Teoría de circuitos

Segundo parcial

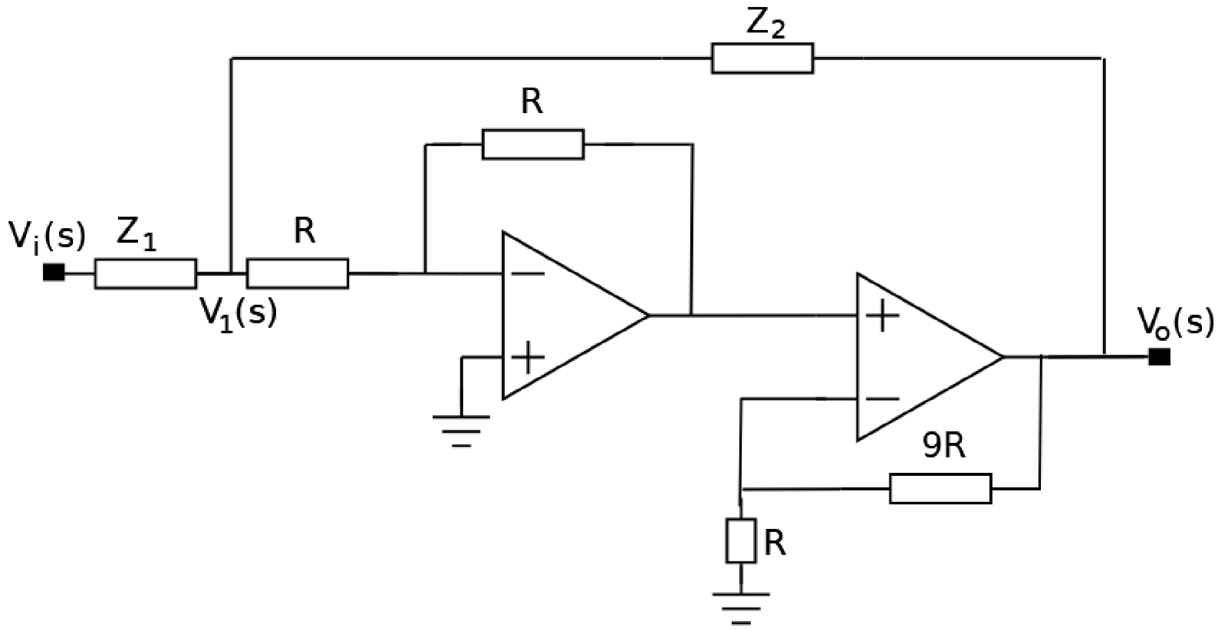
2^o semestre 2020

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No demorarse mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SER PROLIJO. EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS, RESALTANDO LOS RESULTADOS. Expresar los resultados exactamente en el formato pedido. Recordar que a través de esta evaluación se debe demostrar los conocimientos en la asignatura. Tener presente que si algo no es claro para el evaluador, se podrían perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**

Problema 1 (16 puntos)

Se considera el circuito en Laplace de la figura, con los amplificadores operacionales ideales, funcionando en zona lineal.



a) **Justificando adecuadamente**, identificar un bloque en el que se pueda aplicar el Teorema de Miller y dibujar el circuito equivalente resultante de aplicar el teorema.

b) Usando el circuito equivalente de la parte anterior, hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ en función de R, Z_1 y Z_2.

c) i) Se eligen $Z_1(s) = R + \frac{1}{Cs}$ y $Z_2(s) = Ls$ de forma tal que

$$H(s) = \frac{-5s^2}{s^2 + 11\omega_0 s + 10\omega_0^2}$$

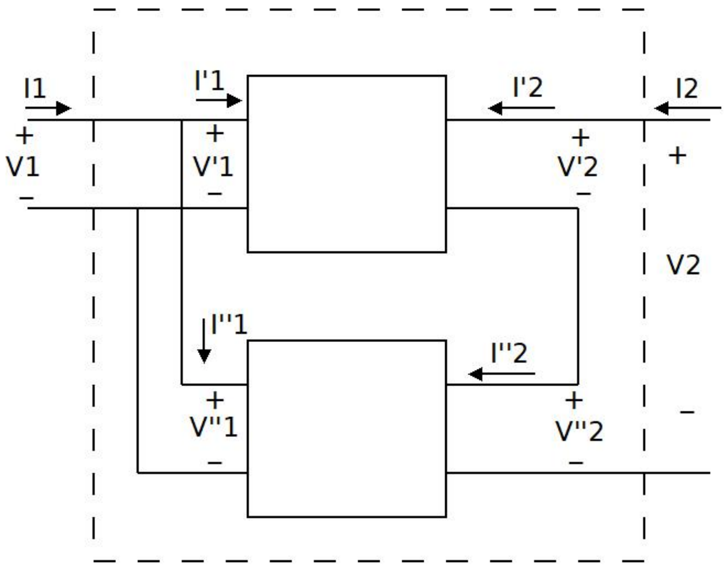
Hallar la expresión temporal de la respuesta del circuito a un escalón $v_i(t) = Y(t).E$.

ii) Usando el Teorema del Valor Final, verificar el comportamiento asintótico de la respuesta al escalón hallada.

