Teoría de circuitos

Segundo parcial - Ejemplos de ejercicios

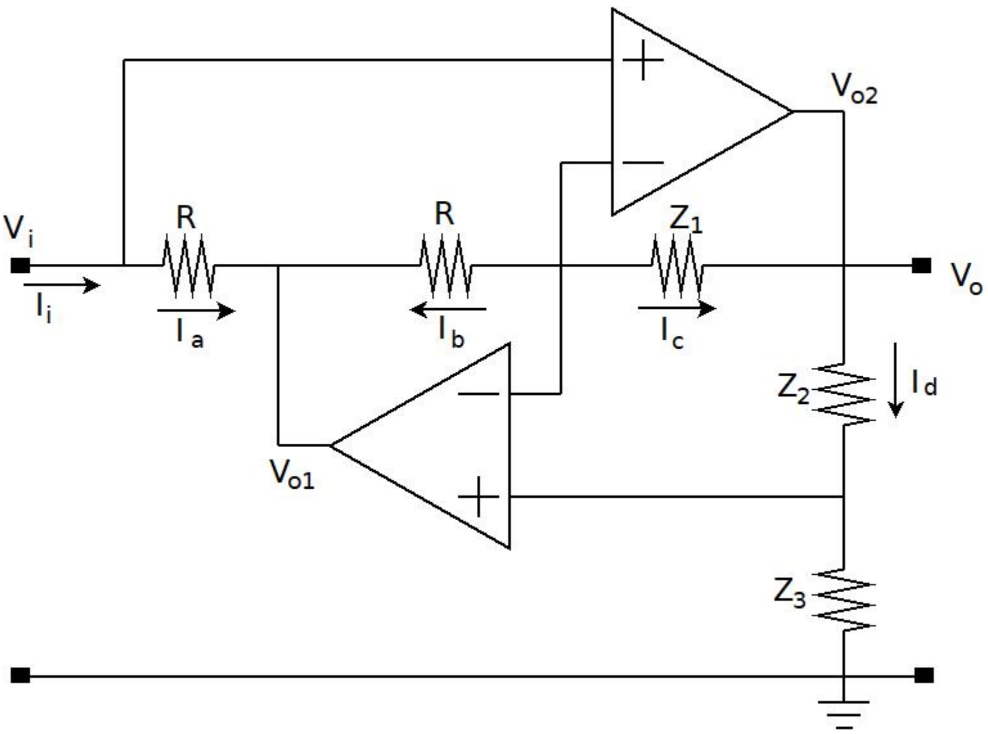
2^o semestre 2020

Comentarios:

- **Estos ejercicios son ejemplos que complementan los de los prácticos y los de parciales anteriores, por lo que se recomienda hacerlos luego de culminar los prácticos.**
- **Sugerimos también recurrir a las soluciones recién como último recurso, luego de haber discutido y consultado.**
- **En el 2018, el orden de los temas fue como este año, pero en 2019, "diagramas de Bode"fue para el segundo parcial y "sistemas trifásicos"fue para el primero.**

Problema 1 (XX puntos)

En el circuito de la figura, los operacionales son ideales y funcionan en zona lineal y todas las tensio-



nes indicadas están referidas a tierra. Se pide:

a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

b) Hallar la impedancia de entrada $Z_i = \frac{V_i}{I_i}$.

c) Para $Z_1 = R$, $Z_2 = 1/Cs$ y $Z_3 = R + Ls$, hallar respuesta del sistema a un escalón de amplitud E.

Problema 2 (XX puntos)

Consideremos las *constantes generales* o *parámetros de cadena* de un cuadripolo, que dan lugar a la siguiente descripción:

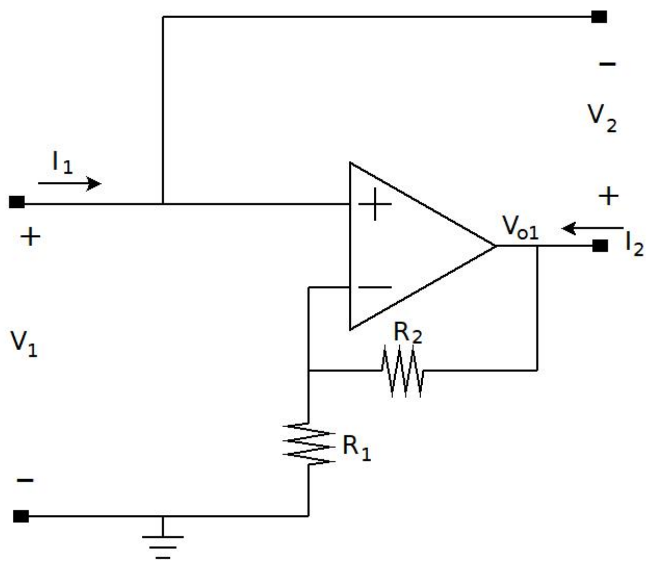
$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad , \quad I_1 = CV_2 - DI_2$$

Estos parámetros permiten describir de manera sencilla cómo se ve desde el lado 1 de un cuaripolo una impedancia Z_L que carga el lado 2. La expresión concreta es:

$$Z_{v1} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

Un cuadripolo se llama *convertidor de impedancia negativa* (NIC por sus siglas en inglés) si existe una constante K positiva tal que para cualquier Z_L que cargue su lado 2, la impedancia que se ve del lado 1 es $Z_{v1} = -K.Z_L$.

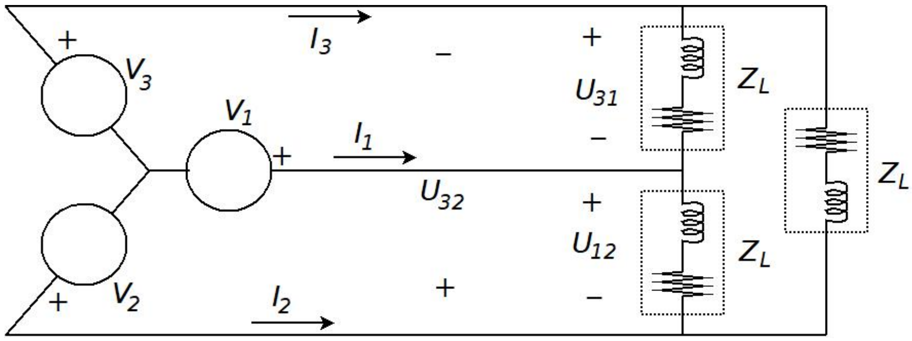
a) Hallar las condiciones que tienen que cumplir las constantes (A, B, C, D) para que un cuadripolo sea un NIC de parámetro $-K$ dado.



b) Mostrar que el siguiente circuito implementa un NIC y hallar K en función de los elementos del circuito. Notar la polaridad de la tensión V_2!!!

Problema 3 (XX puntos)

En el circuito trifásico de la figura, se pide:



a) Transfigurar la carga de triángulo a estrella.

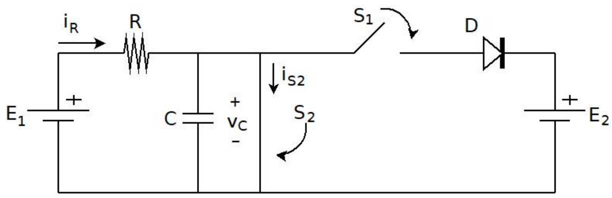
b) Dibujar el equivalente monofásico.

c) Hallas las expresiones de las potencias activas, reactiva y aparente consumidas por la carga trifásica.

d) Para $Z_L = (300\angle 60^o)\Omega$, compensar la potencia reactiva consumida por la carga a la fuente trifásica. Indicar, qué elementos colocaría, cómo los colocaría y qué valor tendrían.

Problema 4 (XX puntos)

En el circuito de la figura, el condensador se encuentra inicialmente descargado. Se cumple además $E_1 = 2E_2$. En $t = 0$, la llave S_1 se cierra y la llave S_2 se abre.



