Teoría de circuitos

Segundo parcial

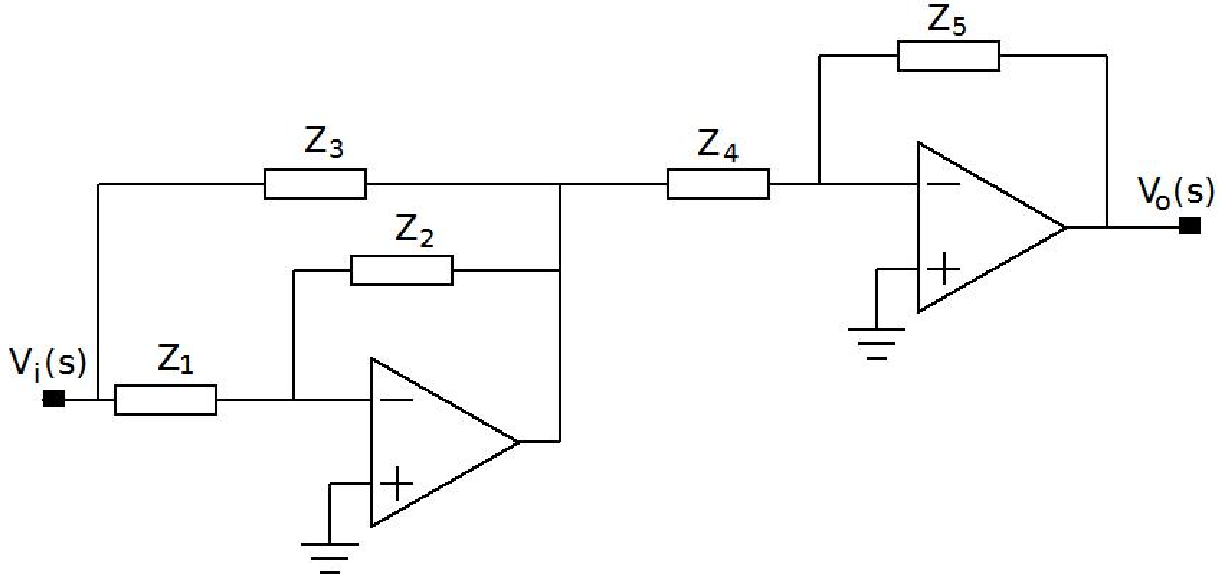
2^o semestre 2019

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No demorarse mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SER PROLIJO. EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS, RESALTANDO LOS RESULTADOS. Expresar los resultados exactamente en el formato pedido. Recordar que a través de esta evaluación se debe demostrar los conocimientos en la asignatura. Tener presente que si algo no es claro para el evaluador, se podrían perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**

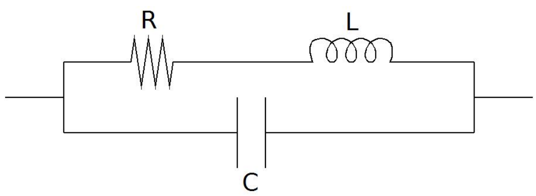
Problema 1 (19 puntos)

Se considera el circuito en Laplace de la figura, con los amplificadores operacionales ideales, funcionando en zona lineal.



a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

b) i) Re-escribir la expresión de $H(s)$ para el siguiente caso: Z_1 es la impedancia de un condensador de valor C; Z_2, Z_3 y Z_4 son resistencias de valor R; finalmente, Z_5 es la impedancia que se muestra en la figura:



ii) Se conoce el valor de $R > 0$ y se define una constante positiva ω_n. Hallar L y C en función de R y ω_n para que la expresión de $H(s)$ sea

$$H(s) = \frac{s\left(s + \frac{\omega_n}{10}\right)}{s^2 + \frac{\omega_n}{10}s + \omega_n^2}$$

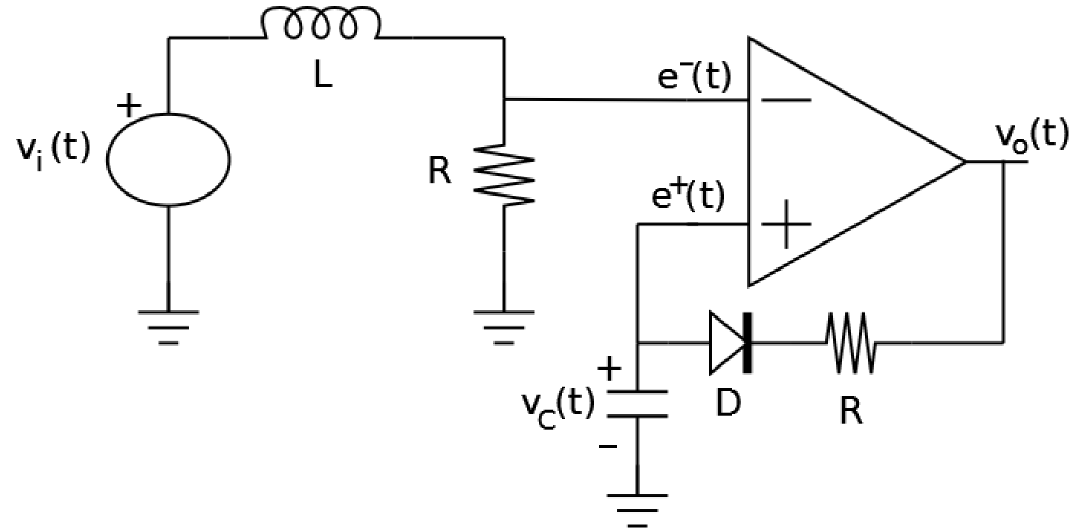
c) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de H, explicando claramente cómo los halla y los trabaja e indicando los valores importantes.

d) Hallar la distancia entre el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico a la frecuencia ω_n. **Expresarla en decibeles**.

e) ¿Cuál sería la respuesta en régimen $v_{o,reg}(t)$ para la entrada $v_i(t) = A.\cos(100\omega_n + \frac{5\pi}{7})$? Justificar claramente si usa aproximaciones.

