left[\frac{2Ls + R}{RLs}\right] + \frac{i'_0}{s}$$

$$V_L(s) = \left[\frac{3E}{Rs} - \frac{i'_0}{s}\right].\left[\frac{RLs}{2Ls + R}\right] = \frac{1}{2}.\left[\frac{3E}{Rs} - \frac{i'_0}{s}\right].\left[\frac{Rs}{s + \frac{R}{2L}}\right]$$

$$V_L(s) = \frac{\frac{3E}{2}}{s + \frac{R}{2L}} - \frac{1}{2}.\frac{Ri'_0}{s + \frac{R}{2L}} = \left[\frac{3E}{2} - \frac{Ri'_0}{2}\right].\frac{1}{s + \frac{R}{2L}}$$

Como $i'_0 = \frac{E}{R}$, entonces

$$V_L(s) = \left[\frac{3E}{2} - \frac{E}{2}\right].\frac{1}{s + \frac{R}{2L}} = \frac{E}{s + \frac{R}{2L}}$$

$$v_L(t') = Y(t').E.e^{-t'/2\tau}$$

La corriente por la inductancia la podemos calcular en Laplace, como

$$I_L(s) = \frac{V_L(s) + Li'_0}{Ls}$$

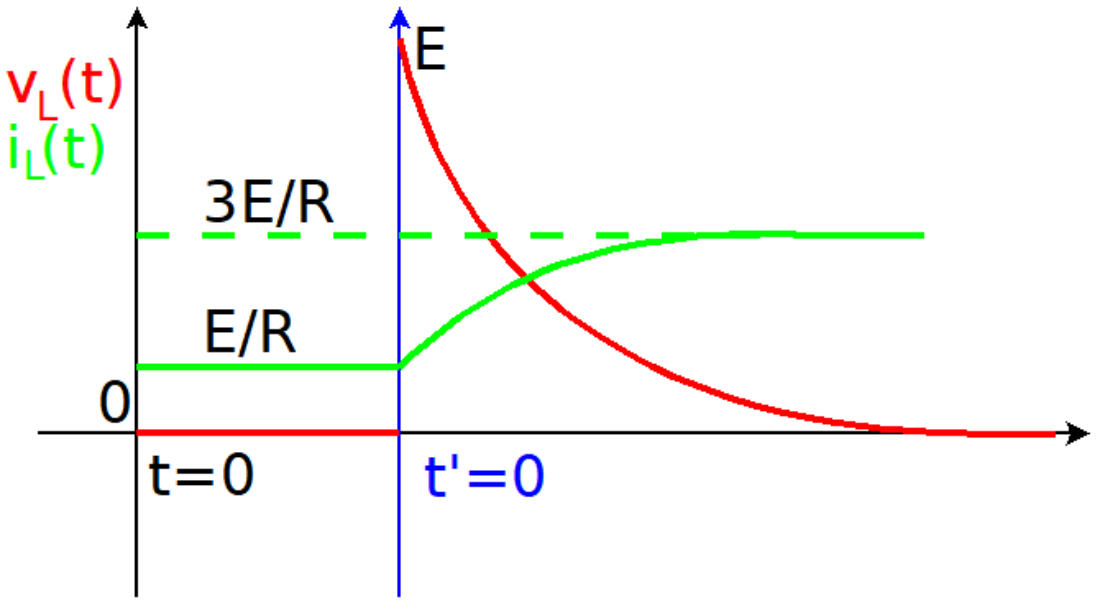
o en el tiempo, como

$$i_L(t') = Y(t').\frac{3E - v_L(t')}{R} - Y(t').\frac{v_L(t')}{R} = Y(t).\frac{3E - 2v_L(t')}{R}$$

$$i_L(t') = Y(t').\frac{E}{R}.\left[3 - 2.e^{-t'/2\tau}\right] = Y(t').\frac{E}{R}.\left[3 - 2e^{-t'/2\tau}\right]$$

Observemos que en $t' = 0$ ($t = 2\tau$), la corriente resulta ser continua, algo que no sucede con la tensión. Si la corriente por la inductancia no resultara continua, tendríamos una δ de tensión a través de las resistencias, algo que no puede suceder!!

c) Bosquejar la tensión y la corriente por la bobina para todo instante positivo.


$v_L(t)$
$i_L(t)$
E
3E/R
E/R
0
t=0
t'=0