Problema 2 (10 puntos)

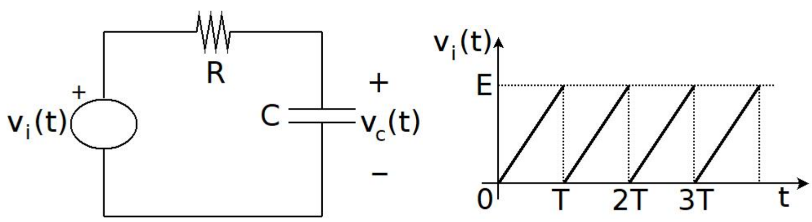
En el circuito de la figura, se muestra la interconexión de dos cuadripolos, de forma de obtener un nuevo cuadripolo (marcado punteado en la figura).

Indicar, **justificando claramente!!!**, cuál es el juego de parámetros más adecuado para describir el cuadripolo resultante a partir de la descripción de los cuadripolos originales.

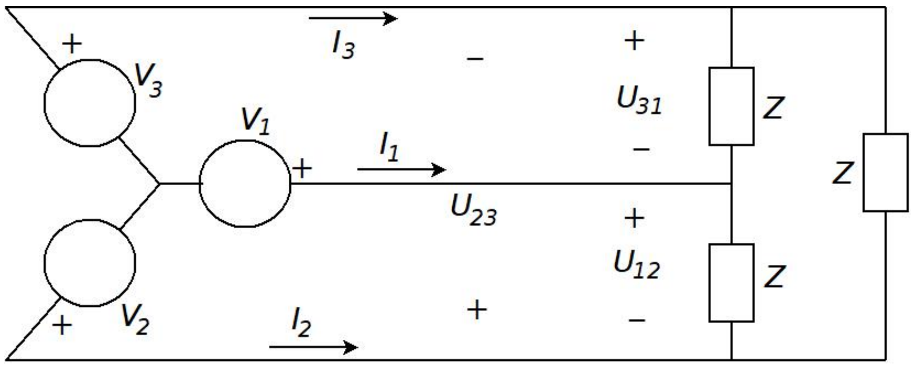


Problema 3 (13 puntos)

Al circuito de la figura se le aplica, a partir de $t = 0$, la tensión de la gráfica, que es nula en tiempos negativos y se repite cada $T = RC$ segundos en los tiempos positivos. El condensador tiene un dato previo $v_C(0^-) = v_{C0}$. Se pide hallar v_{C0} para que el circuto *arranque en régimen*, es decir, que su comportamiento sea periódico para tiempos positivos.



Problema 4 (11 puntos)



a) Sabiendo que la fuente trifásica está en sentido directo (secuencia positiva) y que la carga es $Z = R + jX$, inductiva, hacer un diagrama fasorial en el que se representen los fasores de las tensiones de la fuente, las tensiones compuestas y las corrientes de línea.

