

# Teoría de circuitos

Segundo parcial

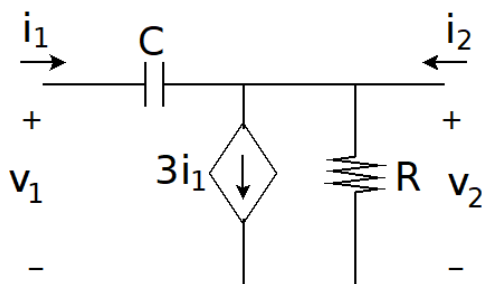
2º semestre 2023

## Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No demorarse mucho tiempo en un solo ejercicio.
- **SER PROLIJO.** Explicar y detallar bien todos los pasos, **RESALTANDO** los resultados. Expresar los mismos exactamente en el formato pedido. Tener presente que si algo no es claro para el evaluador, se podrían perder puntos de la pregunta.
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- Al finalizar la prueba, escanear las hojas y subir el pdf en la tarea específica del EVA.
- Se recuerda que la prueba es individual.

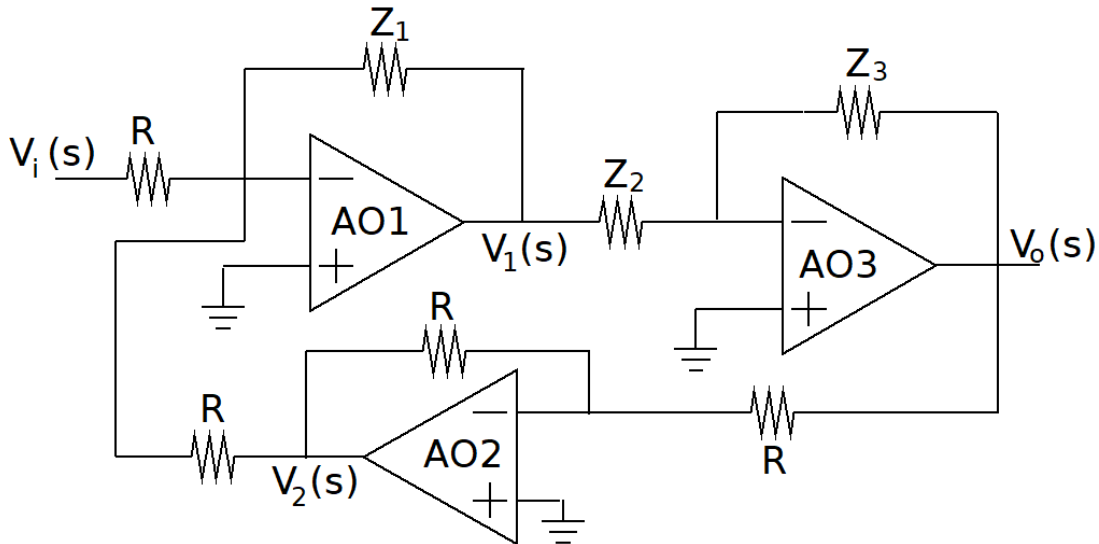
## Problema 1 (8 puntos)

- a) Si se carga el lado 2 de un cuadripolo con una impedancia  $Z_L(s)$ , hallar la impedancia vista desde el lado 1 en función de los parámetros híbridos ( $h$ ).
- b) Se considera el cuadripolo de la figura, que tiene una fuente de corriente dependiente. En Laplace, hallar los parámetros  $h$ .



Problema 2 (20 puntos)

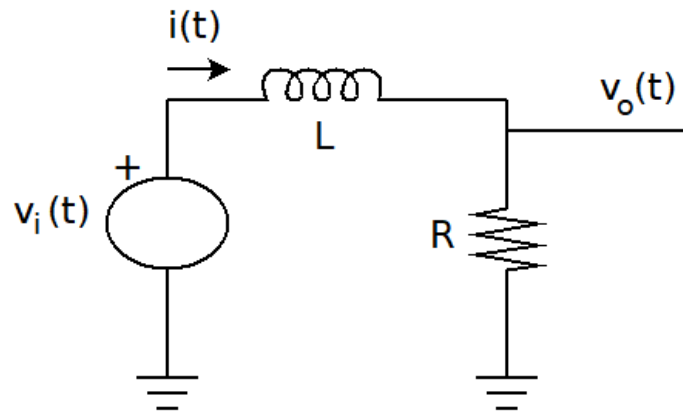
Se considera el circuito de la figura. Los amplificadores operacionales son ideales y funcionan en zona lineal.