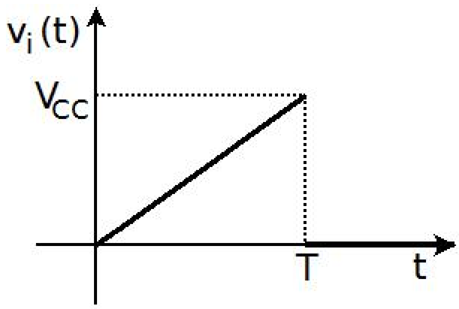
Problema 2 (19 puntos)

En el circuito de la figura, la bobina tiene dato previo nulo, el operacional es ideal y funciona como compara-



dor, con alimentación $\pm V_{CC}$, y el condensador está inicialmente cargado a una tensión v_{C0} ($0 < v_{C0} < V_{CC}$).

Haciendo un análisis por tramos, **se pide hallar y bosquejar las tensiones $\mathbf{e^-(t)}$ y $\mathbf{v_o(t)}$** para todo $t \geq 0$, cuando se aplica la entrada $v_i(t)$ de la figura. Las partes a), b) y c) lo guiarán con este objetivo.



a) En primer lugar, analizar el tramo $0 \leq t \leq T$. Asumir, **y verificar**, que el comparador arranca saturado a $+V_{CC}$.

A partir de ahora, se cumple que: $RC = \frac{T}{4}$ y $\frac{L}{R} = \frac{T}{2}$.

b) Hallar qué valor debe tener v_{C0} para que el comparador conmute en $t = T$. Expresarlo en función de V_{CC}.

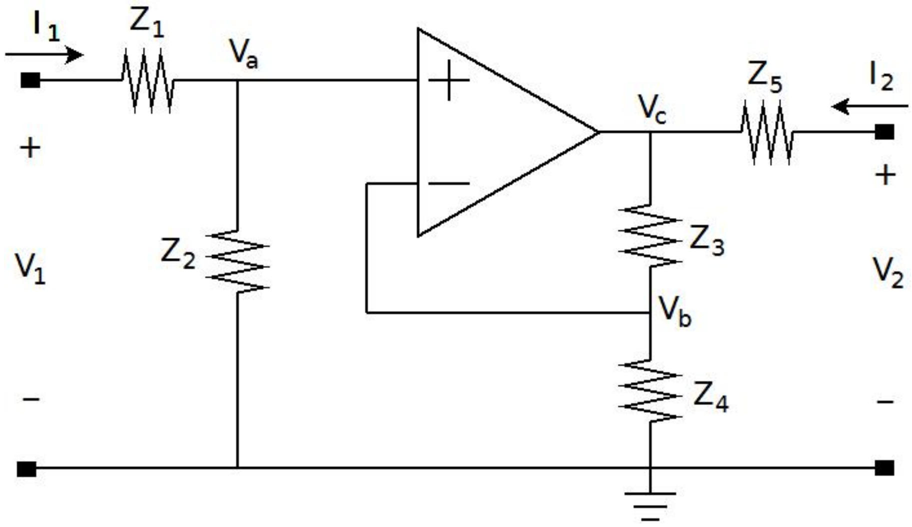
c) Resolver el tramo $t > T$, observando que no hay más tramos.

Explicar cuidadosamente cómo analiza los componentes no lineales (diodo y comparador) y cómo lleva adelante el análisis por tramos.

Problema 3 (12 puntos)

a) En un cuadripolo genérico, del cual se conocen los parámetros (A, B, C, D), calcular la impedancia vista desde el lado 1 cuando el lado 2 se carga con una impedancia Z_L.

b) Se considera el cuadripolo de la figura



i) Hallar los parámetros (A, B, C, D) y verificar que:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{Z_4}{Z_2(Z_3 + Z_4)} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_5(Z_1 + Z_2) \\ 1 & Z_5 \end{bmatrix}$$

ii) Hallar la impedancia vista del lado 1 cuando el lado 2 se carga con Z_L. Observar que no depende de Z_L.

c) Se conecta una fuente sinusoidal de pulsación ω_0 al lado 1 del cuadripolo anterior, a través de una línea de transmisión sin pérdidas, de impedancia característica $Z_0 = 50\Omega$. Se sabe también que $Z_1 = R_1$ y $Z_2 = jX_1$ y que el lado 2 está cargado con una impedancia $Z_L = R_L + jX_L = (100 + j150)\Omega$. Se conecta un stub en paralelo al lado 1 del cuadripolo. Los datos del stub son: extremo cortocircuitado, impedancia característica $Z_{stub} = Z_0 = 50\Omega$ y longitud $d = \frac{\lambda}{8}$ (λ es la longitud de onda).

i) Dibujar un diagrama del circuito completo.