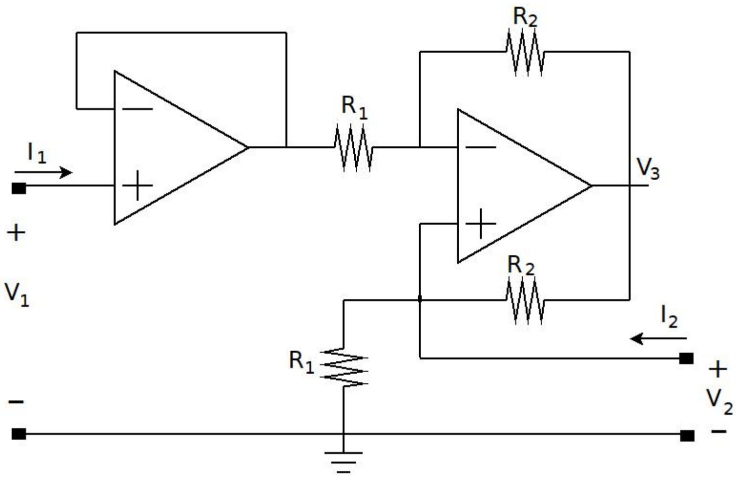
a) Calcular el instante de tiempo t^* positivo en el que el diodo cambia su modo de funcionamiento.

b) A partir del instante t^*, la llave S_1 se abre y la llave S_2 se cierra, permaneciendo así de allí en adelante. Calcular y graficar $v_C(t)$ y $i_{S2}(t)$ desde t^* en adelante. Se sugiere redefinir una nueva variable temporal $t' = t - t^*$.

Verificar explícitamente el funcionamiento del diodo!!

Problema 5 (XX puntos)

En el cuadripolo de la figura, los operacionales son ideales y funcionan en zona lineal.



a) Hallar las admitancias de cortocircuito, justificando bien los pasos dados.

b) Se conecta al lado 1 una fuente de tensión constante de valor E. Verificar que el circuito funciona desde el lado 2 como una fuente ideal de corriente, es decir, entrega una corriente independiente de la carga que se le conecte del lado 2.

Problema 6 (XX puntos)

Se considera un cuadripolo del que se conoce la matriz de impedancias de vacío:

$$z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -Z_3 & -Z_3 \end{bmatrix}$$

Del lado 2 se conecta una carga Z_L, de forma tal que la impedancia vista desde el lado 1, Z_{v1}, es nula. Hallar Z_L.

Problema 7 (XX puntos)

Se considera un cuadripolo del que se conoce la matriz de admitancias de cortocircuito:

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(s) & -Y_1(s) \\ Y_2(s) & Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{40} & -\frac{s}{40} \\ \frac{s}{20} & \frac{2-s}{20} \end{bmatrix} \Omega^{-1}$$

Del lado 2 se conecta una carga $Z_L(s) = 1/Y_L(s)$.

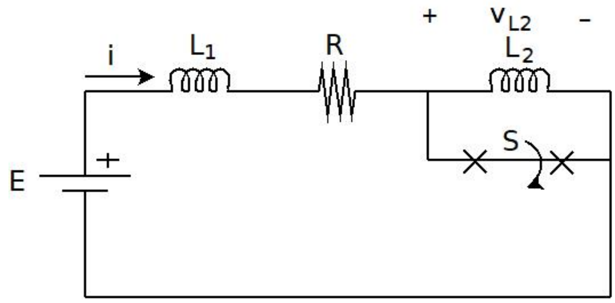
a) Hallar la transferencia del circuito: $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$.

b) Se considera $Y_L(s) = G_L$ (real y constante $\forall s$!!) y ω_0 una frecuencia positiva dada. Hallar cuánto debe valer G_L para maximizar $|H(j\omega_0)|$.

Problema 8 (XX puntos)

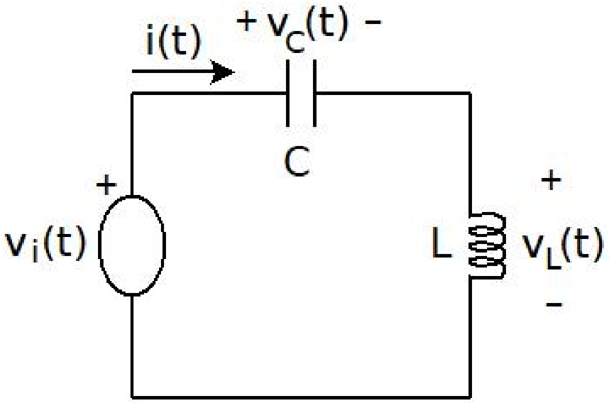
El circuito de la figura está en régimen de continua, con la llave S cerrada. Al estar en régimen, podemos considerar las bobinas como cortocircuitos. Esto implica que la corriente en régimen por L_1 vale $i_{L_1} = E/R$, en tanto la corriente por L_2 es nula, ya que está cortocircuitada.

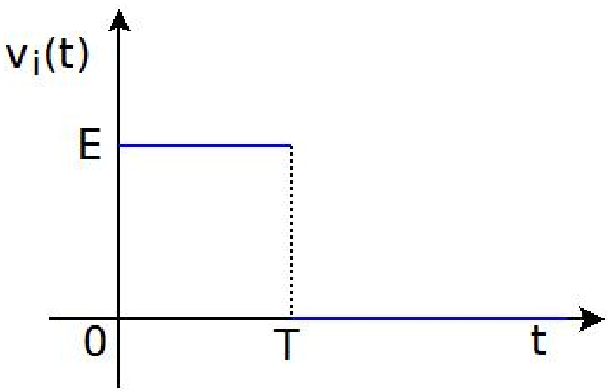
Calcular $i(t)$ y la tensión v_{L_2} en bornes de la llave y de la bobina a partir de $t = 0$, instante en que se abre la llave S.



Problema 9 (XX puntos)

El circuito de la figura de la izquierda se encuentra inicialmente en reposo. Se aplica la tensión $v_i(t)$ de la figura de la derecha, con $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

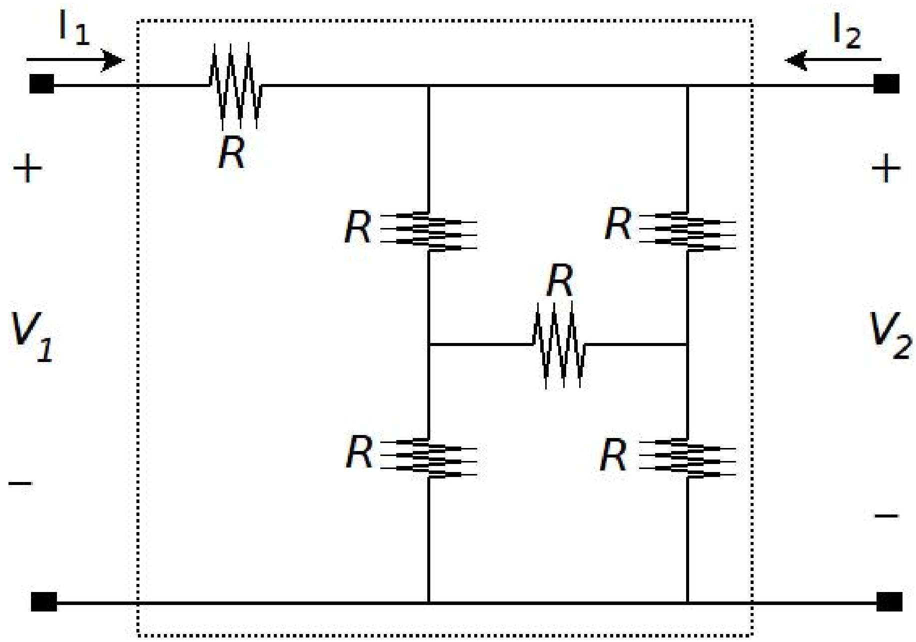




Resolviendo por tramos, calcular las tensiones $v_L(t)$ y $v_C(t)$ para todo instante positivo.

Problema 10 (XX puntos)

En el cuadripolo de la figura, se pide:



a) Identificar un triángulo y transfigurarlo a estrella.

b) Hallar las impedancias de vacío del cuadripolo.

