Teoría de circuitos

Segundo parcial

2^o semestre 2018

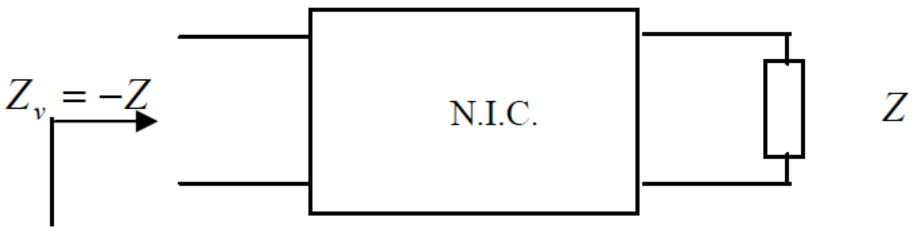
Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**

Problema 1 (12 puntos)

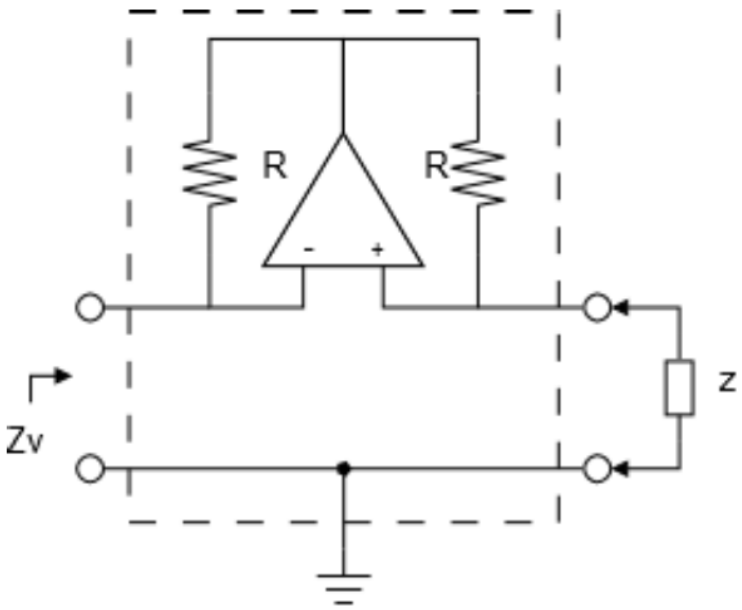
a) Supongamos un cuadripolo que se carga del lado 2 con una impedancia Z. Hallar el valor de la impedancia vista desde el lado 1, en función de las constantes generales (A, B, C, D).

b) Los convertidores de impedancia negativa (N.I.C. por su siglas en inglés) son cuadripolos que tienen la propiedad de presentar una impedancia de entrada de signo opuesto a la conectada a la salida.



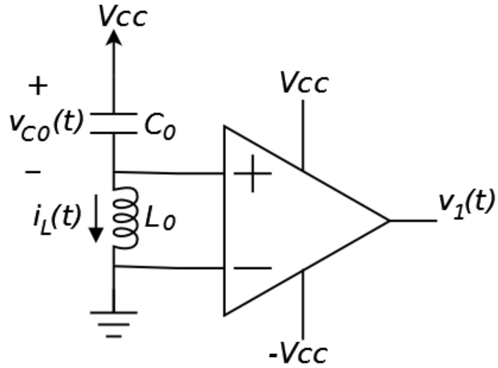
i) Hallar las condiciones que deben cumplir los parámetros (A, B, C, D) que caracterizan dicho cuadripolo.

ii) Hallar los parámetros (A, B, C, D) del cuadripolo de la figura y verificar que implementa un N.I.C.