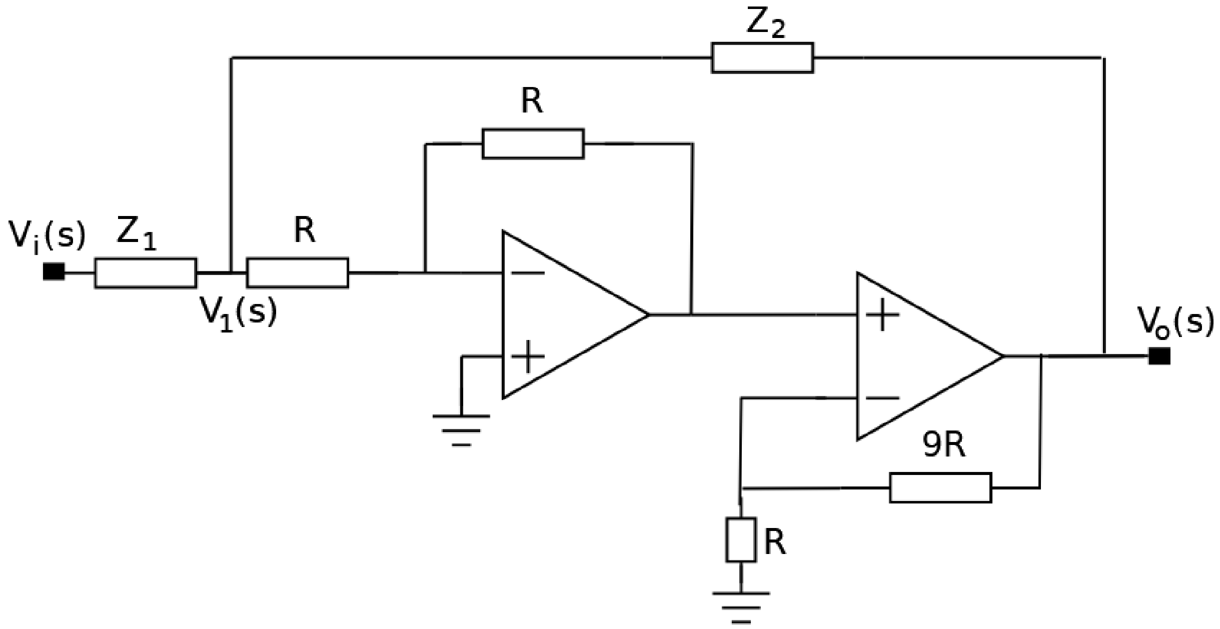
b) Si las fuentes son de 500kV eficaces y 50 Hz, y la impedancia de la carga es $Z = (15 + j8)k\Omega = 17k\Omega\angle 0,49$, hallar la expresión temporal de la corriente de línea i_2.

c) Se quiere compensar la potencia reactiva consumida por la carga trifásica. Describa detalladamente cómo procedería (qué elementos colocaría, cómo los conectaría y cómo los dimensionaría). **Tenga presente que NO se pide realizar los cálculos, sino describir el procedimiento!!**

Solución

Problema 1

Se considera el circuito en Laplace de la figura, con los amplificadores operacionales ideales, funcionando en zona lineal.

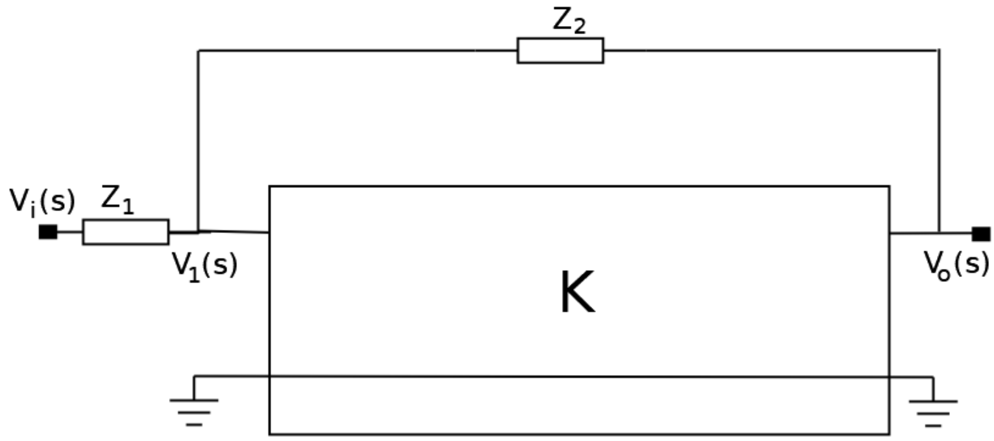


a) Identificar un bloque en el que se pueda aplicar el Teorema de Miller y dibujar el circuito equivalente resultante de aplicar el teorema.

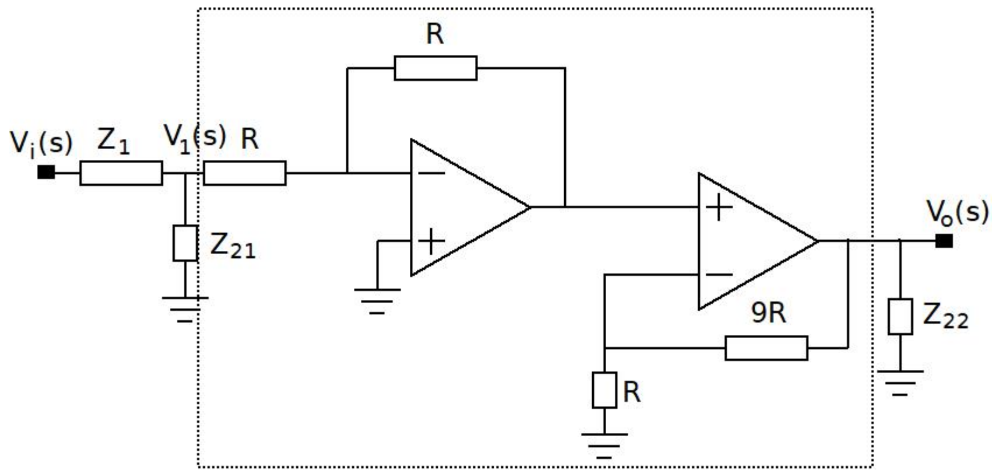
Observemos que los operacionales se estructuran como la cascada de dos configuraciones conocidas: una inversora y otra no inversora. La salida del operacional de la izquierda vale $-V_1(s)$, en tanto