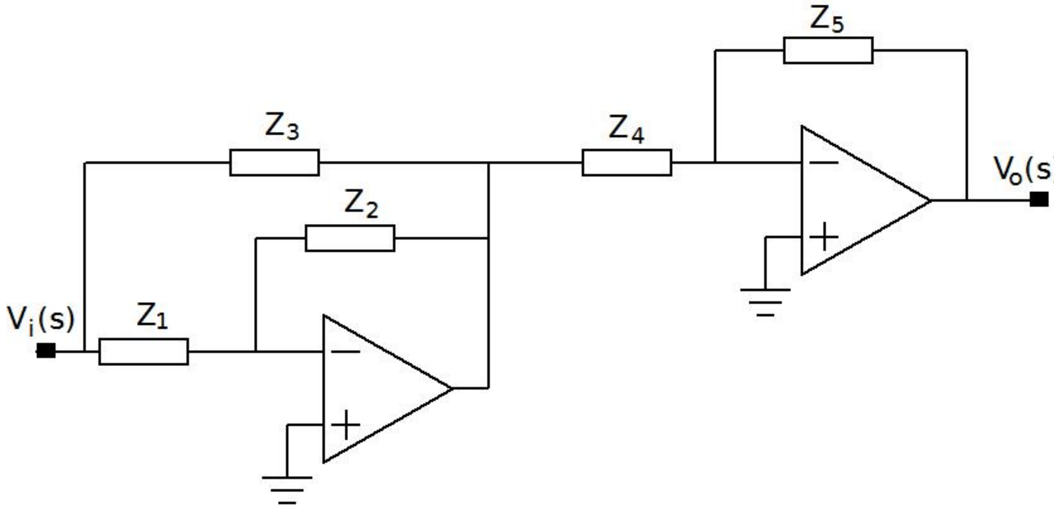
ii) Hallar R_1 y X_1 para que **no haya onda reflejada** hacia la fuente.

(Se recuerda que la impedancia que se ve a la entrada del stub vale $Z_{v,stub} = jZ_{stub}.tan(\beta d)$. Se sugiere resolver los paralelos usando admitancias.)

Solución

Problema 1

Se considera el circuito en Laplace de la figura, con los amplificadores operacionales ideales, funcionando en zona lineal.



a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

Para calcular la transferencia, asumimos condiciones iniciales nulas, por lo que la única excitación independiente del sistema es $V_i(s)$. Denotemos por $V_1(s)$ la tensión de salida del primer operacional.

Podemos observar que ambos operacionales implementan una configuración inversora, con ganancias respectivas

$$\frac{V_1(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad , \quad \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = -\frac{Z_5}{Z_4}$$

Por lo tanto

$$\boxed{H(s) = \frac{V_1(s)}{V_i(s)} . \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{Z_2 Z_5}{Z_1 Z_4}}$$

La impedancia Z_3 no participa de la transferencia. Si bien drena corriente de la entrada V_i, esa corriente no influye en la salida del primer operacional ni, por lo tanto, en la del segundo.

b) i) Re-escribir la expresión de $H(s)$ para el siguiente caso: Z_1 es la impedancia de un condensador de valor C; Z_2, Z_3 y Z_4 son resistencias de valor R; finalmente, Z_5 es la impedancia que se obtiene al colocar en paralelo un condensador de valor C con la serie de una resistencia de valor R y una inductancia de valor L ($\frac{1}{Cs}||(R + Ls)$).

Sabemos entonces que $Z_1 = \frac{1}{Cs}$, $Z_2 = Z_4 = R$ y

$$Z_5 = \frac{\frac{1}{Cs}(R + Ls)}{\frac{1}{Cs} + R + Ls} = \frac{R + Ls}{1 + RCs + LCs^2}$$

Entonces

$$\boxed{H(s) = \frac{\frac{R(R+Ls)}{1+RCs+LCs^2}}{\frac{1}{Cs}.R} = \frac{Cs(R+Ls)}{1+RCs+LCs^2} = \frac{LC}{LC}\frac{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}}$$

ii) Se conoce el valor de $R > 0$ y se define una constante positiva ω_n. Hallar L y C en función de R y ω_n para que la expresión de $H(s)$ sea: $H(s) = \frac{s\left(s+\frac{\omega_n}{10}\right)}{s^2+\frac{\omega_n}{10}s+\omega_n^2}$.

De observar las expresiones que deben ser iguales, obtenemos $\frac{R}{L} = \frac{\omega_n}{10} \Rightarrow \boxed{L = \frac{10R}{\omega_n}}$. Además, debe cumplirse que: $\frac{1}{LC} = \omega_n^2 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{L\omega_n^2} = \frac{1}{10R\omega_n}}$.

c) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de H, explicando claramente cómo los halla y los trabaja e indicando los valores importantes.

Partimos de la expresión genérica: $H(j\omega) = \frac{(j\omega)\left(j\omega+\frac{\omega_n}{10}\right)}{(j\omega)^2+\frac{\omega_n}{10}(j\omega)+\omega_n^2}$.

Veamos primero las frecuencias críticas. En el numerador, tenemos raíces en 0 y $-\frac{\omega_n}{10}$. En el denominador, tenemos dos raíces, que resultan ser complejas conjugadas, con frecuencia natural ω_n y factor de amortiguamiento $\zeta = \frac{1}{20}$.