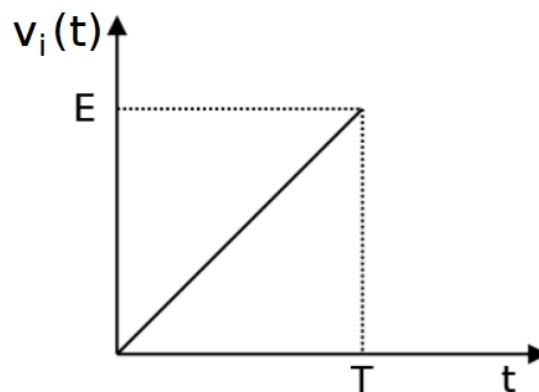
- a) i) Hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$  (primero identificar configuraciones!!).
- ii) Se sabe que  $Z_1 = R + Ls$ ,  $Z_2 = Ls$ ,  $Z_3 = 1/Cs$ . Se introduce la pulsación auxiliar  $\omega_0 = 1/RC$ . Se cumple también que  $R/L = 9\omega_0$ . Simplificar la expresión de  $H(s)$  y escribirla como un cociente de polinomios en  $s$ .
- iii) Verificar que existen  $K$  y  $\omega_n$  positivos y  $\zeta \in (-1, 1)$  tal que

$$H(s) = K \cdot \frac{\omega_n (s + 3\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- b) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de  $H$ , explicando claramente cómo procede.
- c) Hallar la distancia entre el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico para la frecuencia  $\omega_n$ .
- d) Hallar la expresión temporal exacta de la respuesta en régimen a una entrada sinusoidal de pulsación  $\omega_n$  y amplitud  $5V$ .

Problema 3 (15 puntos)

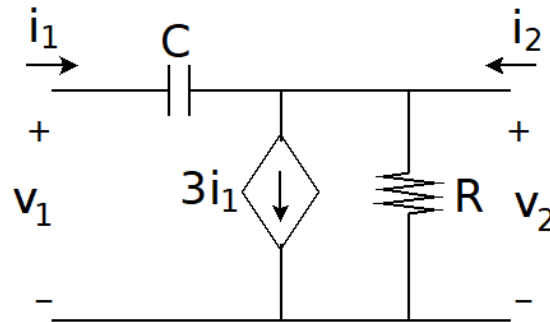
- a) En el circuito de la figura, hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ .
- b) Con el circuito inicialmente descargado, se aplica la entrada  $v_i(t) = Y(t) \cdot \frac{E}{T} \cdot t$ . Hallar la expresión temporal de la respectiva respuesta  $v_o(t)$ .
- c) Con base en lo hallado en b), y **aplicando resolución por tramos**, hallar la expresión temporal de la respuesta del circuito cuando se inyecta la entrada  $v_i(t)$  de la figura, arrancando con el circuito descargado. **Bosquejar la respuesta en una gráfica.**



Problema 4 (7 puntos)

Se considera una fuente trifásica sinusoidal, equilibrada y perfecta, formada por tres fuentes  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $v_3(t)$  conectadas con un nodo común en secuencia negativa, de 50Hz y 230V eficaces. Se toma como referencia la tensión  $v_1(t)$ , expresada como un coseno.

- a) **Hallar** la expresión temporal de las tres tensiones compuestas  $u_{12}(t)$ ,  $u_{23}(t)$ ,  $u_{31}(t)$ .
- b) La fuente anterior alimenta una carga trifásica equilibrada conectada en estrella, de factor de potencia inductivo 0.9, que consume una potencia activa total de 1500W.
  - i) Dibujar el equivalente monofásico.
  - ii) Hallar la potencia reactiva consumida por cada fase.

**Solución**Problema 1 (8 puntos)

- a) Si se carga el lado 2 con una impedancia  $Z_L(s)$ , hallar la impedancia vista desde el lado 1 en función de los parámetros  $h$ .

Al cargarse el lado 2 con una impedancia  $Z_L$ , se impone una restricción entre  $I_2$  y  $V_2$ :

$$V_2 = -Z_L \cdot I_2$$

El signo de menos se debe a la ley de Ohm: la corriente  $I_2$  se está tomando entrante al cuadrupolo, es decir que circula por  $Z_L$  desde abajo hacia arriba, en tanto la tensión  $V_2$  está medida desde arriba hacia abajo.