$$V_o(s) = \left(1 + \frac{9R}{R}\right).(-V_1(s)) = -10.V_1(s)$$

Entonces, podemos identificar un bloque con tensión V_1 del lado 1 y tensión V_o del lado 2, ambas medidas respecto de tierra, de ganancia $K = -10$, realimentado con una impedancia Z_2.



Aplicando el teorema de Miller, podemos pasar al siguiente circuito equivalente: con $Z_{21} =$



$\frac{Z_2}{1-K} = \frac{Z_2}{11}$ y $Z_{22} = \frac{KZ_2}{K-1} = \frac{10Z_2}{11}$.

b) Usando la parte anterior, hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ en función de R, Z_1 y Z_2.

Planteamos el nudo en V_1:

$$\frac{V_i - V_1}{Z_1} = \frac{V_1}{Z_{21}} + \frac{V_1}{R}$$

donde hemos usado la presencia de la tierra virtual del operacional. Entonces:

$$\frac{V_i}{Z_1} = \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_{21}} + \frac{1}{R}\right].V_1 = \left[\frac{Z_{21}R + Z_1R + Z_1Z_{21}}{Z_1.Z_{21}.R}\right].V_1 = K\left[\frac{Z_{21}R + Z_1R + Z_1Z_{21}}{Z_1.Z_{21}.R}\right].V_o$$

De donde, usando $Z_{22} = \frac{10Z_2}{11}$, $Z_{21} = \frac{Z_2}{11}$,

$$\boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{K}.\frac{RZ_{21}}{Z_{21}R + Z_1R + Z_1Z_{21}} = \frac{1}{K}.\frac{R\frac{Z_2}{11}}{\frac{Z_2}{11}R + Z_1R + Z_1\frac{Z_2}{11}} = -\frac{1}{10}.\frac{RZ_2}{R(Z_2 + 11Z_1) + Z_1Z_2}}$$

c) i) Se eligen $Z_1(s) = R + \frac{1}{Cs}$ y $Z_2(s) = Ls$ de forma tal que[1]

$$H(s) = \frac{-5s^2}{s^2 + 11\omega_0 s + 10\omega_0^2}$$

Hallar la expresión temporal de la respuesta del circuito a un escalón $v_i(t) = Y(t).E$.

La transformada de Laplace de la respuesta es

$$V_o(s) = H(s).V_i(s) = \frac{E}{s}.\frac{-5s^2}{s^2 + 11\omega_0 s + 10\omega_0^2} = \frac{-5Es}{s^2 + 11\omega_0 s + 10\omega_0^2}$$

Para pasar al tiempo, hallamos las raíces del denominador, obteniendo $-\omega_0$ y $-10\omega_0$ (notar que la suma de las raíces es $-11\omega_0$ y el producto $10\omega_0^2$). Entonces

$$V_o(s) = \frac{-5Es}{(s+\omega_0)(s+10\omega_0)} = \frac{A}{s+\omega_0} + \frac{B}{s+10\omega_0} = \frac{\frac{5E}{9}}{s+\omega_0} + \frac{-\frac{50E}{9}}{s+10\omega_0}$$

donde hemos aplicado *tapadita* para hallar A y B. Ya podemos pasar al tiempo:

$$v_o(t) = Y(t).\frac{5E}{9}.\left[e^{-\omega_0 t} - 10e^{-10\omega_0 t}\right]$$

ii) Usando el Teorema del Valor Final, verificar el comportamiento asintótico de la respuesta al escalón hallada.

El Teorema del Valor Final nos dice que

$$\lim_{t\to\infty} v_o(t) = \lim_{s\to 0} s.V_o(s)$$

siempre que la abscisa de convergencia de V_o sea negativa, o sea nula y haya un polo simple en el origen. En este caso, al ser V_o real racional propia, su abscisa de convergencia es la parte real del polo de más a la derecha: $-\omega_0$, negativa. Se cumple el teorema y podemos verificar los límites:

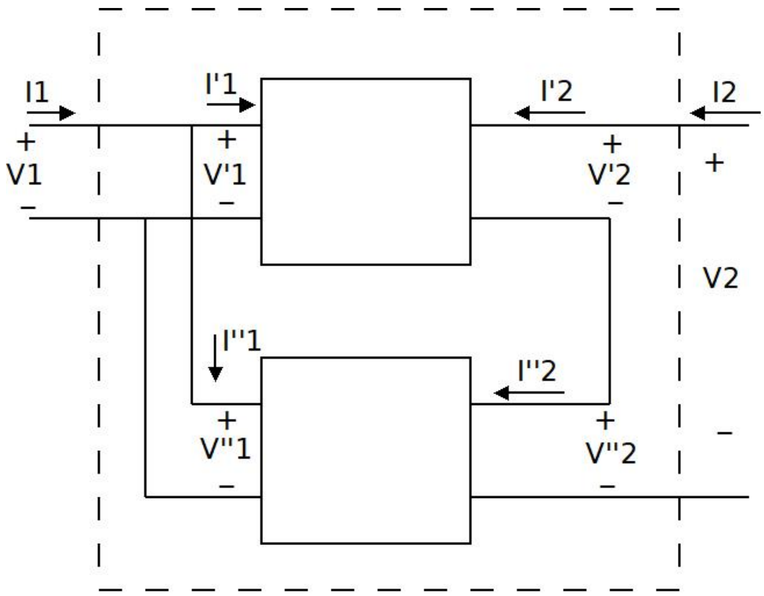
$$\lim_{t\to\infty} Y(t).\frac{5E}{9}.\left[e^{-\omega_0 t} - 10e^{-10\omega_0 t}\right] = 0 \quad , \quad \lim_{s\to 0} s.V_o(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-5Es^2}{(s+\omega_0)(s+10\omega_0)} = 0$$

[1] En la letra que se entregó en el parcial, debería haber dicho $(H(s) = H(s) = -\frac{1}{20}\frac{s^2}{s^2+11\omega_0 s+10\omega_0^2}$. Esto no afecta lo que se pide hacer.

Problema 2

En el circuito de la figura, se muestra la interconexión de dos cuadripolos, de forma de obtener un nuevo cuadripolo (marcado punteado en la figura).

Indicar, **justificando claramente!!!**, cuál es el juego de parámetros más adecuado para describir el cuadripolo resultante a partir de la descripción de los cuadripolos originales.



La interconexión es paralelo del lado 1 (comparten la tensión) y serie del lado 2 (comparten la corriente). Denotemos por V_i', V_i'' y V_i las tensiones del lado i de los cuadripolos interconectados y el cuadripolo resultante. De la misma forma, denotamos por I_i', I_i'' e I_i a las corrientes del lado i. Tener presente que consideramos la convención de signos estándar. A modo de resumen, los tres cuadripolos (los originales y el resultante de la interconexión) tienen la misma tensión del lado 1 y la misma corriente del lado 2.

Se cumple que

$$V_1 = V_1' = V_1'' \quad , \quad I_2 = I_2' = I_2''$$
$$V_2 = V_2' + V_2'' \quad , \quad I_1 = I_1' + I_1''$$

Entonces, si describimos los cuadripolos tomando como variables independientes la tensión del lado 1 y la corriente del lado 2, es decir, usando los parámetros híbridos g, todo se simplifica:

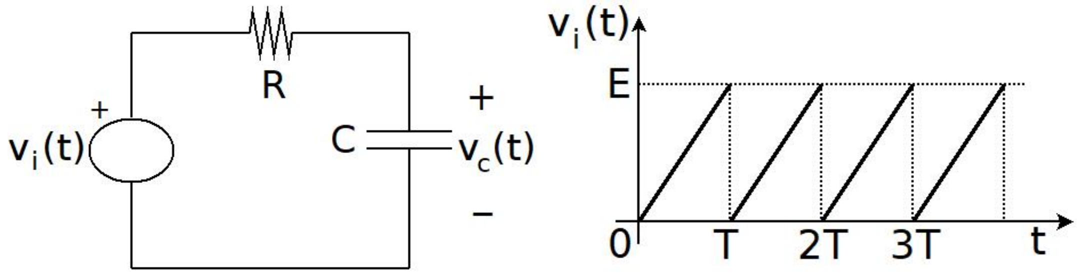
$$\left\{ \begin{array}{lcl} I_1' & = & g_{11}'V_1' + g_{12}'I_2' \\ V_2' & = & g_{21}'V_1' + g_{22}'I_2' \end{array} \right. \quad , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} I_1'' & = & g_{11}''V_1'' + g_{12}''I_2'' \\ V_2'' & = & g_{21}''V_1'' + g_{22}''I_2'' \end{array} \right.$$

$$G' = \begin{bmatrix} g_{11}' & g_{12}' \\ g_{21}' & g_{22}' \end{bmatrix} \quad , \quad G'' = \begin{bmatrix} g_{11}'' & g_{12}'' \\ g_{21}'' & g_{22}'' \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix} I_1' \\ V_2' \end{bmatrix} = G' \begin{bmatrix} V_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = G' \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} I_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} = G'' \begin{bmatrix} V_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = G'' \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1' + I_1'' \\ V_2' + V_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = (G' + G'') \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