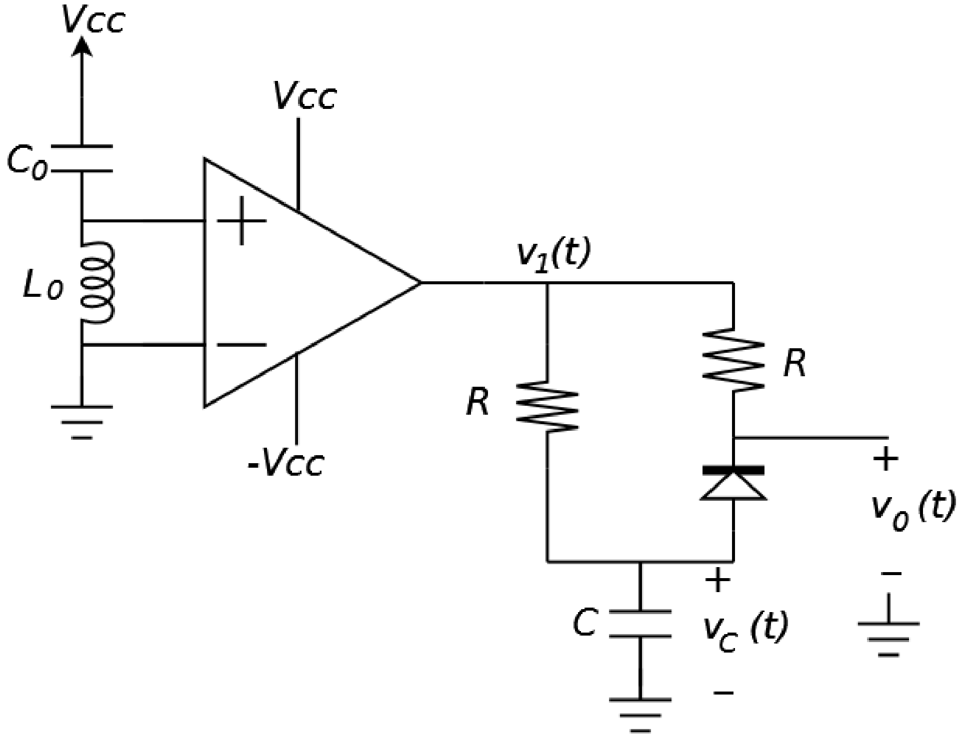


Problema 2 (28 puntos)

a) En el circuito de la figura, la fuente V_{CC} es constante y se parte del reposo. Calcular y graficar la corriente $i_L(t)$ y las tensiones $v_{C0}(t)$ y $v_1(t)$ para todo instante positivo.



b) En el circuito de la figura, los amplificadores operacionales son ideales. Se analizará el circuito asumiendo que ha transcurrido tiempo suficiente para **haber alcanzado el régimen periódico**. Se cumple que $RC = \pi\sqrt{L_0 C_0}$.

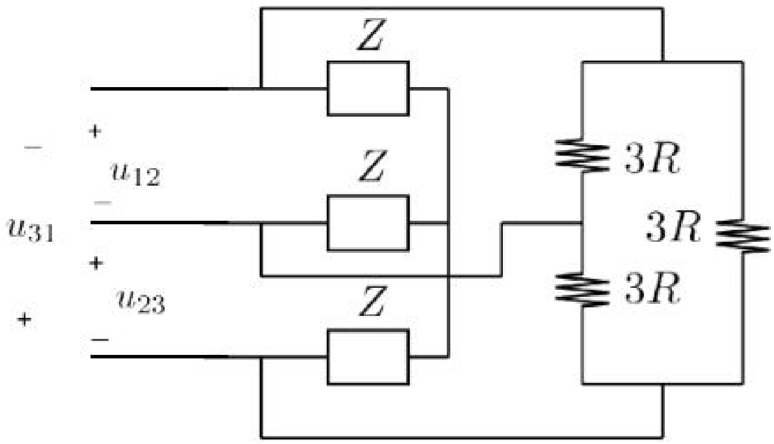


i) Establecer cotas razonables a la tensión $v_C(t)$, reflexionando sobre el comportamiento de la señal $v_1(t)$ y el circuito asociado al condensador y el diodo.

ii) Hallar la tensión periódica $v_C(t)$ en el condensador.

iii) Hallar y graficar la tensión periódica $v_o(t)$.