La impedancia vista desde el lado 1 es, por definición,

$$Z_{v1} = \frac{V_1}{I_1}$$

Combinando las expresiones anteriores con la definición de los parámetros híbridos, obtenemos

$$I_2 = h_{21}I_1 - h_{22} \cdot Z_L \cdot I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{h_{21}}{1 + h_{22} \cdot Z_L} \cdot I_1 \Rightarrow V_2 = -\frac{h_{21} \cdot Z_L}{1 + h_{22} \cdot Z_L} \cdot I_1$$

Entonces

$$V_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot \left( -\frac{h_{21} \cdot Z_L}{1 + h_{22} \cdot Z_L} \cdot I_1 \right) = \left( h_{11} - \frac{h_{12} \cdot h_{21} \cdot Z_L}{1 + h_{22} \cdot Z_L} \right) \cdot I_1$$

$$V_1 = \left( \frac{h_{11}(1 + h_{22} \cdot Z_L) - h_{12} \cdot h_{21} \cdot Z_L}{1 + h_{22} \cdot Z_L} \right) \cdot I_1$$

Despejando:

$$Z_{v1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{h_{11}(1 + h_{22} \cdot Z_L) - h_{12} \cdot h_{21} \cdot Z_L}{1 + h_{22} \cdot Z_L}$$

b) Trabajando en Laplace, hallar los parámetros  $h$  del cuadripolo de la figura.

Sabemos que

$$\begin{cases} V_1(s) = h_{11}I_1(s) + h_{12}V_2(s) \\ I_2(s) = h_{21}I_1(s) + h_{22}V_2(s) \end{cases}$$

Hallamos cada parámetros *por superposición*, aplicando las entradas de a una. Notemos que anulando una entrada, podemos obtener dos parámetros:

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}, \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}, \quad h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Analicemos las expresiones anteriores en el circuito. Consideremos primero el caso  $V_2 = 0$ , que impone un cortocircuito en bornes de  $R$ , por lo que por ella no circula corriente. Entonces la corriente  $I_2$  se suma a la  $I_1$  para transformarse en la corriente de la fuente de corriente dependiente:

$$I_1 + I_2 = 3I_1 \Rightarrow I_2 = 2I_1$$

Por otro lado,  $V_1$  se reduce a la caída de tensión en el condensador:

$$V_1 = I_1 \cdot \frac{1}{Cs}$$

Entonces

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{Cs}$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = 2$$

Consideremos ahora  $I_1 = 0$ , por lo que no circula corriente por el condensador y, por lo tanto, no hay caída en él. Entonces,  $V_1 = V_2$ . Además, la corriente  $I_2$  se reparte entre la fuente de corriente, de valor  $3I_1 = 0$  y la resistencia  $R$ , de donde:

$$I_2 = \frac{V_2}{R}$$

Entonces

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} = 1$$

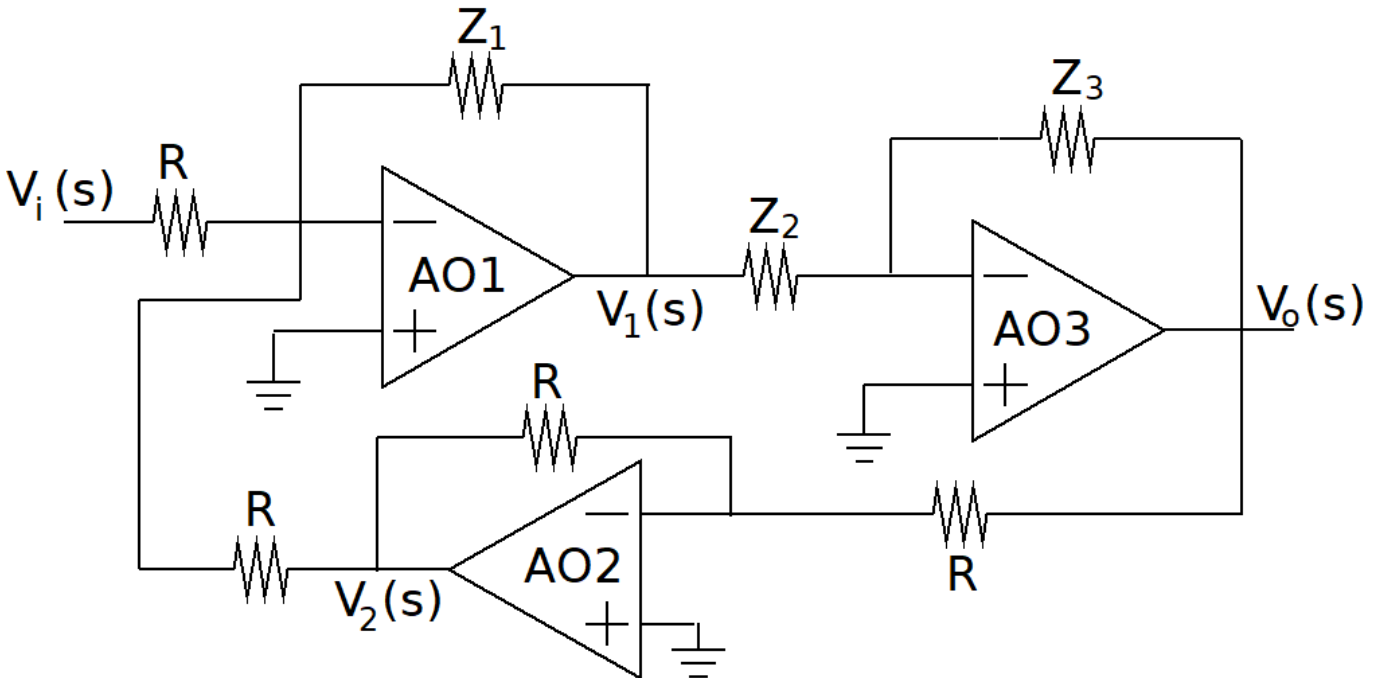
$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{R}$$

Por lo que la matriz de parámetros híbridos es

$$((h)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Cs} & 1 \\ 2 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

**Problema 2** (20 puntos)

Se considera el circuito de la figura. Los amplificadores operacionales son ideales y funcionan en zona lineal.



- a) i) Hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ . Observemos primero la configuración de los amplificadores operacionales:
- AO1 configura un sumador inversor
  - AO2 es un inversor de ganancia -1, por lo que  $V_2(s) = -V_o(s)$ .
  - AO3 es un inversor de relación  $V_o(s) = \frac{-Z_3}{Z_1} \cdot V_1(s)$

Estas relaciones se fundan en la idealidad de los operacionales, funcionando en zona lineal. Tenemos cortocircuito virtual, por la ganancia infinita, y no entra corriente por las patas + y -.

$$\frac{V_i}{R} - \frac{V_o}{R} = -\frac{V_1}{Z_1} \Rightarrow \frac{V_i}{R} = \frac{V_o}{R} - \frac{V_1}{Z_1}$$

$$\frac{V_1}{Z_2} = -\frac{V_o}{Z_3} \Rightarrow -V_1 = \frac{Z_2}{Z_3} \cdot V_o$$

Entonces

$$\frac{V_i}{R} = \frac{V_o}{R} + \frac{Z_2}{Z_1 Z_3} \cdot V_o \Rightarrow \frac{V_i}{R} = \left[ \frac{1}{R} + \frac{Z_2}{Z_1 Z_3} \right] \cdot V_o = \left[ \frac{Z_1 Z_3 + R Z_2}{R Z_1 Z_3} \right] \cdot V_o$$

De donde

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 Z_3 + R Z_2}$$

- ii) Se sabe que  $Z_1 = R + Ls$ ,  $Z_2 = Ls$ ,  $Z_3 = 1/Cs$ . Se introduce la pulsación auxiliar  $\omega_0 = 1/RC$ . Se cumple también que  $R/L = 9\omega_0$ . Simplificar la expresión de  $H(s)$  y escribirla como un cociente de polinomios en  $s$ .

Con  $Z_1 = R + Ls$ ,  $Z_2 = Ls$ ,  $Z_3 = 1/Cs$ ,  $R/L = 9\omega_0$ ,  $1/RC = \omega_0$ ,

$$H(s) = \frac{(R + Ls) \cdot \frac{1}{Cs}}{(R + Ls) \cdot \frac{1}{Cs} + RLs} = \frac{R + Ls}{R + Ls + RCLs^2} = \frac{L \left( s + \frac{R}{L} \right)}{RLC \left( \frac{1}{LC} + \frac{1}{RC}s + s^2 \right)}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC} \left( s + \frac{R}{L} \right)}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0 (s + 9\omega_0)}{s^2 + \omega_0 s + 9\omega_0^2}$$

- iii) Verificar que el denominador tiene raíces complejas conjugadas y hallar los respectivos  $\zeta$  y  $\omega_n$ .