Realizamos un análisis por bandas, esencialmente despreciando la parte real o la imaginaria del término de primer orden. Para el término de segundo orden, en baja frecuencia aproximamos por ω_n^2, en tanto en alta frecuencia aproximamos por $(j\omega)^2$. En función de las frecuencias críticas, tenemos tres bandas:

$$\omega \ll \frac{\omega_n}{10} \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{(j\omega)\left(\frac{\omega_n}{10}\right)}{\omega_n^2} = \frac{j\omega}{10\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(\omega) - 20\log(10\omega_n)\, dB \\ arg(H) & \approx & \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\omega_n}{10} \ll \omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{(j\omega)\,(j\omega)}{\omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 40\log(\omega) - 40\log(\omega_n)\, dB \\ arg(H) & \approx & \pm\pi \end{cases}$$

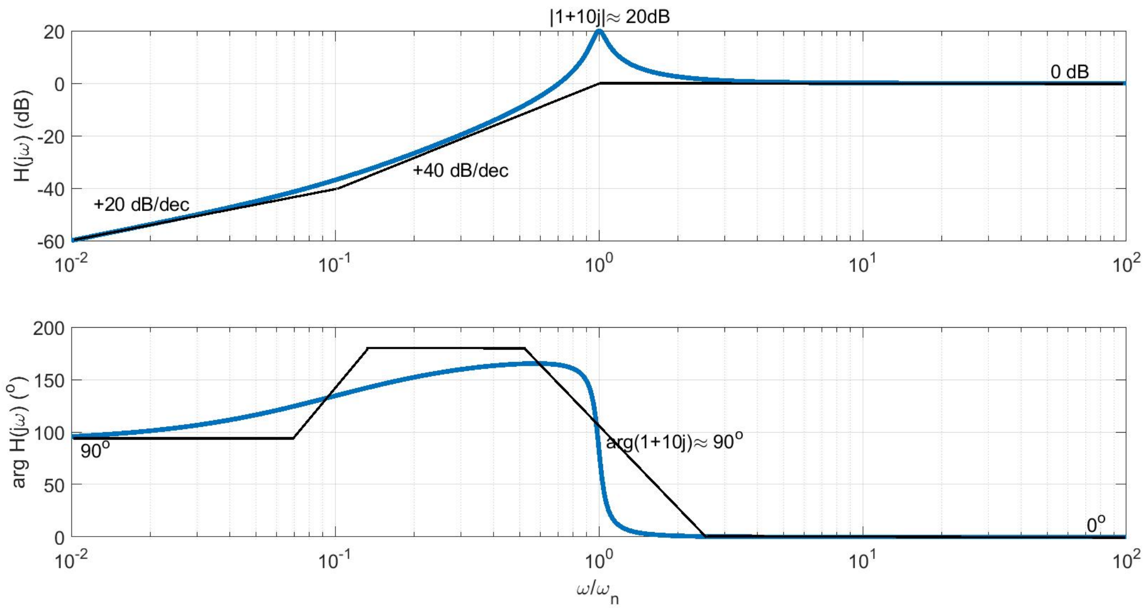
$$\omega_n \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{(j\omega)\,(j\omega)}{(j\omega)^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 0\, dB \\ arg(H) & \approx & 0\ (\text{ó } \pm 2\pi) \end{cases}$$

Tenemos que tener cuidado al momento de *empalmar* las fases. Sabemos que por las carcterísticas de las singularidades, la fase es continua. El término de primer orden sólo puede aportar $\pm 90^o$. El término de segundo orden puede aportar $\pm 180^o$. Para distinguir este último caso, evaluamos en $\omega = \omega_n$:

$$H(j\omega_n) = \frac{(j\omega_n)\left(j\omega_n+\frac{\omega_n}{10}\right)}{(j\omega_n)^2+\frac{\omega_n}{10}(j\omega_n)+\omega_n^2} = \frac{(j)\left(j+\frac{1}{10}\right)}{\frac{1}{10}(j)} = 10j+1$$

Vemos que el valor complejo $H(j\omega_n)$ está en el primer cuadrante.

Con las consideraciones anteriores, ya podemos definir bien qué hace la fase. La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de $H(j\omega)$. Vemos que el circuito implementa un filtro pasa-altos.



d) Hallar la distancia entre el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico a la frecuencia ω_n. **Expresarla en decibeles**.

Anteriormente vimos que $H_{real}(j\omega_n) = 1+10j$. La aproximación asintótica nos dice que $H_{asint}(j\omega_n) = 1$. Entonces, la distancia en decibeles es

$$|H_{real}(j\omega_n)|(dB) - |H_{asint}(j\omega_n)|(dB) = 20\log\left(\frac{|H_{real}(j\omega_n)|}{|H_{asint}(j\omega_n)|}\right) = 20\log\left(\frac{|1+10j|}{1}\right) \approx 20\log(10) = 20dB$$

(El valor exacto es $20,043dB$).

e) ¿Cuál sería la respuesta en régimen $v_{o,reg}(t)$ para la entrada $v_i(t) = A.\cos(100\omega_n + \frac{5\pi}{7})$?