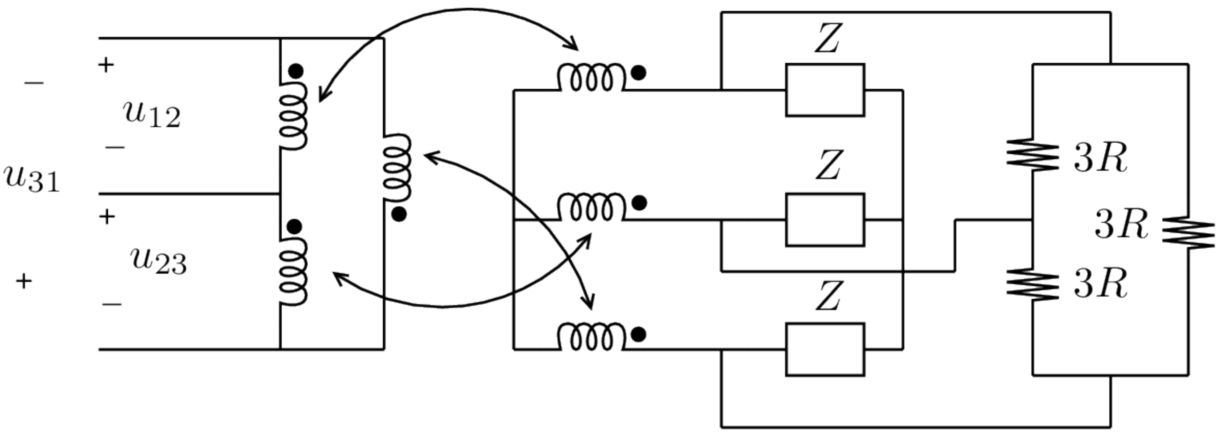
Problema 3 (10 puntos)



a) Dado el circuito trifásico de la figura, hallar su equivalente monofásico.

b) Si $Z = Lj\omega$, compensar la potencia reactiva consumida al sistemas trifásico de fuentes, indicando qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

c) El siguiente circuito es similar al anterior, salvo que intercala un transformador trifásico entre el sistema de tensiones compuestas y la carga. Los transformadores monofásicos son ideales, de relación de vueltas $\frac{n_1}{n_2} = 10$. Se pide **repetir la parte b)**, **compensando del lado del primario**.



Solución

Problema 1

a) Supongamos un cuadripolo que se carga de del lado 2 con una impedancia Z. Hallar el valor de la impedancia vista desde el lado 1, en función de las constantes generales (A, B, C, D) y de los parámetros híbridos.

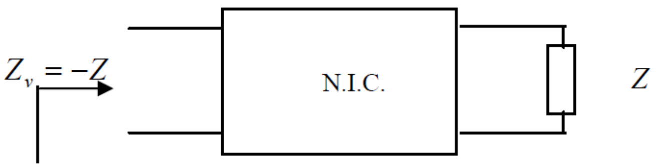
Los parámetros (A, B, C, D) relacionan las magnitudes del lado 1 con las del lado 2:

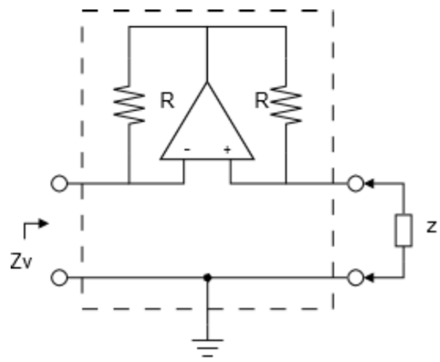
$$\begin{cases} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{cases}$$

Una impedancia de carga Z del lado 2 verifica $Z = \frac{V_2}{-I_2}$ (tener presente que I_2 se toma entrante al cuadripolo). Por otro lado, la impedancia vista del lado uno vale $Z_V = \frac{V_1}{I_1}$. Entonces

$$Z_V = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{-I_2}{-I_2}.\frac{A\frac{V_2}{-I_2} + B}{C\frac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{AZ + B}{CZ + D}$$

b) Los convertidores de impedancia negativa (N.I.C. por su siglas en inglés) son cuadripolos que tienen la propiedad de presentar una impedancia de entrada de signo opuesto a la conectada a la salida.





i) Hallar las condiciones que deben cumplir los parámetros (A, B, C, D) que caracterizan dicho cuadripolo.