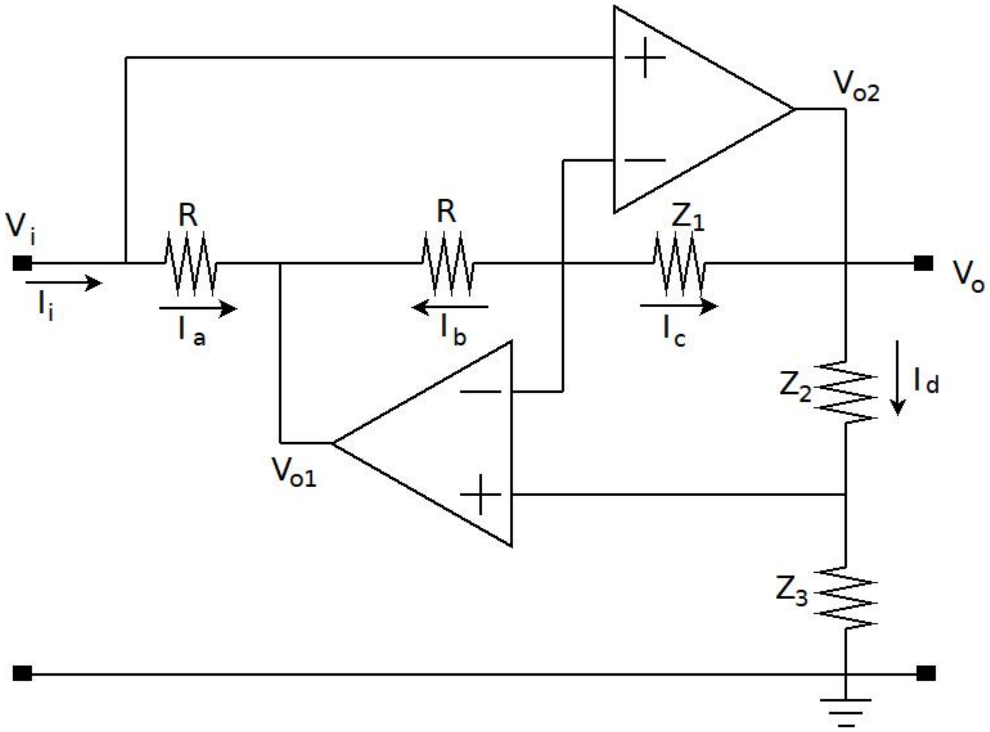
c) ¿Se trata de un cuadripolo recíproco?

d) Hallar el equivalente T o el equivalente Π.

Soluciones

Problema 1 (XX puntos)

En el circuito de la figura, los operacionales son ideales y funcionan en zona lineal y todas las tensio-



nes indicadas están referidas a tierra. Se pide:

a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

Los operacionales son ideales y funcionan en zona lineal. Tenemos el cortocircuito virtual de las patas + y -, consecuencia de la ganancia infinita, y que no entra corriente por las patas + y -, debido a la impedancia de entrada infinita. Esto nos permite relacionar en seguida las tensiones de entrada y salida, ya que la tensión V_o se divide entre las impedancias Z_2 y Z_3, siendo V_i la tensión intermedia.

$$V_i = V_o.\frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \Rightarrow V_o = V_i.\frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} \Rightarrow \boxed{H(s) = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}}$$

b) Hallar la impedancia de entrada $Z_i = \frac{V_i}{I_i}$.

Notemos que la tensión V_i aparece en varios puntos del circuito. Esto implica la igualdad de las corrientes I_a e I_b ya que

$$I_i = I_a = \frac{V_i - V_{o1}}{R} = I_b$$

Por otro lado, al no entrar corriente al operacional por la pata -,

$$-I_b = I_c = \frac{V_i - V_o}{Z_1} = \frac{V_i - H.V_i}{Z_1} = V_i.\frac{1 - H}{Z_1} \Rightarrow I_i = -V_i.\frac{1 - H}{Z_1} \Rightarrow$$

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{Z_1}{H-1} = \frac{Z_1}{1+\frac{Z_2}{Z_3}-1} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}$$

c) Para $Z_1 = R$, $Z_2 = 1/Cs$ y $Z_3 = R + Ls$, hallar respuesta del sistema a un escalón de amplitud E.

Denotemos por $R(s)$ la transformada de Laplace de la respuesta al escalón de entrada. Entonces

$$R(s) = H(s).\frac{E}{s} = \left[1 + \frac{1/Cs}{R+Ls}\right].\frac{E}{s} = \frac{R+Ls+1/Cs}{s(R+Ls)}.E = E.\frac{1+RCs+LCs^2}{Cs^2(R+Ls)} = E.\frac{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}{s^2.\left(s+\frac{R}{L}\right)}$$

Observemos que tenemos el denominador ya factoreado en sus raíces (0 doble y $-R/L$ simple). Hacemos fracciones simples:

$$R(s) = E.\left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+\frac{R}{L}}\right]$$

A y C salen por *tapadita*:

$$A = \frac{1}{RC} \quad , \quad C = \frac{\left(-\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{R}{L}.\left(-\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}{\left(-\frac{R}{L}\right)^2} = \frac{L}{R^2C}$$

Para obtener B, hacemos denominador común:

$$A\left(s+\frac{R}{L}\right) + Bs\left(s+\frac{R}{L}\right) + Cs^2 = s^2\left(B+C\right) + \left(B\frac{R}{L}+A\right)s + \left(A\frac{R}{L}\right) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$$

De donde

$$\begin{cases} B+C &= B+\frac{L}{R^2C} &= 1 \Rightarrow B = \frac{R^2C-L}{R^2C} \\ B\frac{R}{L}+A &= B\frac{R}{L}+\frac{1}{RC} &= \frac{R}{L} \Rightarrow B = \frac{R^2C-L}{R^2C} \\ A\frac{R}{L} &= \frac{1}{RC}\frac{R}{L} &= \frac{1}{LC} \end{cases}$$

Entonces

$$R(s) = E.\left[\frac{\frac{1}{RC}}{s^2} + \frac{\frac{R^2C-L}{R^2C}}{s} + \frac{\frac{L}{R^2C}}{s+\frac{R}{L}}\right]$$

$\Rightarrow$

$$r(t) = Y(t).E.\left[\frac{t}{RC} + \frac{R^2C-L}{R^2C} + \frac{L}{R^2C}e^{-\frac{R}{L}t}\right] = Y(t).E.\left[\frac{t}{RC} + 1 - \frac{L}{R^2C}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\right]$$

Notar que el operacional va a saturar a $+V_{CC}$ por culpa de la rampa en la respuesta.

Problema 2 (XX puntos)

Consideremos las *constantes generales* o *parámetros de cadena* de un cuadripolo, que dan lugar a la siguiente descripción:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad , \quad I_1 = CV_2 - DI_2$$

Estos parámetros permiten describir de manera sencilla cómo se ve desde el lado 1 de un cuaripolo una impedancia Z_L que carga el lado 2. La expresión concreta es:

$$Z_{v1} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

Un cuadripolo se llama *convertidor de impedancia negativa* (NIC por sus siglas en inglés) si existe una constante K positiva tal que para cualquier Z_L que cargue su lado 2, la impedancia que se ve del lado 1 es $Z_{v1} = -K.Z_L$.

a) Hallar las condiciones que tienen que cumplir las constantes (A, B, C, D) para que un cuadripolo sea un NIC de parámetro $-K$ dado.

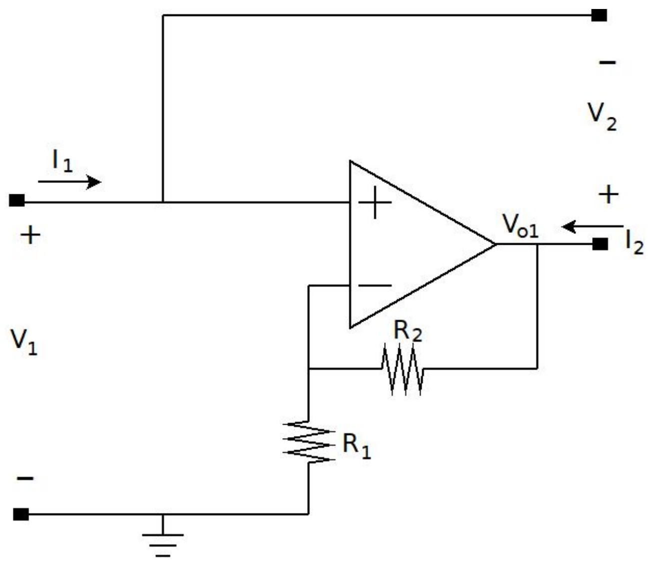
Sabemos que para todo Z_L que cargue el secundario,

$$-KZ_L = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \Rightarrow -KCZ_L^2 - KDZ_L = AZ_L + B$$

$$\Rightarrow KC.Z_L^2 + (A + KD).Z_L + B = 0 \quad , \quad \forall Z_L$$

De donde

$$A = -KD \quad , \quad B = C = 0$$



b) Mostrar que el siguiente circuito implementa un NIC y hallar K en función de los elementos del circuito. Notar la polaridad de la tensión V_2!!!