Miremos los denominadores que tenemos y que queremos:

$$s^2 + \omega_0 s + 9\omega_0^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Entonces  $\omega_n = 3\omega_0$  y

$$\omega_0 = 2\zeta\omega_n = 2\zeta \cdot 3\omega_0 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{6}$$

Entonces, poniendo  $9\omega_0 = 3\omega_n$ ,

$$H(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\omega_n (s + 3\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con  $\zeta = \frac{1}{6}$  y  $\omega_n = 3\omega_0$ .

- b) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de  $H$ , explicando claramente cómo procede.

Para deducir los diagramas de Bode asintóticos, hacemos un análisis por bandas. Primero identificamos las frecuencias críticas, es decir, las raíces del numerador y denominador. En el numerador tenemos la raíz real  $-3\omega_n$ . En el denominador hay dos raíces complejas conjugadas, por lo que nos interesa su módulo,  $\omega_n$ . Por lo tanto, tenemos tres bandas: una de baja frecuencia, desde continua hasta  $\omega_n$ , una banda intermedia entre  $\omega_n$  y  $3\omega_n$  y una banda de alta frecuencia desde  $3\omega_n$  hasta infinito. Notemos desde ya que como las frecuencias críticas distan menos de una década, la aproximación asintótica en la banda intermedia no será muy buena.

Evaluemos en  $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\omega_n (j\omega + 3\omega_n)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

y procedamos a hacer el análisis asintótico:

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{\omega_n (3\omega_n)}{\omega_n^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx 0 \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx 0 \end{cases}$$



$$\omega_n \ll \omega \ll 3\omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2} = -\frac{\omega_n^2}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx 40 \log(\omega_n) - 40 \log(\omega) \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx -\pi \text{ (ó } +\pi) \end{cases}$$

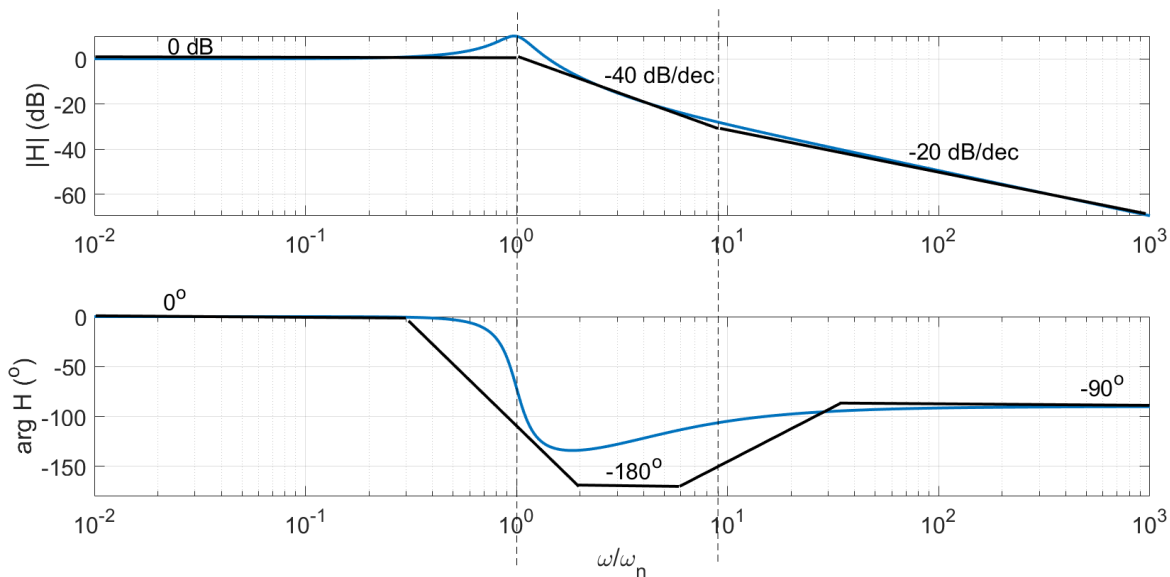
$$3\omega_n \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{\omega_n/3}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx 20 \log(\omega_n/3) - 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx -\frac{\pi}{2} \text{ (ó } \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