Usamos las constantes generales. Debe cumplirse $Z_V = \frac{AZ+B}{CZ+D} = -Z$ para todo Z. Entonces

$$CZ^2 + (A + D)Z + B = 0 \quad \forall Z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} C &= 0 \\ A &= -D \\ B &= 0 \end{cases}}$$

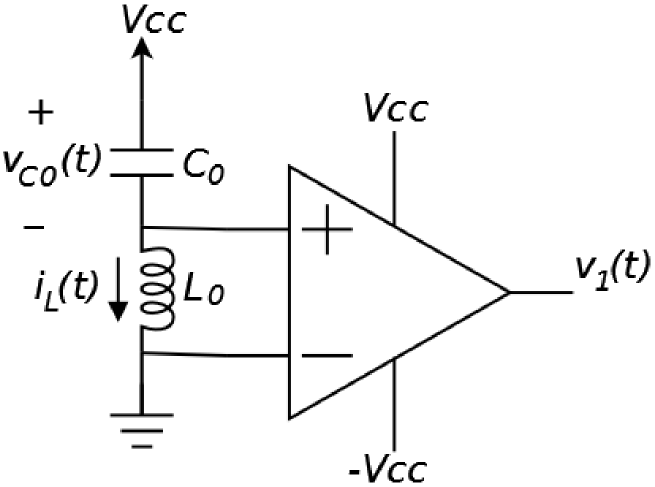
ii) Hallar los parámetros (A, B, C, D) del cuadripolo de la figura y verificar que implementa un N.I.C.

Calculemos los parámetros. Recordemos que $A = \frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}$. Por el cortocircuito virtual de las patas de entrada del operacional, $V_1 = V_2$, de donde $A = 1$.
Sabemos que $B = \frac{V_1}{-I_2}\Big|_{V_2=0}$. Nuevamente por el cortocircuito virtual $V_1 = 0$ y entonces $B = 0$.
Miremos ahora $C = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}$. Observemos que como no entra ni sale corriente por las patas $+$ y $-$ del operacional, I_1 e I_2 son las corrientes que circulan por las resistencias R desde las patas de entrada del operacional hacia su salida. Por el cortocircuito virtual, esas corrientes son idénticas (podemos decir que las resistencias R están *virtualmente en paralelo*). Como $I_2 = 0$, entonces $I_1 = 0$ y $C = 0$.
Finalmente $D = \frac{I_1}{-I_2}\Big|_{V_2=0}$. Por lo anterior, $I_1 = I_2$, de donde $D = -1$.
Vemos entonces que se cumplen las condiciones de la parte a).
También podríamos haber calculado directamente la impedancia vista desde el lado 1 para una carga Z del lado 2. Como ya observamos, las tensiones V_1 y V_2 son iguales por el cortocircuito virtual y esto implica también que las corrientes I_1 e I_2 son iguales. Entonces

$$Z_V = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} = -Z \quad \forall Z$$

Problema 2

a) En el circuito de la figura, la fuente V es constante y se parte del reposo. Calcular y graficar la corriente $i_L(t)$ y las tensiones $v_{C0}(t)$ y $v_1(t)$ para todo instante positivo.



Partiendo del reposo, el modelo en Laplace simplemente tiene una fuente de valor $\frac{V}{s}$ que alimenta la serie de la impedancia del condensador $\frac{1}{Cs}$ y la impedancia Ls de la bobina. La corriente vale

$$I_L(s) = \frac{\frac{V}{s}}{\frac{1}{Cs} + Ls} = \frac{CV}{1 + LCs^2} = \frac{\frac{V}{L}}{s^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{V\sqrt{C}}{\sqrt{L}} \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{s^2 + \frac{1}{LC}} \Rightarrow \boxed{i_L(t) = Y(t).\sqrt{\frac{C}{L}}.V.\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)}$$

$$V_{Co}(s) = I_L(s).\frac{1}{Cs} = \frac{\frac{V}{L}}{s^2 + \frac{1}{LC}}.\frac{1}{Cs} = \frac{V}{LC}.\left[\frac{1}{s\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)}\right] = \frac{V}{LC}\left[\frac{A}{s} + \frac{B_1 s + B_2}{s^2 + \frac{1}{LC}}\right]$$

Por tapadita, $A = LC$. Haciendo común denominador,

$$As^2 + A\frac{1}{LC} + B_1 s^2 + B_2 s = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} B_1 & = & -A & = -LC \\ B_2 & = & 0 & \end{array} \right.$$