Como el operacional es ideal y funciona en zona lineal, al estar realimentado por la pata -, tenemos cortocircuito virtual y que no entra corriente por las patas + y -. Por cómo es la topología del circuito, automáticamente tenemos

$$I_1 = I_2 = CV_2 - DI_2 \Rightarrow C = 0,\ D = -1$$

Además, $V_2 = V_{o1} - V_1$, siendo V_{o1} la tensión de salida del opamp medida respecto de tierra. Además, por el cortocircuito virtual:

$$V_1 = V_{o1}.\frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow V_{o1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right).V_1$$

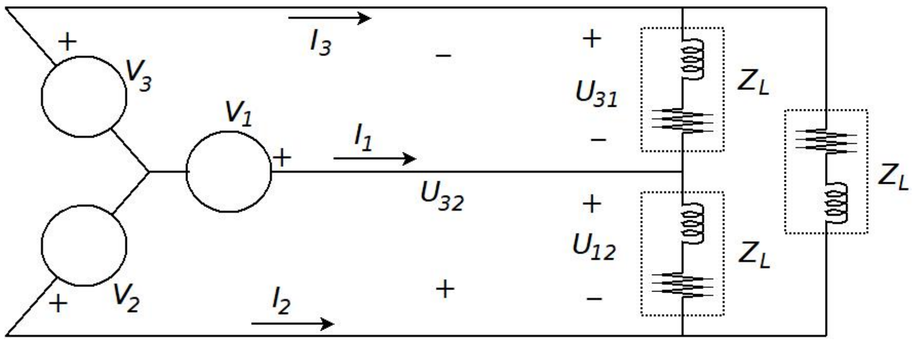
De donde,

$$V_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right).V_1 - V_1 = \frac{R_2}{R_1}.V_1 = AV_2 - BI_1 \Rightarrow A = \frac{R_1}{R_2},\ B = 0$$

El circuito implementa un NIC con $K = \frac{R_2}{R_1}$.

Problema 3 (XX puntos)

(presentamos una solución reducida)
En el circuito trifásico de la figura, con frecuencia $50Hz$ y $Z_L = R_L + jX_L$ inductiva, se pide:



a) Transfigurar la carga de triángulo a estrella.

Al ser un triángulo de tres impedancias iguales, se transfigura a una estrella de tres impedancias idénticas, de valor igual a un tercio de la impedancia original.

b) Dibujar el equivalente monofásico.

El equivalente monofásico consiste en una única malla con una fuente sinusoidal (V_1 por ejemplo), que alimenta una impedancia $Z_L/3$.

c) Hallas las expresiones de las potencias activas, reactiva y aparente consumidas por la carga trifásica.

Las potencias son tres veces las que encontramos en el equivalente monofásico, ya que el circuito es equilibrado.

Entonces

$$P_T = 3P_M = 3|V_1|^2 \frac{R_L/3}{\left[\left(\frac{R_L}{3}\right)^2 + \left(\frac{X_L}{3}\right)^2\right]} = |V_1|^2 \frac{9R_L}{R_L^2 + X_L^2}$$

$$Q_T = 3Q_M = 3|V_1|^2 \frac{X_L/3}{\left[\left(\frac{R_L}{3}\right)^2 + \left(\frac{X_L}{3}\right)^2\right]} = |V_1|^2 \frac{9X_L}{R_L^2 + X_L^2}$$

$$S_T = P_T + jQ_T$$

d) Para $Z_L = (300\angle 60^o)\Omega$, compensar la potencia reactiva consumida por la carga a la fuente trifásica. Indicar, qué elementos colocaría, cómo los colocaría y qué valor tendrían.

Para compensar la reactiva que consume la carga, que es inductiva, colocamos una carga trifásica capacitiva en paralelo con la carga original. Para calcular qué valor de condensador poner, primero compensamos la reactiva en el equivalente monofásico, obteniendo:

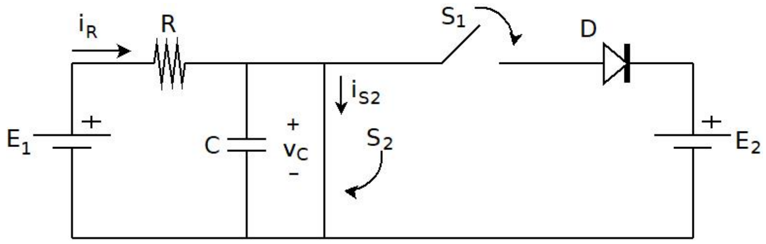
$$Q_C = -|V_1|^2 C\omega_0 = -\frac{Q_T}{3} \Rightarrow C = \frac{Q_T}{3|V_1|^2\omega_0}$$

La compensación trifásica puede ser con una estrella o un triángulo de condensadores. El valor que hallamos en el equivalente monofásico da lugar a una estrella de condensadores identicos que compensan la reactiva, ya que se conectan entre las líneas y el *punto neutro*. Si transfiguramos esta estrella a un triángulo equivalente, vemos que podemos usar condensadores un tercio más chicos (la impedancia se multiplica entre 3, por lo que la capacidad se divide entre 3).

Quedan pendientes bosquejar los circuitos resultantes (el monofásico y la conenxión de la compensación).

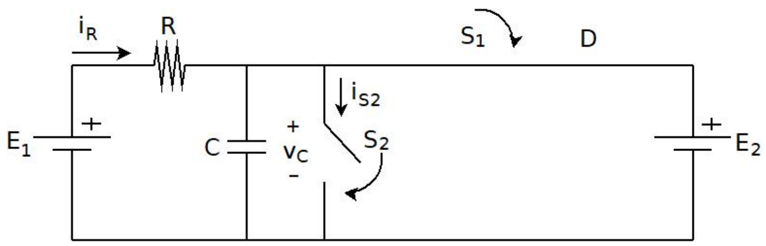
Problema 4 (XX puntos)

En el circuito de la figura, el condensador se encuentra inicialmente descargado. Se cumple además $E_1 = 2E_2$. En $t = 0$, la llave S_1 se cierra y la llave S_2 se abre.



a) Calcular el instante de tiempo t^* positivo en el que el diodo cambia su modo de funcionamiento.

Analicemos el circuito antes del tiempo $t = 0$. En este caso el circuito está con la llave S_1 abierta y la llave S_2 cerrada. La tensión en bornes del condensador es nula, al estar cortocircuitado. Cuando conmutan las llaves, lo primero que tenemos que ver es el estado del diodo, ya que es un elemento lineal a tramos, es decir, que según su estado, tenemos dos posibles circuitos lineales para analizar. Dado que $E_1 = 2E_2$, es natural suponer que D está ON (esta suposición no es crítica, ya que sin importar qué supongamos, lo tenemos que verificar). Habiendo asumido un estado del diodo, obtenemos el siguiente circuito lineal:



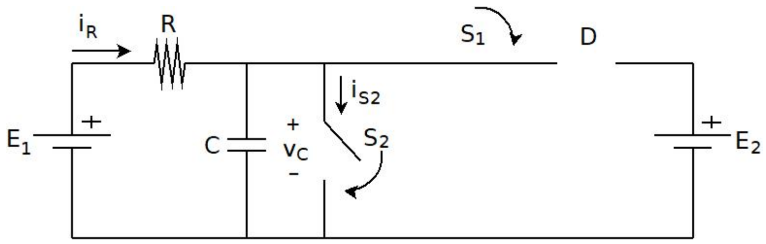
Al pasar al circuito equivalente en Laplace, no aparece una fuente asociada al dato previo del condensador, ya que está descargado. Observemos que esencialmente el condensador se carga instantáneamente a la tensión E_2. Verifiquemos el estado del diodo D. Tenemos que hallar la corriente y ver que es positiva (considerando el sentido estándar). Planteamos el nudo intermedio:

$$-I_D(s) = \frac{\frac{E_2}{s}}{\frac{1}{Cs}} + \frac{\frac{E_2}{s} - \frac{E_1}{s}}{R} = CE_2 + \frac{E_2 - E_1}{Rs}$$

Pasamos al tiempo, para ver el signo:

$$i_D(t) = -CE_2\delta(t) + \frac{E_1 - E_2}{R} = -CE_2\delta(t) + \frac{E_2}{R}$$

¿Cómo miramos si se verifica o no el estado del diodo, teniendo presente que hay una δ de Dirac? Esencialmente, pensemos en la idea de la δ como *algo grande que dura poco*, que equivale a pensar una resistencia pequeña en el cable que conecta la fuente al condensador. De esa manera, podemos ver que la corriente inicialmente tiende a ir desde la fuente E_2 hacia el condensador, por lo que no se verifica el estado del diodo. Por lo tanto, pensemo en el diodo OFF. Obtenemos el siguiente circuito:



Tenemos un circuito estándar de carga de un condensador, que arranca descargado y se carga exponencialmente hacia la fuente E_1 con constante de tiempo RC. De donde

$$v_C(t) = Y(t)E_1.\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

(Esta ecuación de carga/descarga exponencial del condensador la hemos visto varias veces a lo largo del curso; se puede hacer también por Laplace).