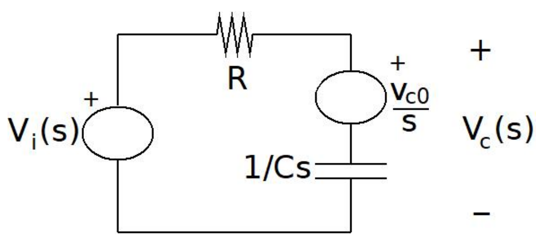
Problema 3

Al circuito de la figura se le aplica, a partir de $t = 0$, la tensión de la gráfica, que es nula en tiempos negativos y se repite cada T segundos en los tiempos positivos. El condensador tiene un dato previo $v_C(0^-) = v_{C0}$. Se pide hallar v_{C0} para que el circuito *arranque en régimen*, es decir, que su comportamiento sea periódico para tiempos positivos. La idea será resolver el circuito en el



intervalo $(0, T)$, para luego imponer que al comienzo del periodo siguiente, el circuito quede en las mismas condiciones que en el primer periodo. De esa forma, aseguramos que el funcionamiento se repetirá.

Arranquemos el análisis del circuito en el intervalo $(0, T)$. Observemos que en el tramo de interés, la entrada es una rampa de pendiente $\frac{E}{T}$, con transformada de Laplace $\frac{E}{Ts^2}$. Pasemos al circuito equivalente en Laplace, incorporando el dato previo del condensador. Observemos que en este circuito



equivalente, la tensión completa del condensador es la marcada como $V_c(s)$. Para plantear la caída de tensión, podemos aplicar divisor de tensión para obtener la caída en la impedancia $\frac{1}{Cs}$ y luego sumarle la fuente asociada al dato previo:

$$V_C(s) = \left(V_i(s) - \frac{v_{C0}}{s}\right) \cdot \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} + \frac{v_{C0}}{s} = \left(V_i(s) - \frac{v_{C0}}{s}\right) \cdot \frac{1}{1 + RCS} + \frac{v_{C0}}{s}$$

$$V_C(s) = \frac{V_i(s)}{1 + RCS} + v_{C0}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s(1 + RCS)}\right) = \frac{V_i(s)}{1 + RCs} + v_{C0}\left(\frac{1 + RCs - 1}{s(1 + RCs)}\right)$$

$$V_C(s) = \frac{E}{Ts^2(1+RCs)} + v_{C0}\left(\frac{RC}{1+RCs}\right) = \frac{E}{TRC}.\left[\frac{1}{s^2\left(s+\frac{1}{RC}\right)}\right] + v_{C0}.\left(\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

$$V_C(s) = \frac{E}{TRC}.\left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+\frac{1}{RC}}\right] + v_{C0}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

Las incógnitas A y C las sacamos por tapadita:

$$A = RC \quad , \quad C = R^2C^2$$

en tanto B la obtenemos haciendo común denominador:

$$1 = A\left(s+\frac{1}{RC}\right) + Bs\left(s+\frac{1}{RC}\right) + Cs^2 = RC.\left(s+\frac{1}{RC}\right) + Bs\left(s+\frac{1}{RC}\right) + R^2C^2s^2$$

Agrupamos en potencias de s:

$$1 = s^2\left[B + R^2C^2\right] + s\left[RC + \frac{B}{RC}\right] + 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} B + R^2C^2 & = & 0 \\ RC + \frac{B}{RC} & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow B = -R^2C^2$$

Entonces

$$V_C(s) = \frac{E}{TRC}.\left[\frac{RC}{s^2} - \frac{R^2C^2}{s} + \frac{R^2C^2}{s+\frac{1}{RC}}\right] + v_{C0}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

$$V_C(s) = \frac{E}{T}.\left[\frac{1}{s^2} - \frac{RC}{s} + \frac{RC}{s+\frac{1}{RC}}\right] + v_{C0}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

Pasamos al tiempo:

$$v_C(t) = Y(t).\frac{E}{T}.\left[t + RC\left(e^{-t/RC} - 1\right)\right] + Y(t).v_{C0}.e^{-t/RC}$$

Esta solución es válida en el intervalo $(0, T)$, ya que luego la entrada difiere de la rampa que supusimos. Para que el circuito quede en régimen ya en el primer tramo, se debe cumplir que el dato previo del siguiente tramo $(T, 2T)$ coincida con el dato previo del primer tramo. En estas condiciones, al repetirse la entrada y el dato previo, se repetirá la solución respectiva.