Sabemos que ante una entrada sinusoidal pura $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, un sistema lineal de transferencia $H(s)$ que admite respuesta en régimen responde de la siguiente manera:

$$v_{o,reg}(t) = A.|H(j\omega_0)|.\cos\left[\omega_0 t + \varphi + arg\, H(j\omega_0)\right]$$

En nuestro caso particular, tenemos $\omega_0 = 100\omega_n$, $\varphi = \frac{5\pi}{7}$ y debemos calcular $H(j\omega_n)$. Podemos hacer el cálculo exacto o usar la aproximación asiontótica que hallamos antes, ya que la frecuencia de trabajo se encuentra dos décadas por encima de la frecuencia crítica más grande:

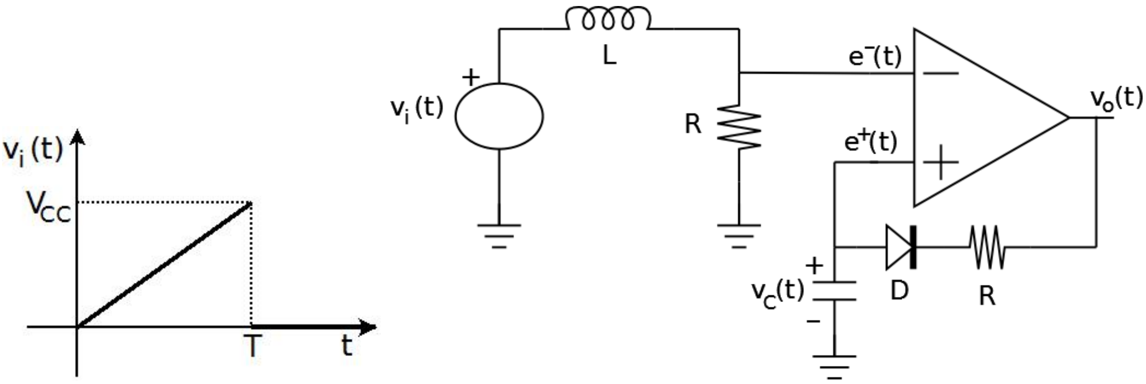
$$H(j100\omega_n) = \frac{(j100\omega_n)\left(j100\omega_n + \frac{\omega_n}{10}\right)}{(j100\omega_n)^2 + \frac{\omega_n}{10}(j100\omega_n) + \omega_n^2} \approx 1\angle_{0^o}$$

(El valor exacto es $H(j100\omega_n) = 1,0001\angle 5\times 10^{-6}$).

La respuesta en régimen aproximada es $v_{o,reg}(t) = A.\cos(100\omega_n t + 5\pi/7)$.

Problema 2

En el circuito de la figura, la bobina tiene dato previo nulo, el operacional es ideal y funciona como



comparador, con alimentación $\pm V_{CC}$, y el condensador está inicialmente cargado a una tensión v_{C0}.

Se cumple que: $0 < v_{C0} < V_{CC}$, $RC = \frac{T}{4}$ y $\frac{L}{R} = \frac{T}{2}$.

Haciendo un análisis por tramos, se pide hallar y bosquejar las tensiones $e^{-}(t)$ y $v_o(t)$ para todo $t \geq 0$, cuando se aplica la entrada $v_i(t)$ de la figura. Las partes a), b) y c) lo guiarán con este objetivo.

a) En primer lugar, analizar el tramo $0 \leq t \leq T$. Asumir, **y verificar**, que el comparador arranca saturado a $+V_{CC}$.

Pasamos al circuito equivalente en Laplace, con dato previo nulo en la bobina y dato previo v_{C0} en el condensador. La pata - del operacional no carga al circuito $R - L$, por lo que podemos analizar por separado lo que pasa con este circuito y lo que sucede con el comparador. Observemos que el circuito del comparador tiene una rama con un diodo que simplemente descarga el condensador (con el diodo ON) o mantiene su carga (con el diodo OFF). Como el dato previo de corriente en la bobina es nulo, no habrá caida inicialmente en la resistencia, por lo que la tensión de la pata - arrancará en 0, siendo menor que la pata +. Por eso es razonable suponer que inicialmente el comparador está saturado a $+V_{CC}$ (luego debemos verificarlo). Al estar la salida del operacional en una tensión alta, supondremos que el diodo D está cortado. Al suponer el diodo OFF, el condensador no se puede descargar y entonces $e^{+}(t) = v_{C0}$ mientras no cambie nada en el tramo de análisis. Tenemos que verificar que es negativa la diferencia de tensión en bornes del diodo:

$$v_D = e^{+}(t) - V_{CC}$$

(analizar bien por qué ésta es la expresión de la tensión en bornes del diodo).