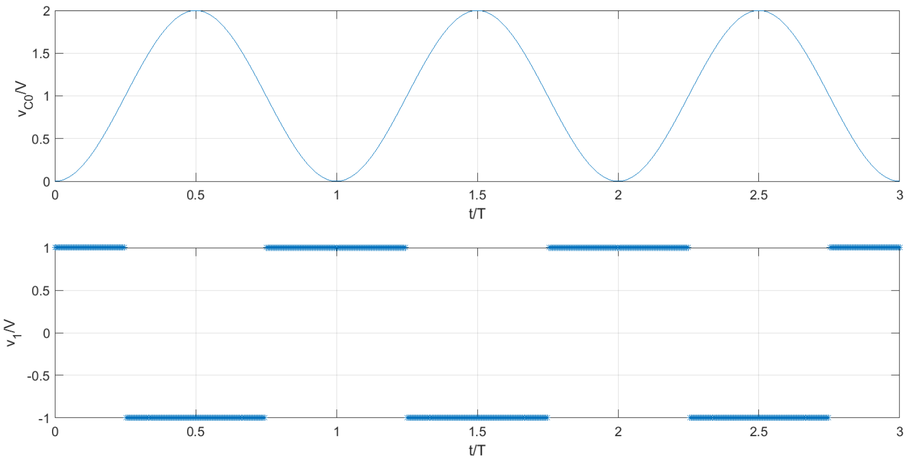
Entonces

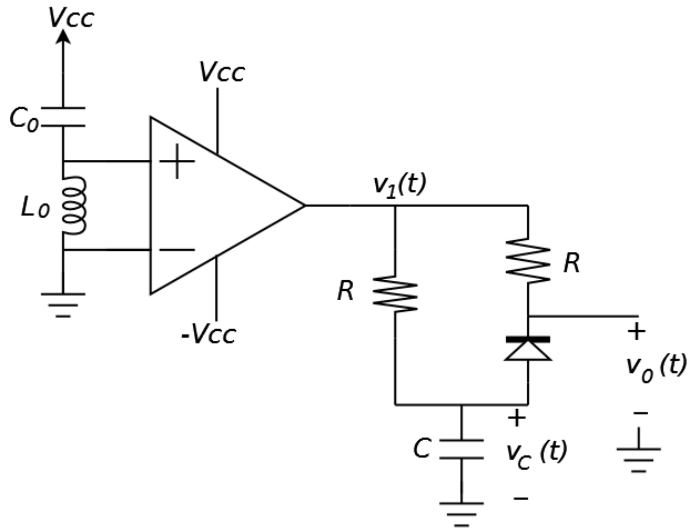
$$V_{Co}(s) = \frac{V}{LC}\left[\frac{LC}{s} - \frac{LCs}{s^2 + \frac{1}{LC}}\right] = V.\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}}\right] \Rightarrow \boxed{v_{Co}(t) = Y(t).V.\left[1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\right]}$$

La señal $v_1(t)$ es una onda cuadrada generada por el comparador. La salida del mismo toma el valor alto $+V$ si la tensión $v_{Lo}(t)$ en la bobina es positiva (medida en el sentido que circula la corriente i_L) y toma el valor bajo $-V$ si la tensión en la bobina es negativa. Como la pata $-$ está a tierra, esencialmente tenemos que $v_1(t) = V.signo[v_{Lo}(t)]$, con

$$v_{Lo}(t) = V - v_{Co}(t) = Y(t).V.\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

Resulta que la onda cuadrada es simétrica y tiene el mismo periodo que las sinusoides de la parte a): $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}}$, $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{L_o C_o}$, como se muestra en la gráfica.





b) En el circuito de la figura, los amplificadores operacionales son ideales, alimentados con fuentes $\pm V$. Se analizará el circuito asumiendo que ha transcurrido tiempo suficiente para **haber alcanzado el régimen periódico**. Se cumple que $RC = \pi\sqrt{L_0C_0} = \frac{T}{2}$.

i) Establecer cotas razonables a la tensión $v_C(t)$, reflexionando sobre el comportamiento de la señal $v_1(t)$ y el circuito asociado al condensador y el diodo.

Miremos el circuito que tiene el diodo y el condensador, que esencialmente constituye un circuito de carga/descarga del condensador, que tiene dos caminos posibles según el estado del diodo. En cualquier caso, el condensador va a cargarse y descargarse entre dos valores extremos $\pm V$.

i) Hallar la tensión $v_C(t)$ en el condensador C.