Entonces

$$v_{C0} = v_C(t)\big|_{t=T} = \frac{E}{T}.\left[T + RC\left(e^{-T/RC} - 1\right)\right] + v_{C0}.e^{-T/RC}$$

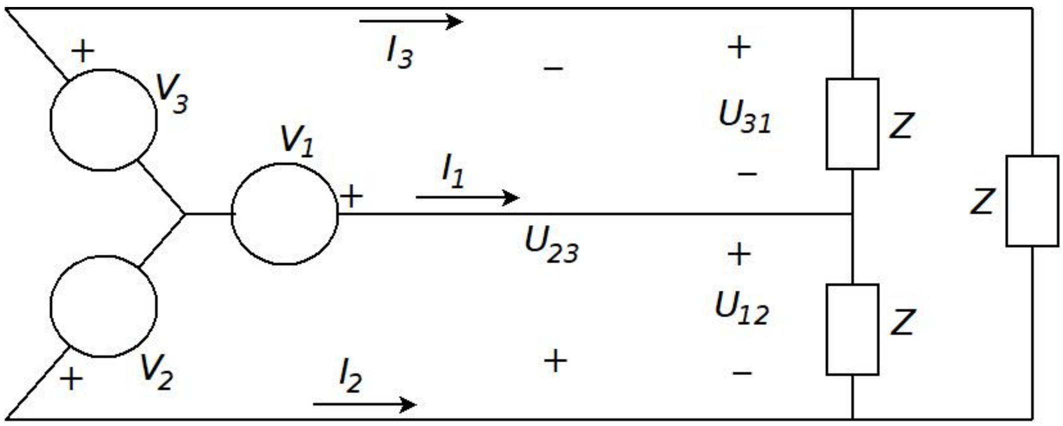
Despejamos v_{C0}:

$$v_{C0}.\left[1 - e^{-T/RC}\right] = \frac{E}{T}.\left[T + RC\left(e^{-T/RC} - 1\right)\right] \Rightarrow \boxed{v_{C0} = \frac{\frac{E}{T}.\left[T + RC\left(e^{-T/RC} - 1\right)\right]}{\left[1 - e^{-T/RC}\right]}}$$

Para el caso particular $RC = T$:

$$\boxed{v_{C0} = \frac{\left[1 + \left(e^{-1} - 1\right)\right]}{\left[1 - e^{-1}\right]}.E = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}.E = \frac{1}{e-1}.E}$$

Problema 4



a) Sabiendo que la fuente trifásica está en sentido directo y que la carga es inductiva, hacer un diagrama fasorial en el que se representen los fasores de las tensiones de la fuente, las tensiones compuestas y las corrientes de línea.

Las tensiones compuestas se calculan directamente de las fuentes, de la forma

$$U_{12} = V_1 - V_2 = V_1 - V_1 e^{-j120^o} = V_1.(1 - e^{-j120^o}) = V_1.\sqrt{3}.e^{j30^o}$$

Usando la simetría del sistema:

$$U_{23} = V_2.\sqrt{3}.e^{j30^o} = V_1.\sqrt{3}.e^{-j90^o}$$

$$U_{31} = V_3.\sqrt{3}.e^{j30^o} = V_1.\sqrt{3}.e^{-j210^o}$$

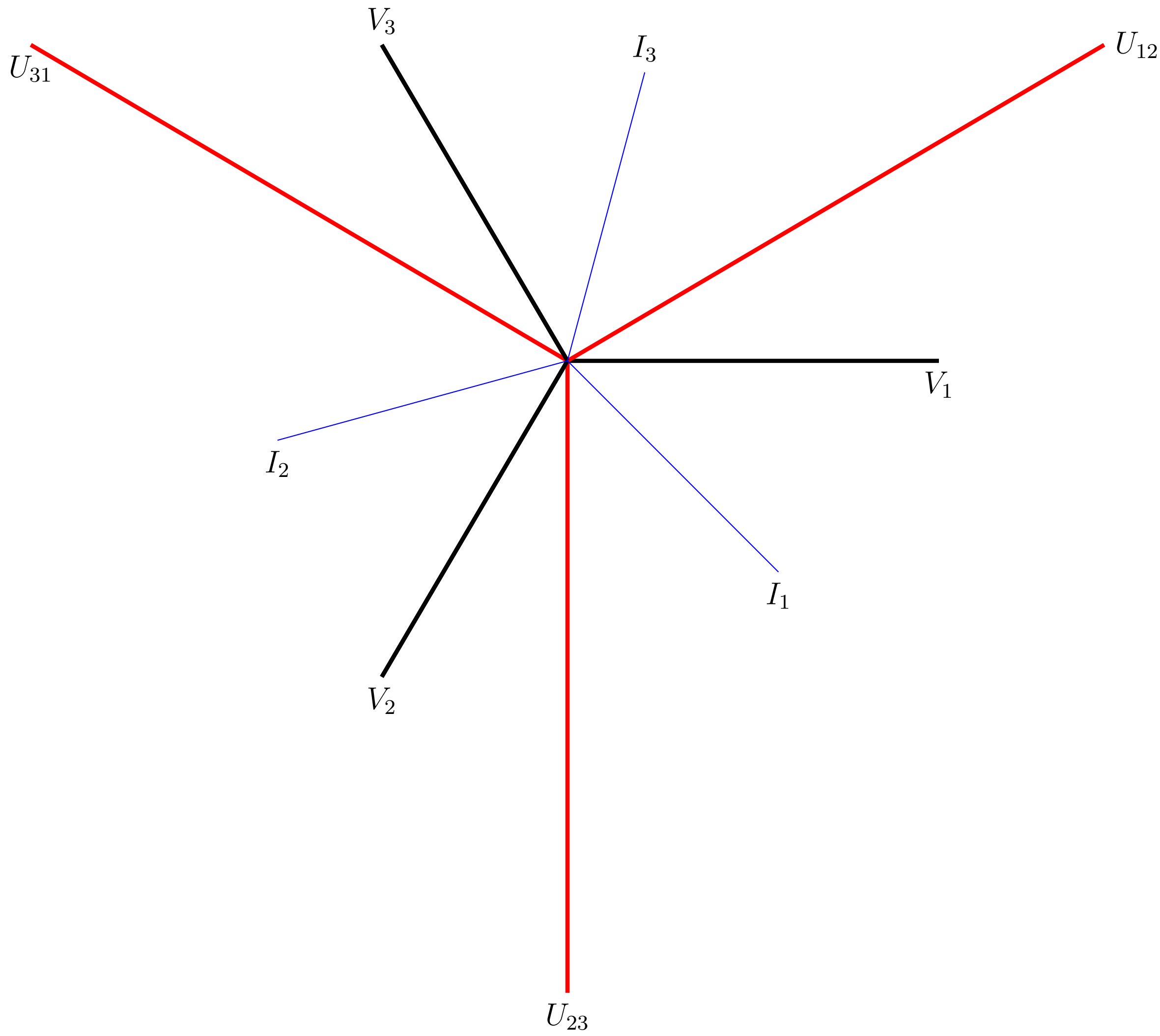
Para hallar las corrientes de línea, transfiguramos la carga, a una estrella de impedancias idénticas, iguales a $Z/3$, y miramos el circuito monofásico equivalente, de donde

$$I_1 = \frac{V_1}{\frac{Z}{3}} = \frac{3V_1}{Z}$$

Otra vez usando la simetría,

$$I_2 = I_1 e^{-j120^o} \quad , \quad I_3 = I_1 e^{-j240^o}$$

Ya podemos bosquejar el diagrama fasorial:



b) Si las fuentes son de 500kV eficaces y 50 Hz, y la impedancia de la carga es $Z = (15 + j8)k\Omega$, hallar la expresión temporal de la corriente i_2 en régimen.

Habiendo pasado al equivalente monofásico, la expresión del fasor de la corriente es:

$$I_2 = \frac{3V_2}{Z} \Rightarrow i_2(t) = re\left[\frac{3V_2}{Z}e^{j100\pi t}\right] = \left|\frac{3V_2}{Z}\right|.\cos\left(100\pi t - \frac{2\pi}{3} - arg(Z)\right)$$

Como $Z = 17\ k\Omega\angle 0,49 = 17\ k\Omega\angle 28^o$,

$$i_2(t) = \frac{3.\sqrt{2}.500kV}{17k\Omega}.\cos\left(100\pi t - \frac{2\pi}{3} - 0,49\right)$$

c) Se quiere compensar la potencia reactiva consumida por la carga trifásica. Describa detalladamente cómo procedería (qué elementos colocaría, cómo los conectaría y cómo los dimensionaría).

Tenga presente que no se pide realizar los cálculos, sino describir el procedimiento!!

En primer término tenemos que obtener la potencia trifásica total consumida por la carga. Al ser una carga equilibrada, la potencia es el triple de la que consume una fase. Ésta la podemos obtener diréctamente del equivalente monofásico, o usando la corriente de línea:

$$Q = 3 \times |I_1|^2 re(Z)$$

Para compensar la reactiva, colocamos tres condensadores idénticos en paralelo con la carga. Podrían estar en triángulo o estrella; la primera opción es, para una reactiva dada, la que implica valores menores de capacidad. Al estar en triángulo, cada condensador recibe la tensión compuesta y debe aportar un tercio de la reactiva total. Con esta relación se pueden dimensionar.