La tensión en la pata - sale de aplicar un divisor de tensión en el circuito $R - L$:

$$e^{-}(s) = \frac{R}{R + Ls}.V_i(s) = \frac{RV_{CC}}{Ts^2(R + Ls)} = \frac{RV_{CC}}{LTs^2\left(\frac{R}{L} + s\right)}$$

donde hemos usado que la entrada durante el tramo puede pensarse como una rampa con transformada de Laplace $V_i(s) = \frac{E}{Ts^2}$. Haciendo fracciones simples y usando tapadita, obtenemos:

$$e^-(s) = \frac{RV_{CC}}{LT}\left[\frac{\frac{L}{R}}{s^2} + \frac{K}{s} + \frac{\frac{L^2}{R^2}}{\left(\frac{R}{L}+s\right)}\right]$$

Nos resta obtener el valor de la constante K, para lo cual hacemos común denominador e igualamos a la expresión original, lo que nos da $K = -\frac{L}{R}$. Entonces

$$e^-(s) = \frac{RV_{CC}}{LT}\left[\frac{\frac{L}{R}}{s^2} - \frac{\frac{L^2}{R^2}}{s} + \frac{\frac{L^2}{R^2}}{\left(\frac{R}{L}+s\right)}\right] = \frac{V_{CC}}{T}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{\frac{L}{R}}{s} + \frac{\frac{L}{R}}{\left(\frac{R}{L}+s\right)}\right]$$

Pasando al tiempo, obtenemos:

$$\boxed{e^-(t) = Y(t).\frac{V_{CC}}{T}.\left[t + \frac{L}{R}.\left(e^{-\frac{Rt}{L}} - 1\right)\right]}$$

Vemos que efectivamente arranca en 0, lo que verifica el estado inicial del comparador.

¿Hasta cuándo se mantienen las condiciones del diodo y el comparador? Se puede ver que la tensión en la pata - es monótona creciente. Para verlo basta con derivar:

$$\left(e^-(t)\right)' = Y(t).\frac{V_{CC}}{T}.\left[1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right]$$

por lo que la tensión en la pata - en algún momento alcanzará la tensión en la pata +, si la entrada fuera realmente una rampa.

b) Hallar qué valor debe tener v_{C0} para que el comparador conmute en $t = T$.

Pueden pasar dos cosas: la pata - alcanza a la pata + en un tiempo mayor o igual a T (y el análisis anterior cubre todo el tramo $[0, T]$) o lo hace antes de T y aparece un tramo desde ese instante hasta T.

Queremos que el instante de conmutación del comparador sea T, para lo cual imponemos:

$$e^-(T) = e^+(T) = v_{C0} \Rightarrow \frac{V_{CC}}{T}.\left[T + \frac{L}{R}.\left(e^{-\frac{RT}{L}} - 1\right)\right] = v_{C0}$$

Usando que $\frac{L}{R} = \frac{T}{2}$, obtenemos

$$\boxed{v_{C0} = \frac{V_{CC}}{T}.\left[T + \frac{T}{2}.\left(e^{-2} - 1\right)\right] = \left[1 + e^{-2}\right].\frac{V_{CC}}{2} \approx 0,57V_{CC}}$$

c) Resolver el tramo $t > T$, observando que no hay más tramos.

El tramo que comienza en T, lo hace con el condensador incialmente cargado con una tensión v_{C0}, la bobina inicialmente cargada con una corriente

$$i_{L0} = \frac{e^-(T)}{R} = \frac{v_{C0}}{R}$$

y el comparador saturado a $-V_{CC}$. Razonando de forma similar a la vez anterior, supondremos el diodo ON. El condensador tenderá a cargarse al valor $-V_{CC}$ desde su valor inicial v_{C0}, con constante de tiempo $RC = \frac{T}{4}$:

$$e^{+}(t') = Y(t').\left[v_{C0}.e^{-\frac{t'}{RC}} - V_{CC}.\left(1 - e^{-\frac{t'}{RC}}\right)\right]$$

donde hemos introducido el tiempo $t' = t - T$ para describir el segundo tramo.

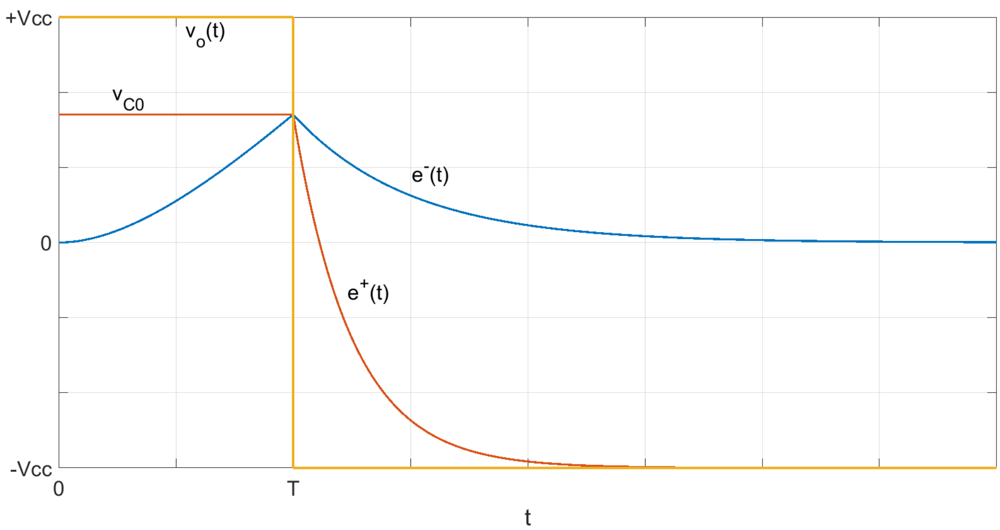
La corriente por el diodo está dada por $i_D(t') = \frac{e^{+}(t')+V_{CC}}{R}$, que es inicialmente positiva, por lo que efectivamente el diodo conduce. En el circuito $R-L$, se anula la entrada, por lo que simplemente se descarga la corriente de la bobina con constante de tiempo $\frac{L}{R} = \frac{T}{2}$. Obtenemos

$$\boxed{e^{-}(t') = Y(t').R.i_{L0}.e^{-\frac{Rt'}{L}} = Y(t').v_{C0}.e^{-\frac{Rt'}{L}}}$$