Tenemos que tener cuidado al momento de *empalmar* las fases. El cambio de fase en la banda intermedia se debe al par de raíces complejas conjugadas. Para definir si hay un adelanto o un atraso de  $\pi$ , podemos evaluar en un punto intermedio, por ejemplo en  $\omega_n$ :

$$H(j\omega_n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(j\omega_n + 3\omega_n)}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(j + 3)}{(j)^2 + 2\zeta(j) + 1} = \frac{(j + 3)}{(j)} = \sqrt{10} \angle \text{atan}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Vemos que la fase se mueve hacia  $-90^\circ$ . La siguiente frecuencia crítica es de primer orden, por lo que solamente puede sumar o restar 90 grados y descartamos entonces la opción  $+3\pi/2$ .

Con las consideraciones anteriores, ya podemos definir bien qué hace la fase. Elegimos  $-\pi$  para la banda intermedia y  $-\pi/2$  para la banda de alta frecuencia. La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de  $H(j\omega)$ . En negro se muestran los diagramas asintóticos, en tanto en azul se muestran los diagramas reales. Se señalan también las frecuencias críticas. Es clara la pobre aproximación en la zona entre las dos frecuencias críticas ( $\omega_n$  y  $3\omega_n$ ), especialmente en la fase.



- c) Hallar la distancia entre el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico para las frecuencias críticas.

Para  $\omega = \omega_n$ :

$$\begin{aligned} |H_{re}(j\omega_n)| \text{ dB} - |H_{as}(j\omega_n)| \text{ dB} &= 20 \log \left( \frac{|H_{re}(j\omega_n)|}{|H_{as}(j\omega_n)|} \right) \\ &= 20 \log \left( \frac{\left| \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\omega_n(j\omega_n+3\omega_n)}{(j\omega_n)^2+2\zeta\omega_n(j\omega_n)+\omega_n^2}}{1} \right|}{\left| \frac{1}{3} \cdot \frac{(j+3)}{2\zeta(j)} \right|} \right) \\ &= 20 \log \left( \left| \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{1+9}}{2 \cdot \frac{1}{6}}}{1} \right| \right) = 20 \log \left( \sqrt{10} \right) = 10 \text{ dB} \end{aligned}$$

- d) Hallar la expresión temporal exacta de la respuesta en régimen a una entrada sinusoidal de pulsación  $\omega_n$  y amplitud  $5V$ .

Sabemos que ante la entrada sinusoidal

$$v_i(t) = 5V \cos(\omega_n t)$$

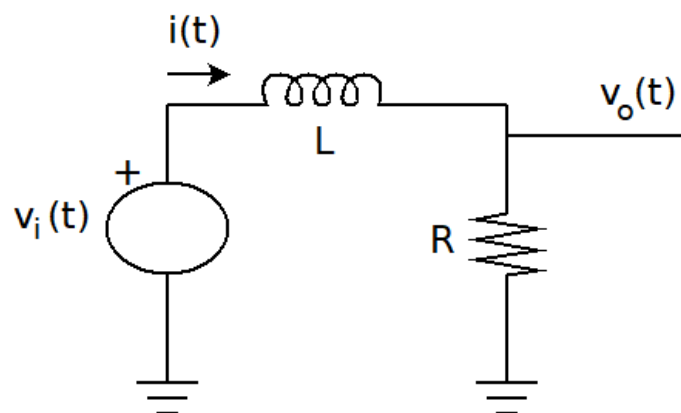
el circuito va a responder, en régimen, con una señal de la forma

$$v_{o,reg}(t) = A \cdot |H(j\omega_n)| \cos(\omega_n t + \arg H(j\omega_n))$$

Entonces, usando lo ya calculado,

$$v_{o,reg}(t) = \sqrt{10} \cdot 5V \cos \left( \omega_n t + \operatorname{atan} \left( \frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{2} \right)$$

### Problema 3 (15 puntos)



- a) En el circuito de la figura, hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ .

Pasamos al circuito en Laplace, con datos previos nulos ya que estamos calculando la transferencia entrada-salida, y aplicamos divisor de tensión:

$$V_o(s) = \frac{R}{Ls + R} \cdot V_i(s) = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}} \cdot V_i(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \cdot V_i(s)$$

donde hemos introducido la pulsación  $\omega_0 = \frac{R}{L}$ , que también podemos asociar a la constante de tiempo del circuito  $\tau = \frac{L}{R}$ .

- b) Con el circuito inicialmente descargado, se aplica la entrada  $v_i(t) = Y(t) \cdot \frac{E}{T} \cdot t$ . Hallar la expresión temporal de la respectiva respuesta  $v_o(t)$ .

Conociendo la transferencia, ponemos

$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \cdot \mathcal{L} \left[ Y(t) \cdot \frac{E}{T} t \right] (s)$$

La transformada de Laplace de la rampa la podemos sacar directamente de la tabla de transformadas, o calcular aplicando partes. El resultado es conocido:

$$\mathcal{L} \left[ Y(t) \cdot \frac{E}{T} t \right] (s) = \frac{E}{T} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Entonces

$$V_o(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \cdot \frac{E}{T} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{\omega_0 E}{T} \cdot \left[ \frac{1}{s + \omega_0} \cdot \frac{1}{s^2} \right]$$

Para hallar la expresión temporal, antitransformamos, aplicando fracciones simples, notando que hay una raíz doble en  $s = 0$ :

$$V_o(s) = \frac{\omega_0 E}{T} \cdot \left[ \frac{A}{s + \omega_0} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} \right]$$

Sabemos que los términos  $A$  y  $B$  salen por *tapadita*<sup>1</sup>:

$$A = \frac{1}{\omega_0^2} \quad , \quad B = \frac{1}{\omega_0}$$

El término  $C$  lo podemos obtener planteando la identidad de las expresiones entre paréntesis rectos:

$$\frac{1}{s + \omega_0} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{A}{s + \omega_0} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} = \frac{\frac{1}{\omega_0^2}}{s + \omega_0} + \frac{\frac{1}{\omega_0}}{s^2} + \frac{C}{s} = \frac{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot s^2 + \frac{1}{\omega_0} \cdot (s + \omega_0) + C \cdot (s + \omega_0) \cdot s}{s^2(s + \omega_0)}$$

<sup>1</sup>También salen imponiendo directamente la identidad

$$\frac{1}{s + \omega_0} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{A}{s + \omega_0} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s}$$

haciendo denominador común e identificando polinomios en  $s$ .

$$= \frac{\left(\frac{1}{\omega_0^2} + C\right) \cdot s^2 + \left(\frac{1}{\omega_0} + C \cdot \omega_0\right) \cdot s + 1}{s^2(s + \omega_0)} \Rightarrow C = -\frac{1}{\omega_0^2}$$

Entonces

$$V_o(s) = \frac{\omega_0 E}{T} \cdot \left[ \frac{\frac{1}{\omega_0^2}}{s + \omega_0} + \frac{1}{s^2} - \frac{\frac{1}{\omega_0^2}}{s} \right] = \frac{E}{\omega_0 T} \cdot \left[ \frac{1}{s + \omega_0} + \frac{\omega_0}{s^2} - \frac{1}{s} \right]$$

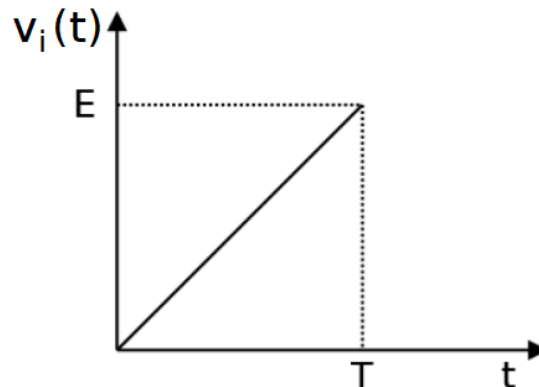
Pasando al tiempo:

$$v_o(t) = Y(t) \cdot \frac{E}{\omega_0 T} \cdot (e^{-\omega_0 t} - 1) + Y(t) \frac{E}{T} t$$

$$v_o(t) = Y(t) \cdot \frac{\tau}{T} \cdot E \cdot (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) + Y(t) \frac{E}{T} t$$