Asumimos régimen periódico, por lo que al comienzo de un periodo genérico, el condensador tendrá una cierta carga v_{C0}, el diodo un cierto estado y la onda cuadrada $v_1(t)$ un cierto valor, que deberán ser los mismos al comienzo del periodo siguiente.

Supongamos una carga v_{C0} en el condensador y el comparador en $+V$, por lo que propondremos que el diodo está cortado (OFF). Debemos luego hacer las verificaciones correspondientes!!! Al suponer el diodo cortado, automáticamente $v_o(t) = v_1(t)$!! Por otro lado, nos queda un circuito de carga/descarga del condensador, que arranca en v_{C0} y tiende a $+V$. Desde el arranque y hasta que conmute el comparador o el diodo, podemos escribir:

$$v_C(t) = V + (v_{C0} - V)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

Verifiquemos que el diodo está cortado. La tensión en bornes del diodo vale $v_D(t) = v_C(t) - v_o(t) = v_C(t) - v_1(t)$ que da

$$v_D(t) = (v_{C0} - V)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

y es negativa si v_{C0} es menor que V, lo cual es razonable teniendo en cuenta que V es la mayor tensión de alimentación en el circuito. Esto lo tenemos que verificar cuando hallemos v_{C0}.

Las expresiones halladas valen hasta que el diodo y/o el comparador conmutan. Por el lado del diodo no va a haber ningún cambio, pues su tensión es negativa siempre, a menos que el comparador conmute. Esto sucede en el instante $T_1 = \frac{T}{2} = RC$. A partir de ahí, suponemos que el diodo conduce (ON), con el comparador a $-V$ y el condensador cargado a

$$v'_{C0} = v_C(T_1) = V + (v_{C0} - V)e^{-\frac{T_1}{RC}} = V + (v_{C0} - V)e^{-\frac{RC}{RC}} = V(1 - e^{-1}) + v_{C0}e^{-1}$$

Con el diodo conduciendo, tenemos un circuito de carga/descarga del condensador con constante de tiempo $(R||R)C = \frac{RC}{2}$. La tensión del condensador es

$$v_C(t') = -V + (v'_{C0} + V)e^{-\frac{2t'}{RC}} \quad , \quad t' = t - RC \geq 0$$

Verifiquemos que el diodo conduce. La corriente por el diodo vale

$$i_D(t') = \frac{v_C(t') - v_1(t')}{R} = \frac{-V + (v'_{C0} + V)e^{-\frac{2t'}{RC}} + V}{R} = \frac{(v'_{C0} + V)e^{-\frac{2t'}{RC}}}{R}$$

que es positiva para todo t' positivo, si $v'_{C0} > -V$, lo que es razonable por lo que ya vimos. Esta situación vale hasta $t' = T_1 = RC$, instante en que conmuta nuevamente el comparador, ya que el diodo por sí sólo no conmuta. En ese instante,

$$v_C(t')\big|_{t'=RC} = -V + (v'_{C0} + V)e^{-\frac{2RC}{RC}} = V(e^{-2} - 1) + v'_{C0}e^{-2}$$

Imponemos igualdad de condiciones iniciales y finales.

$$v_{C0} = V(e^{-2} - 1) + v'_{C0}e^{-2} = V(e^{-2} - 1) + \left[V(1 - e^{-1}) + v_{C0}e^{-1}\right] e^{-2}$$

De donde

$$\left[1 - e^{-3}\right] v_{C0} = V(e^{-2} - 1) + V(1 - e^{-1})e^{-2} \Rightarrow \boxed{v_{C0} = \frac{V(2e^{-2} - e^{-3} - 1)}{1 - e^{-3}} \approx -0.82V}$$

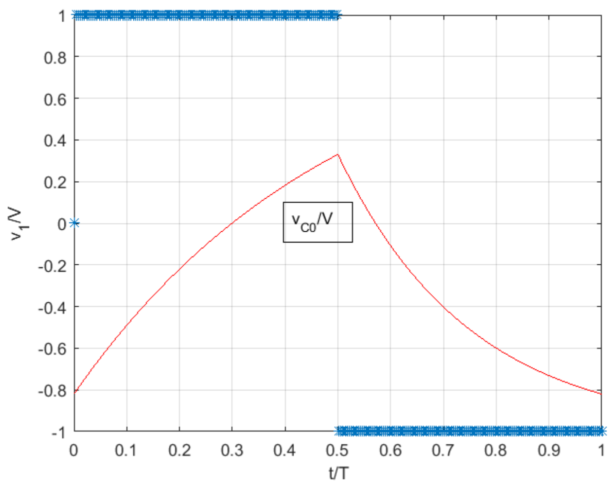
y $\boxed{v'_{C0} = V(1 - e^{-1}) - 0.82Ve^{-1} \approx 0.33V}$. Observemos que ambos valores pertenecen a $(-V, +V)$.