Observemos que como $RC = \frac{T}{4} < \frac{L}{R} = \frac{T}{2}$, tenemos que $e^{+}(t') < e^{-}(t')$, para todo t' estrictamente positivo, o sea, para todo t mayor T, por lo que el comparador no vuelve a conmutar. La corriente por el diodo siempre es positiva:

$$i_D(t') = Y(t').\frac{e^{+}(t') + V_{CC}}{R} = Y(t').\frac{v_{C0}.e^{-\frac{t'}{RC}} - V_{CC}.\left(1 - e^{-\frac{t'}{RC}}\right) + V_{CC}}{R} = Y(t').(v_{C0} + V_{CC}).e^{-\frac{t'}{RC}}$$

y la entrada v_i no cambia más, por lo que no aparecen más tramos.



Problema 3

a) En un cuadripolo genérico, del cual se conocen los parámetros (A, B, C, D), calcular la impedancia vista desde el lado 1 cuando el lado 2 se carga con una impedancia Z_L.

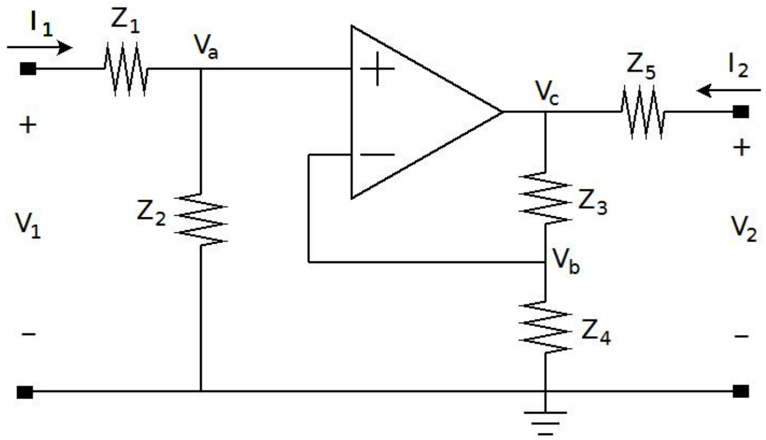
Sabemos que se cumple

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases} \Rightarrow Z_{v1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2}$$

Planteando la ley de Ohm sobre la carga, obtenemos la identidad $V_2 = -Z_L I_2$, en la que el signo de menos está asociado a que la corriente I_2 se define entrante al cuadripolo. Sustituyendo V_2 en la expresión de Z_{v1} obtenemos

$$\boxed{Z_{v1} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}}$$

b) Se considera el cuadripolo de la figura



i) Hallar los parámetros (A, B, C, D) y verificar que:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{Z_4}{Z_2(Z_3+Z_4)} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_5(Z_1+Z_2) \\ 1 & Z_5 \end{bmatrix}$$

Por la definición de los parámetros, sabemos que

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}$$

Al ser $I_2 = 0$, entonces $V_2 = V_c$. Aplicando el divisor de tensión, obtenemos

$$V_b = V_c \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} = V_2 \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

Además, como el operacional es ideal, el cortocircuito virtual de las patas más y menos nos da $V_a = V_b$ y la impedancia de entrada infinita, junto con el divisor de tensión, nos dice que $V_a = V_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

Entonces

$$V_1 = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} V_a = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} . \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} V_2$$

Finalmente

$$\boxed{A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{Z_4(Z_1+Z_2)}{Z_2(Z_3+Z_4)}}$$

Siguiendo con la hipótesis $I_2 = 0$, podemos calcular C. Sabemos que

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1+Z_2} = \frac{AV_2}{Z_1+Z_2} \Rightarrow \boxed{I = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{A}{Z_1+Z_2} = \frac{Z_4}{Z_2(Z_3+Z_4)}}$$

Para calcular B y D imponemos $V_2 = 0$. Al cortocircuitar la salida del cuadripolo, la impedancia Z_5 queda en paralelo con Z_3+Z_4. Además, $-Z_5 I_2 = V_c$. Siguen valiendo los divisores de tensión que relacionan V_1 con $V_a = V_b$ y V_c con V_b. Entonces

$$V_a = V_1\frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = V_c\frac{Z_4}{Z_3+Z_4} = -Z_5 I_2\frac{Z_4}{Z_3+Z_4}$$

Entonces

$$\boxed{B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = \frac{Z_4 Z_5(Z_1+Z_2)}{Z_2(Z_3+Z_4)}}$$

Por último,

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1+Z_2} = \frac{-BI_2}{Z_1+Z_2} \Rightarrow \boxed{D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = \frac{B}{Z_1+Z_2} = \frac{Z_4 Z_5}{Z_2(Z_3+Z_4)}}$$

ii) Hallar la impedancia vista del lado 1 cuando el lado 2 se carga con Z_L.