- c) Con base en lo hallado en b), y aplicando resolución por tramos, hallar la expresión temporal de la respuesta del circuito cuando se aplica la entrada  $v_i(t)$  de la figura, arrancando con el circuito descargado. **Bosquejar la respuesta en una gráfica.**

Para obtener la respuesta total resolviendo por tramos, podemos notar que la entrada ini-



cialmente es una rampa, como la analizada en la parte anterior, por lo que la respuesta total coincidirá con la ya hallada, al menos hasta el instante  $t = T$ . A partir de allí, podemos considerar el circuito con entrada nula, a partir de un nuevo origen de tiempos  $t' = 0$ , que se corresponde con  $t = T$ , pero con un dato previo  $i_{L0}$  correspondiente al valor de la corriente en la bobina en el instante  $t = T$ . Este circuito es sencillo de resolver, ya que es simplemente la descarga de la bobina. En Laplace, la corriente será

$$I(s) = \frac{L i_{L0}}{Ls + R} = \frac{i_{L0}}{s + \omega_0} \Rightarrow i(t') = Y(t') \cdot i_{L0} e^{-\omega_0 t'} = Y(t') \cdot i_{L0} e^{-t'/\tau}$$

De donde

$$v_o(t') = Y(t') R i_{L0} e^{-t'/\tau}$$

Calculemos  $i_{L0} = \frac{v_o(t=T)}{R}$ :

$$i_{L0} = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{E}{R} \cdot (e^{-\frac{T}{\tau}} - 1) + \frac{E}{R}$$

Observemos que al pegar las tensiones halladas, hasta  $T$  y desde  $T$ , la tensión en bornes de la resistencia queda continua, lo cual es consistente con la continuidad de la corriente en la bobina<sup>2</sup>.

#### Problema 4 (7 puntos)

Se considera una fuente trifásica sinusoidal, equilibrada y perfecta, formada por tres fuentes  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $v_3(t)$  conectadas con un nodo común, de 50Hz y 230V eficaces. Se toma como referencia la tensión  $v_1(t)$ , expresada como un coseno.

- a) **Hallar** la expresión temporal de las tres tensiones compuestas  $u_{12}(t)$ ,  $u_{23}(t)$ ,  $u_{31}(t)$ .

Trabajamos en fasores. Por definición,

$$U_{12} = V_1 - V_2$$

Además, por ser una fuente trifásica equilibrada y perfecta:

$$V_2 = e^{j120^\circ} \cdot V_1 \text{ elegimos esta secuencia de fases.}$$

Entonces

$$V_1 - V_2 = V_1 \cdot [1 - e^{j120^\circ}] = V_1 \cdot [1 - \cos(120^\circ) - j \sin(120^\circ)]$$

Sabemos que  $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ , en tanto  $\sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Entonces:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = V_1 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = V_1 \cdot \left[\frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = V_1 \cdot \sqrt{3} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2}\right]$$

$$U_{12} = V_1 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = V_1 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-j30^\circ}$$

Pasando al tiempo,

$$u_{12}(t) = re [U_{12} e^{j\omega t}] = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 230V \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

donde  $\omega = 2\pi \cdot 50Hz$ . Con la convención que asumimos para las demás fuentes:

$$u_{23}(t) = re [U_{23} e^{j\omega t}] = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 230V \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$u_{31}(t) = re [U_{31} e^{j\omega t}] = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 230V \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

---

<sup>2</sup>Si hubiera una discontinuidad en la corriente de la bobina, se produciría una delta de Dirac de tensión que pasaría también por la resistencia, lo que no es posible, ya que una delta de Dirac en una resistencia correspondería a una potencia infinita (tener presente la idea de la delta de Dirac como *algo muy grande que dura muy poquito*).

- b) La fuente anterior alimenta una carga trifásica equilibrada conectada en estrella, de factor de potencia inductivo 0.9, que consume una potencia activa total de 1500W.
- i) El equivalente monofásico queda como ejercicio.
  - ii) Hallar la potencia reactiva consumida por cada fase.

Como la carga es equilibrada, cada fase consume  $P_F = 500W$  de potencia activa. Como conocemos el factor de potencia, conocemos el argumento de la impedancia de fase y, usando el triángulo de potencias, podemos hallar la reactiva de cada fase:

$$Q_F = \tan(\varphi) \cdot P_F$$

con  $\varphi = \text{acos}(0.9) \approx 26^\circ$ , de donde,

$$Q_F \approx 242VAR$$