No podemos olvidarnos de verificar el estado del diodo. Al haberlo supuesto OFF, tenemos que verificar que su tensión en bornes es negativa, medida con la polaridad estándar. Podemos calcularla directamente en el tiempo:

$$v_D(t) = v_C(t) - Y(t)E_2 = Y(t)E_1.\left(1 - e^{-t/RC}\right) - Y(t)E_2 = Y(t)2E_2.\left(1 - e^{-t/RC}\right) - Y(t)E_2$$

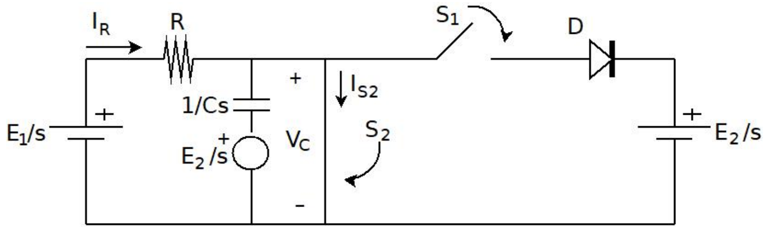
$$v_D(t) = Y(t)E_2.\left(1 - 2e^{-t/RC}\right)$$

que es inicialmente negativo, por lo que el diodo verifica!! ¿Hasta cuándo? Hasta que v_D deja de ser negativo. Esto se da en el instante t^* en que

$$v_D(t^*) = 0 = E_2.\left(1 - 2e^{-t^*/RC}\right) \Rightarrow e^{-t^*/RC} = \frac{1}{2} \Rightarrow t^* = RC\ln(2)$$

b) A partir del instante t^*, la llave S_1 se abre y la llave S_2 se cierra, permaneciendo así de allí en adelante. Calcular y graficar $v_C(t)$ y $i_{S2}(t)$ desde t^* en adelante. Se sugiere redefinir una nueva variable temporal $t' = t - t^*$.

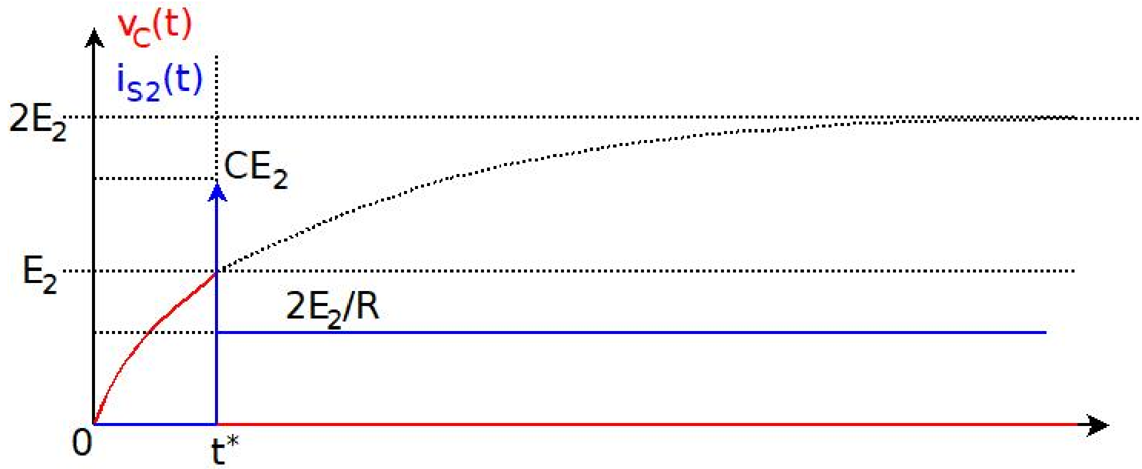
Al abrir la llave S_1, se nos separa el circuito en dos, y la parte de interés queda lineal, ya que el diodo queda del otro lado. Pasemo al circuito equivalente en Laplace, observando que tenemos un dato previo en el condensador dado por $v_C(t^*) = v_{C0} = E_2$.



De la figura, vemos que la tensión en bornes del condensador se anula instantáneamente y se mantiene así hacia el futuro. Calculemos la corriente $I_{S2}(s)$ planeando el nudo que conecta R con C:

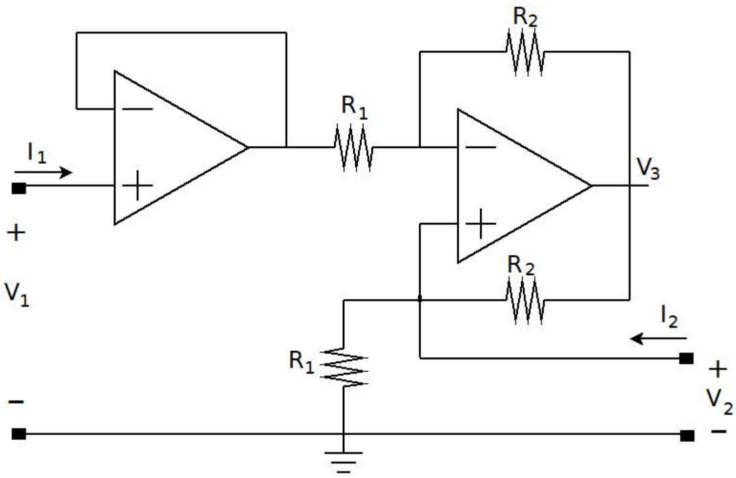
$$I_{S2}(s) = \frac{E_1}{Rs} + \frac{E_2}{s}.Cs = \frac{E_1}{Rs} + CE_2 \Rightarrow i_{S2}(t') = CE_2\delta(t') + Y(t')\frac{2E_2}{R} = CE_2\delta_{t^*}(t) + Y(t-t^*)\frac{2E_2}{R}$$

donde hemos introducido la variable auxiliar $t' = t - t^*$ para indicar el tiempo de análisis de este último tramo. La siguiente gráfica muestran los bosquejos de $v_C(t)$ en rojo e $i_{S2}(t)$ en azul.



Problema 5 (XX puntos)

En el cuadripolo de la figura, los operacionales son ideales y funcionan en zona lineal.



a) Hallar las admitancias de cortocircuito, justificando bien los pasos dados.

Recordemos la expresión de las admitancias de cortocircuito.

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{cases}$$

Analicemos con cuidado el circuito. Observemos que la configuración de seguidor del operacional de la izquierda, implica automáticamente que $I_1 = 0$ siempre, de donde

$$y_{11} = y_{12} = 0$$

Por otro lado, propagando las tensiones en el circuito gracias al cortocircuito virtual, tenemos que

$$\frac{V_1 - V_2}{R_1} = \frac{V_2 - V_3}{R_2} = \frac{0 - V_2}{R_1} + I_2 \Rightarrow \frac{V_1}{R_1} = I_2 \Rightarrow y_{21} = \frac{1}{R_1} \quad , \quad y_{22} = 0$$

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix}$$

b) Se conecta al lado 1 una fuente de tensión constante de valor E. Verificar que el circuito funciona desde el lado 2 como una fuente ideal de corriente, es decir, entrega una corriente independiente de la carga que se le conecte del lado 2.

En las condiciones descritas, tenemos que $I_2 = \frac{E}{R_1}$, independientemente de la carga que conecte del lado 2!! Se sugiere conectar una impedancia de carga de valor Z_L y verificar que la corriente por ella no depende de ella. El operacional de la derecha se encarga de ajustar V_2 para que todo cierre.

Problema 6 (XX puntos)

Se considera un cuadripolo del que se conoce la matriz de impedancias de vacío:

$$z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -Z_3 & -Z_3 \end{bmatrix}$$

Del lado 2 se conecta una carga Z_L, de forma tal que la impedancia vista desde el lado 1 es nula. Hallar Z_L.