Aplicando la parte a), tenemos que

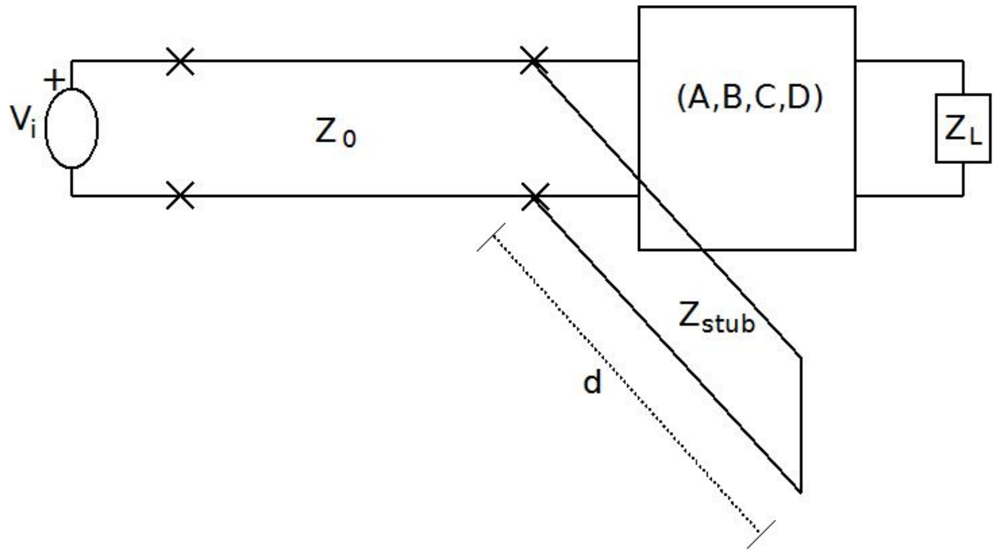
$$Z_{v1} = \frac{AZ_L+B}{CZ_L+D} = \frac{(Z_1+Z_2)Z_L + Z_5(Z_1+Z_2)}{Z_l+Z_5} = Z_1+Z_2 \quad , \quad \forall Z_L$$

La impedancia vista del lado 1 es independiente de la carga Z_L!!! Esto puede verificarse a simple vista en el circuito, observando que la impedancia de entrada está definida por la serie de Z_1 y Z_2, que es la impedancia de la malla por la que circula la corriente de entrada.

c) Considere el cuadripolo anterior, trabajando a pulsación ω_0, con $Z_1 = R_1$ y $Z_2 = jX_2$, cargado del lado 2 con una impedancia $Z_L = R_L + jX_L = (100 + j150)\Omega$. El lado 1 se conecta a una fuente sinusoidal de pulsación ω_0 a través de una línea de transmisión sin pérdidas, de impedancia característica $Z_0 = 50\Omega$. Se conecta un stub en paralelo al lado 1 del cuadripolo. Los parámetros del stub son: impedancia característica $Z_{stub} = Z_0 = 50\Omega$ y longitud $d = \frac{\lambda}{8}$ (λ es la longitud de onda). Se recuerda que la impedancia que se ve a la entrada del stub vale $Z_{v,stub} = jZ_{stub}.tan(\beta d)$ (para el parcial se debe saber interpretar esta expresión sin más ayuda).

Hallar R_1 y X_1 para que **no haya onda reflejada** hacia la fuente.

La siguiente figura ilustra la situación.



Para que no haya onda reflejada, la impedancia de carga de la línea de impedancia característica Z_0 debe valer precisamente Z_0. Denotemos esta impedancia como Z'_L. Se debe cumplir $Z'_L = Z_0$ y sabemos que: $Z'_L = (Z_{v,stub}) \,||\, (Z_{v1})$. Por la parte b) sabemos que $Z_{v1} = R_1 + jX_1$. Además, $Z_{v,stub}$ es la impedancia equivalente al comienzo del stub y vale $Z_{v,stub} = jZ_{stub}\tan(\beta d)$, donde $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ es la constante de fase de la línea y d es el largo del stub, que vale $d = \frac{\lambda}{8}$, por lo que

$$Z_{v,stub} = jZ_{stub}\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8}\right) = jZ_{stub}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = jZ_{stub}$$

Entonces, debe ser: $Z_0 = (jZ_{stub}) \,||\, (R_1 + jX_1)$. Observemos que $Z_{v,stub}$ es imaginaria pura. Al ser un paralelo, podemos trabajar en admitancias, como sigue:

$$\frac{1}{Z'_L} = \frac{1}{jZ_{stub}} + \frac{1}{R_1 + jX_1} = \frac{1}{jZ_{stub}} + \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} - j\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} - j\left(\frac{1}{Z_{stub}} + \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2}\right)$$

De la identidad $Z_0 = Z'_L$, con $Z_0 = Z_{stub}$ real, obtenemos

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} \quad , \quad -\frac{1}{Z_{stub}} = -\frac{1}{Z_0} = \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2}$$

Entonces

$$\left\{\begin{array}{lcl} R_1 Z_0 & = & -X_1 Z_0 \\ \frac{R_1}{Z_0} - \frac{X_1}{Z_0} & = & \frac{R_1^2+X_1^2}{R_1^2+X_1^2} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} R_1 & = & -X_1 \\ R1 - X_1 & = & Z_0 \Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{Z_0}{2}} \Rightarrow \boxed{X_1 = -\frac{Z_0}{2}} \end{array}\right.$$

Observar que también se podría haber obtenido el resultado planteando admitancias, escribiendo $\frac{1}{R_1+jX_1} = G_1 + jB_1$.