Sabemos que

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -Z_3 & -Z_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases}$$

La impedancia vista del lado 1 es $Z_{v1} = \frac{V_1}{I_1}$. Tratemos de calcular ese cociente en función de los datos: la carga Z_L y las impedancias de vacío. Al cargar el lado 2 con Z_L, tenemos que $V_2 = -Z_L.I_2$ (el signo de menos viene se debe a que I_2 se toma entrante al cuadripolo). Entonces

$$-Z_L.I_2 = V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \Rightarrow I_1 = -\frac{z_{22} + Z_L}{z_{21}}.I_2$$

Entonces

$$V_1 = -z_{11}.\left(\frac{z_{22} + Z_L}{z_{21}}\right).I_2 + z_{12}.I_2 = \left[z_{12} - \frac{z_{11}.(z_{22} + Z_L)}{z_{21}}\right].I_2 = \left[\frac{(z_{12}z_{21} - z_{11}.z_{22}) - z_{11}.Z_L}{z_{21}}\right].I_2$$

Finalmente,

$$Z_{v1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\left[\frac{(z_{12}z_{21} - z_{11}.z_{22}) - z_{11}.Z_L}{z_{21}}\right].I_2}{-\frac{z_{22}+Z_L}{z_{21}}.I_2} = \frac{(z_{11}.z_{22} - z_{12}z_{21}) + z_{11}.Z_L}{z_{22} + Z_L}$$

Sustituimos por los valores dados e igualamos a 0 para hallar Z_L:

$$Z_{v1} = \frac{(-Z_1Z_3 + Z_2Z_3) + Z_1Z_L}{-Z_3 + Z_L} = 0 \Leftrightarrow (-Z_1Z_3 + Z_2Z_3) + Z_1Z_L = 0 \Leftrightarrow Z_L = \frac{Z_1Z_3 - Z_2Z_3}{Z_1} = -\frac{|z|}{Z_1}$$

Problema 7 (XX puntos)

Se considera un cuadripolo del que se cononce la matriz de admitancias de cortocircuito:

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(s) & -Y_1(s) \\ Y_2(s) & Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{40} & -\frac{s}{40} \\ \frac{s}{20} & \frac{2-s}{20} \end{bmatrix} \Omega^{-1}$$

Del lado 2 se conecta una carga $Z_L(s) = 1/Y_L(s)$.

a) Hallar la transferencia del circuito: $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_i(s)}$.

Sabemos que

$$\begin{cases} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{cases} \quad , \quad I_2 = -Y_L.V_2$$

Entonces

$$-Y_L.V_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \Rightarrow V_2(y_{22} + Y_L) = -y_{21}V_1 \Rightarrow H(s) = -\frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L}$$

Sustituyendo por lo que conocemos:

$$H(s) = -\frac{Y_2(s)}{Y_3(s) + Y_L(s)} = -\frac{\frac{s}{20}}{\frac{2-s}{20} + Y_L(s)} = -\frac{s}{2 - s + 20.Y_L(s)} = -\frac{s}{2 - s + 20[G_L(s) + jB_L(s)]}$$

b) Se considera $Y_L(s) = G_L$ (real y constante $\forall s$!!) y ω_0 una frecuencia positiva dada. Hallar cuánto debe valer G_L para maximizar $|H(j\omega_0)|$.

$$H(j\omega_0) = -\frac{j\omega_0}{2 - j\omega_0 + 20[G_L]} = -\frac{j\omega_0}{(2 + 20G_L) - j(\omega_0)}$$

Entonces

$$|H(j\omega_0)| = \frac{\omega_0}{\sqrt{(2 + 20G_L)^2 + (\omega_0)^2}}$$

Queremos maximizar esta expresión en función de G_L. Por comodidad, maximicemos su cuadrado:

$$h(G_L) = |H(j\omega_0)|^2 = \frac{\omega_0^2}{(2 + 20G_L)^2 + (\omega_0)^2}$$

Anulemos la derivada

$$\frac{dh}{dG_L} = -\frac{\omega_0^2.40(2 + 20G_L)}{[(2 + 20G_L)^2 + (\omega_0)^2]^2} \Rightarrow G_L = -\frac{1}{10}\Omega^{-1}$$

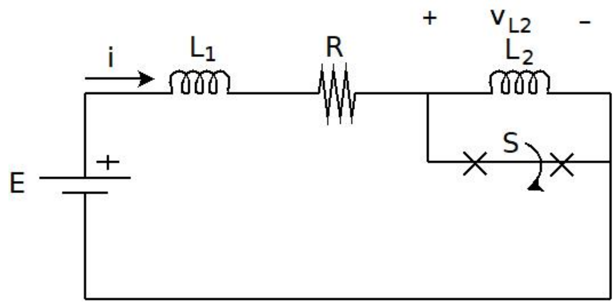
El módulo máximo vale

$$|H(j\omega_0)| = \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1$$

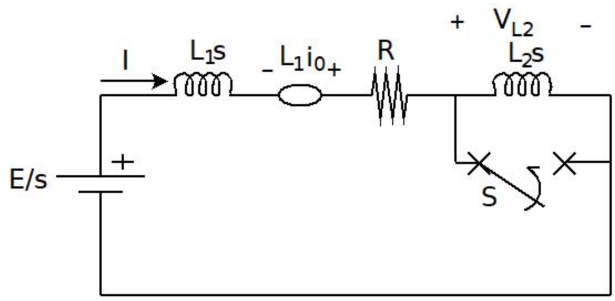
Problema 8 (XX puntos)

El circuito de la figura está en régimen de continua, con la llave S cerrada. Al estar en régimen, podemos considerar las bobinas como cortocircuitos. Esto implica que la corriente en régimen por L_1 vale $i_{L_1} = E/R$, en tanto la corriente por L_2 es nula, ya que está cortocircuitada.

Calcular $i(t)$ y la tensión v_{L_2} en bornes de la llave y de la bobina L_2 a partir de $t = 0$, instante en que se abre la llave S.



En primer término consideramos el circuito en Laplace. Tenemos una única malla, y una fuente de continua de valor i_0 asociada al dato previo no nulo en la inductancia L_1.



La expresión en Laplace de la corriente es

$$I(s) = \frac{E/s + L_1 i_0}{R + (L_1 + L_2)s} = \frac{E}{s[R + (L_1 + L_2)s]} + \frac{L_1 i_0}{R + (L_1 + L_2)s} = \frac{\frac{E}{L_1+L_2}}{s\left[s + \frac{R}{(L_1+L_2)}\right]} + \frac{\frac{L_1 i_0}{L_1+L_2}}{s + \frac{R}{(L_1+L_2)}}$$

Tenemos dos términos y podemos pasarlos a fracciones simples y aplicar *tapadita.*

$$\frac{1}{s\left[s + \frac{R}{(L_1+L_2)}\right]} = \frac{\frac{L_1+L_2}{R}}{s} + \frac{-\frac{L_1+L_2}{R}}{s + \frac{R}{(L_1+L_2)}}$$

Entonces

$$I(s) = \frac{E}{R}.\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{(L_1+L_2)}}\right] + \frac{L_1 i_0}{L_1 + L_2}.\frac{1}{s + \frac{R}{(L_1+L_2)}} = \frac{E}{R}.\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{(L_1+L_2)}}\right] + \frac{E}{R}.\frac{L_1}{L_1 + L_2}.\frac{1}{s + \frac{R}{(L_1+L_2)}}$$

$\Rightarrow$
$$I(s) = \frac{E}{R}.\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{(L_1+L_2)}} + \frac{L_1}{L_1+L_2}.\frac{1}{s+\frac{R}{(L_1+L_2)}}\right] = \frac{E}{R}.\left[\frac{1}{s} - \frac{L_2}{L_1+L_2}.\frac{1}{s+\frac{R}{(L_1+L_2)}}\right]$$

De donde
$$i(t) = Y(t).\frac{E}{R}.\left[1 - \frac{L_2}{L_1+L_2}.e^{-\frac{R}{L_1+L_2}.t}\right]$$

Calculemos ahora la tensión en bornes de la inductancia L_2. Podemos hacerlo en el tiempo, notando que

$$v_L(t) = L_2.\frac{di}{dt}$$

Derivamos como función donde es derivable y agregamos δs de Dirac en los puntos de discontinuidad. En este caso, aparece una δ en el origen:

$$v_L(t) = Y(t)\frac{EL_2^2}{(L_1+L_2)^2}.e^{-\frac{R}{L_1+L_2}.t} + L_2.\left[i(0^+) - i(0^-)\right].\delta(t) = Y(t)\frac{EL_2^2}{(L_1+L_2)^2}.e^{-\frac{R}{L_1+L_2}.t} + L_2.\left[\frac{L_1}{L_1+L_2}\right].\delta(t)$$

En este caso, la δ en la tensión representa la chispa que se ve cuando se corta abruptamente la corriente que circula por un bobinado (por ejemplo, cuando se desenchufa un motor encendido).

En lugar de haberlo hecho en el tiempo, podíamos haber calculado todo en Laplace:

$$V_L(s) = L_2 s.I(s) = L_2 s.\frac{E}{R}.\left[\frac{1}{s} - \frac{L_2}{L_1+L_2}.\frac{1}{s+\frac{R}{(L_1+L_2)}}\right] = \frac{L_2E}{R}.\left[1 - \frac{L_2}{L_1+L_2}.\frac{s}{s+\frac{R}{(L_1+L_2)}}\right]$$

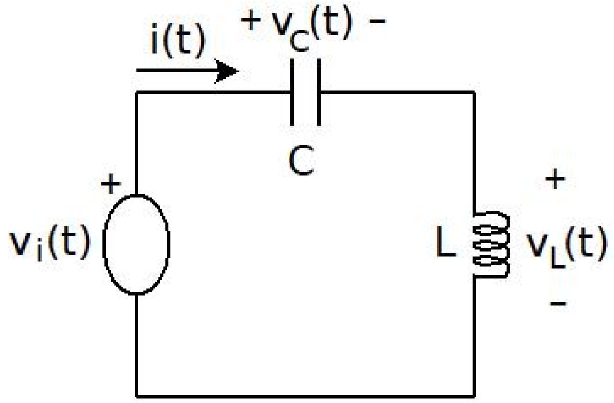
$$V_L(s) = \frac{L_2E}{R}.\left[1 - \frac{L_2}{L_1+L_2}.\left(1 - \frac{\frac{R}{(L_1+L_2)}}{s+\frac{R}{(L_1+L_2)}}\right)\right] = \frac{L_1L_2E}{R} + \frac{L_2^2E}{(L_1+L_2)^2}.\frac{1}{s+\frac{R}{(L_1+L_2)}}$$

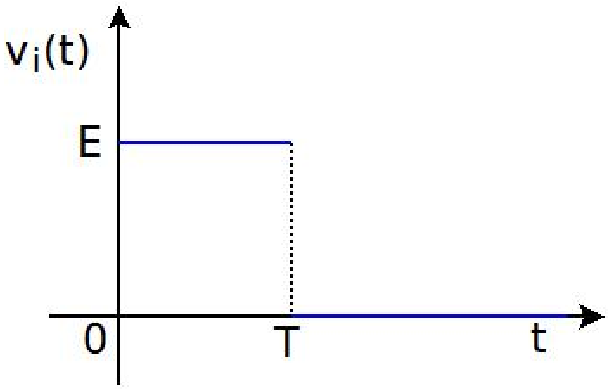
Volviendo al tiempo, recuperamos el resultado anterior.

Por puntos extras :) - ¿Cuál debería ser el dato previo en la inductancia L_2 para evitar que se produzca una delta de tensión al abrir la llave?

Problema 9 (XX puntos)

El circuito de la figura de la izquierda se encuentra inicialmente en reposo. Se aplica la tensión $v_i(t)$ de la figura de la derecha, con $T = 2\pi\sqrt{LC}$.





a) Resolviendo por tramos, calcular las tensiones $v_L(t)$ y $v_C(t)$ para todo instante positivo.

Resolvemos por tramos. Al ser un circuito lineal, podemos definir tramos solamente asociados a la entrada: consideramos un primer tramo en el que la entrada es un escalón de amplitud E y luego un segundo tramo (infinito) en el que la entrada es nula. En este segundo tramo, solo tendremos el efecto de los datos previos de la bobina y el condensador, que resumen lo que pasó en el tramo anterior.

Primer tramo: $(0, T)$
Pasamos al circuito equivalente en Laplace, con datos previos nulos. La entrada es $V_i(s) = \frac{E}{s}$. Las tensiones en la bobina y el condensador podemos obtenerlas por el divisor de tensión. Solamente calcularemos la tensión en la bobina, ya que la del condensador la sacamos aplicando la malla:

$$v_C(t) = v_i(t) - V_L(t)$$

Entonces

$$V_L(s) = \frac{Ls}{LS + \frac{1}{Cs}}.\frac{E}{s} = \frac{ELCs}{1 + LCs^2} = E.\frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \Rightarrow v_L(t) = Y(t).E.\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) = Y(t).E.\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Definiendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, nos queda

$$v_L(t) = Y(t).E.\cos(\omega_0 t) \quad , \quad v_C(t) = Y(t).E.\left[1 - \cos(\omega_0 t)\right]$$

Todo esto vale hasta $t = T$. A partir de allí, comienza un nuevo tramo.

Segundo tramo: $(T, +\infty)$
Ahora tenemos un circuito bien sencillo, con entrada nula y solamente datos previos en el condensador y la bobina. Calculemos estos datos previos, evaluando la tensión en el condensador y la corriente por la bobina al final del tramo anterior.

$$v_{C0} = v_C(T) = E.\left[1 - \cos\left(\omega_0 T\right)\right] = 0$$

La corriente podemos hallarla en el tiempo o en Laplace. Parece más sencillo en el tiempo. Igual lo hacemos primero en Laplace, en el tramo anterior:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{CE}{LCs^2 + 1} = \frac{E}{L}.\frac{1}{s^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{E}{L}.\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}}.\frac{1}{s^2 + \frac{1}{LC}} = E.\sqrt{\frac{C}{L}}.\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

De donde

$$i(t) = Y(t).E.\sqrt{\frac{C}{L}}.\sin\left(\omega_0 t\right)$$

Verificamos derivando en el tiempo:

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}Y(t).E.\left[1 - \cos\left(\omega_0 t\right)\right] = Y(t).CE.\omega_0.\sin\left(\omega_0 t\right) = Y(t).CE.\frac{1}{\sqrt{LC}}.\sin\left(\omega_0 t\right)$$

$$i(t) = Y(t).E.\sqrt{\frac{C}{L}}.\sin\left(\omega_0 t\right)$$

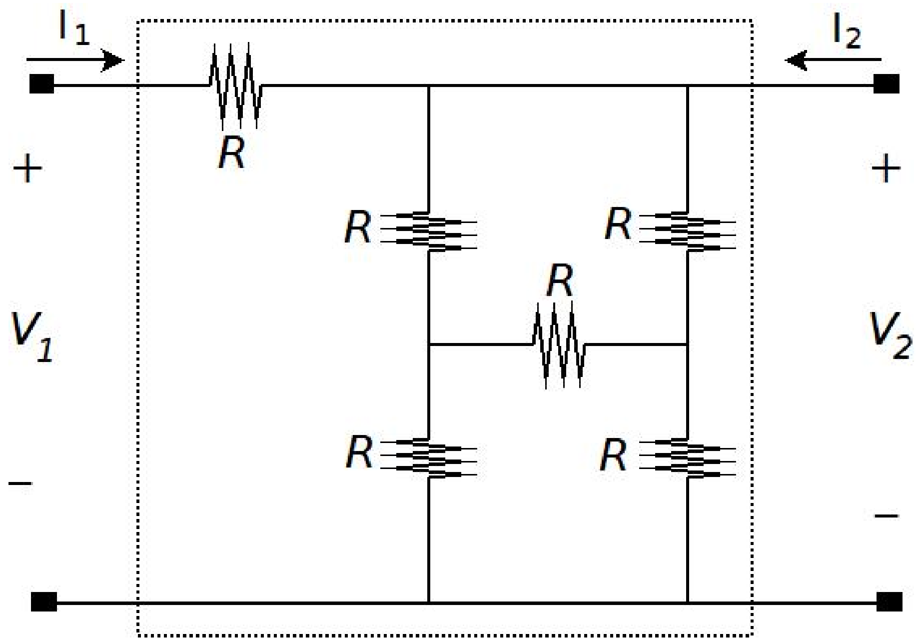
Entonces, el dato previo de la bobina es

$$i_{L0} = i(T) = E.\sqrt{\frac{C}{L}}.\sin\left(\omega_0 T\right) = 0$$

Al ser la entrada nula y ambos datos previos nulos, el circuito permanecerá en reposo desde $t = T$ en adelante.

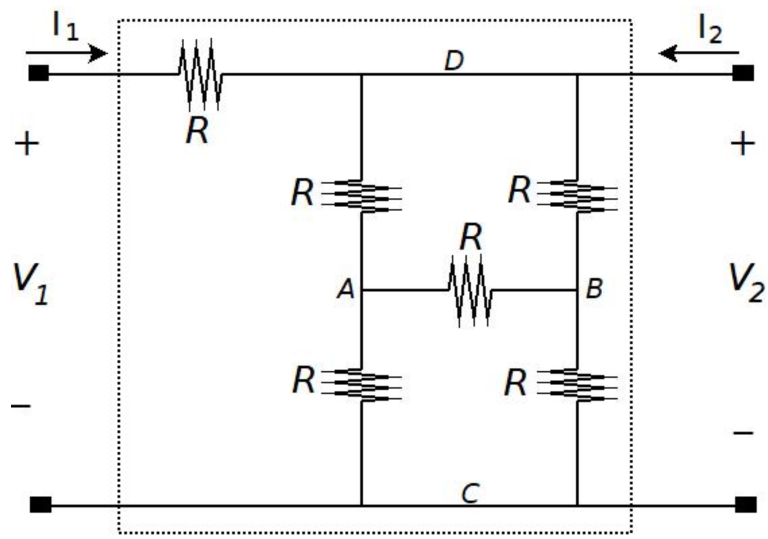
Problema 10 (XX puntos)

En el cuadripolo de la figura, se pide:

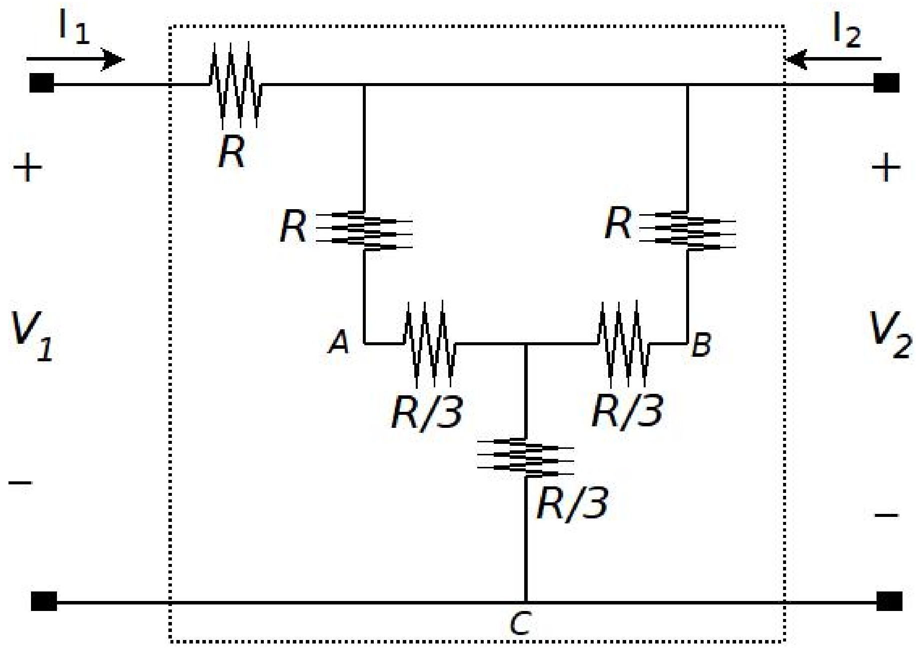


a) Identificar un triángulo y transfigurarlo a estrella.

Observando la figura, se pueden identificar dos triángulos de resistencias idénticas: uno superior, de vértices A, B y D y otro inferior, de vértices A, B y C. Consideremos el inferior. Al transfigurarlo,

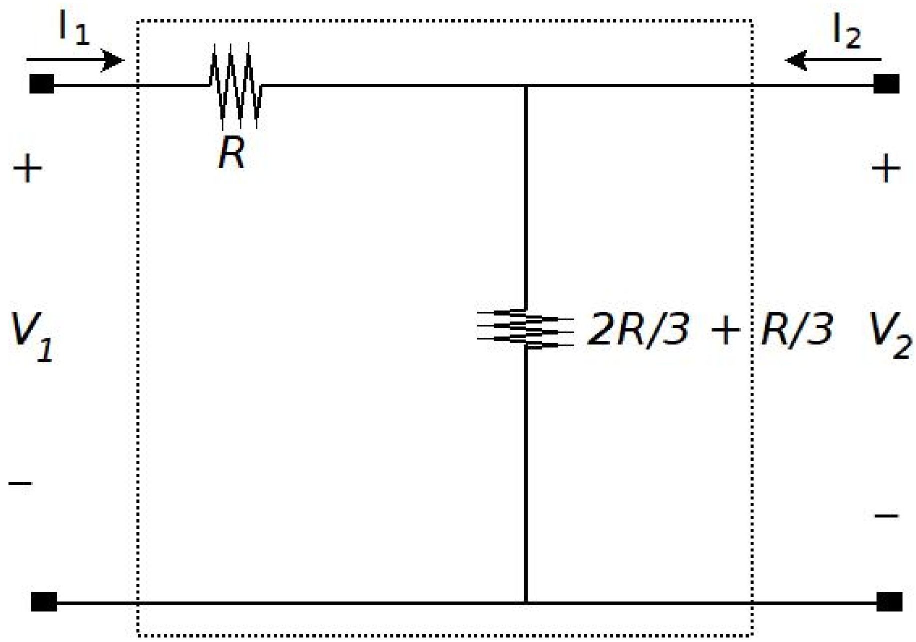


el circuito resulta ser como sigue:



b) Hallar las impedancias de vacío del cuadripolo.

Podemos pasar al siguiente circuito equivalente: Observemos que el circuito equivalente consta so-



lo de dos resistencias de valor R. Hallemos las impedancias de vacío, a partir de sus expresiones de cálculo.

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

Al ser $I_2 = 0$, la corriente I_1 circula por ambas resistencias y tenemos que $V_1 = 2R.I_1$, de donde $z_{11} = 2R$. Además, V_2 puede obtenerse por un divisor de tensión, lo que lleva a:

$$V_2 = \frac{R}{R+R}.V_1 \Rightarrow z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = R$$

Análogamente, cuando $I_1 = 0$,:

$$V_2 = R.I_2 \Rightarrow z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = R$$

$$V_1 = V_2 = R.I_2 \Rightarrow z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = R$$

Entonces

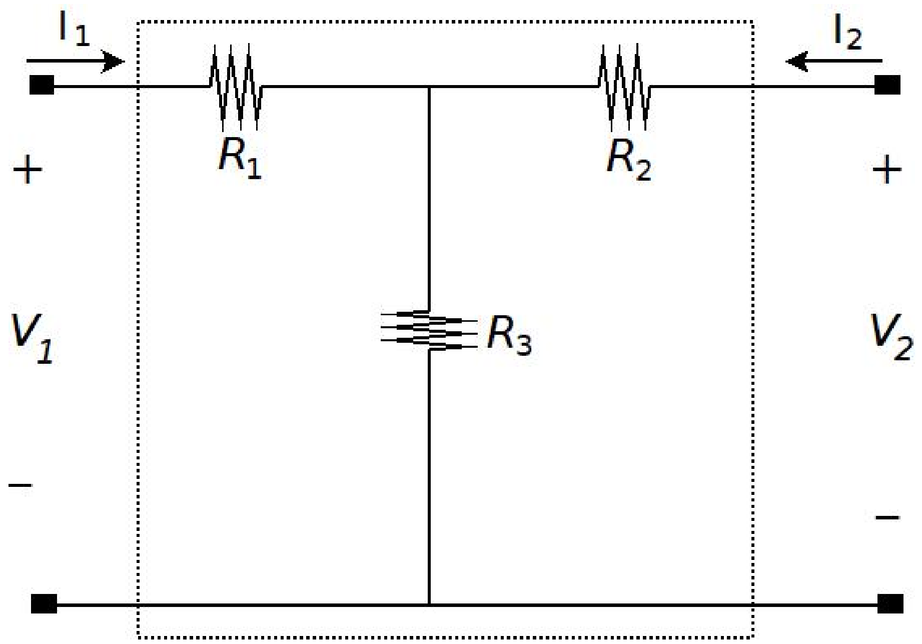
$$z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R & R \\ R & R \end{bmatrix}$$

c) ¿Se trata de un cuadripolo recíproco?

El cuadripolo es recíproco ya que no tiene fuentes dependientes. Podemos verificarlo observando que $z_{12} = z_{21}$.

d) Hallar el equivalente T o el equivalente Π.

El equivalente T consta de tres resistencias dispuestas en forma de T. Sean R_1, R_2 y R_3, como en la figura. Razonando igual que antes:



$$z_{11} = R_1 + R_3 \quad , \quad z_{12} = z_{21} = R_3 \quad , \quad z_{22} = R_2 + R_3$$

Tenemos entonces que

$$2R = R_1 + R_3 \quad , \quad R = R_3 \quad , \quad R = R_2 + R_3$$

de donde: $R_1 = R$, $R_2 = 0$ y $R_3 = R$, y completamos el equivalente T.

Hacer el equivalente Π requiere un poco más de trabajo. Primero hay que expresar las impedancias de vacío en término de las resistencias de la estructura Π y luego hay que igualarlas a las que tenemos.