ii) Hallar y graficar la tensión $v_o(t)$. Observando el circuito, vemos que si el diodo está OFF, $v_o(t) = v_1(t)$, en tanto que si el diodo está ON, $v_o(t) = v_C(t)$. En el intervalo $(0, T/2)$, el condensador se carga desde $v_{C0} \approx -0.82V$ hasta $v'_{C0} \approx 0.33V$. En el intervalo $(T/2, T)$, el condensador se descarga entre esos mismos dos valores.

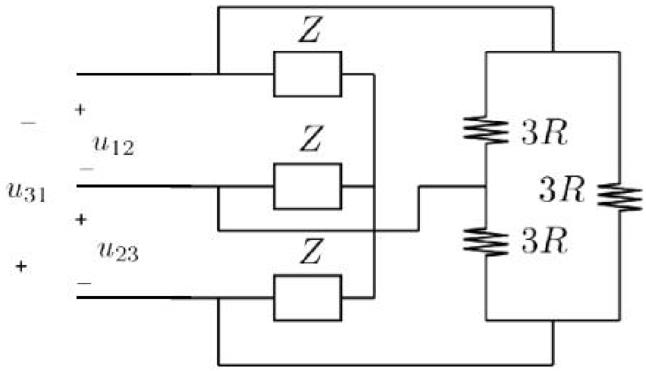
Entonces, en un periodo:

$$v_o(t) = \begin{cases} V & , \text{ si } v_1(t) = +V \ (D\,OFF) \\ v_C(t) & , \text{ si } v_1(t) = -V \ (D\,ON) \end{cases}$$

En rojo, se muestra la tensión del condensador y en azul la onda cuadrada que sale del operacional.

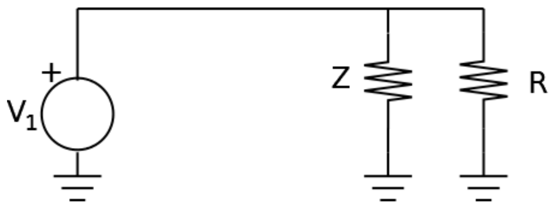


Problema 3



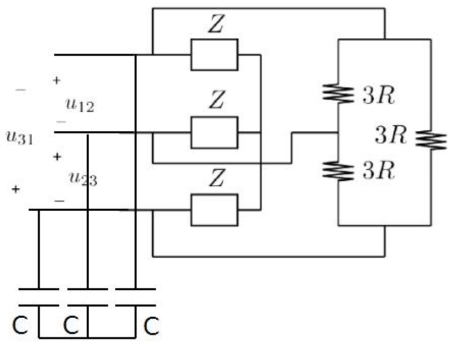
a) Dado el circuito trifásico de la figura, hallar su equivalente monofásico.

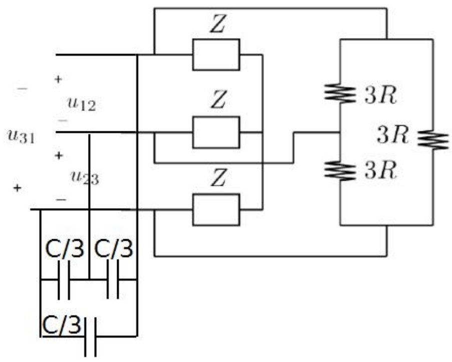
Primero observemos que hay un triángulo de resistencias idénticas de valor $3R$. Podemos transfigurarlo en una estrella de resistencias idénticas de valor R. Esta estrella equilibrada queda en paralelo con la estrella equilibrada de impedancias Z. Tenemos entonces una estrella equivalente de impedancias idénticas de valor $Z_{eq} = Z||R$. El equivalente monofásico se dibuja a continuación:



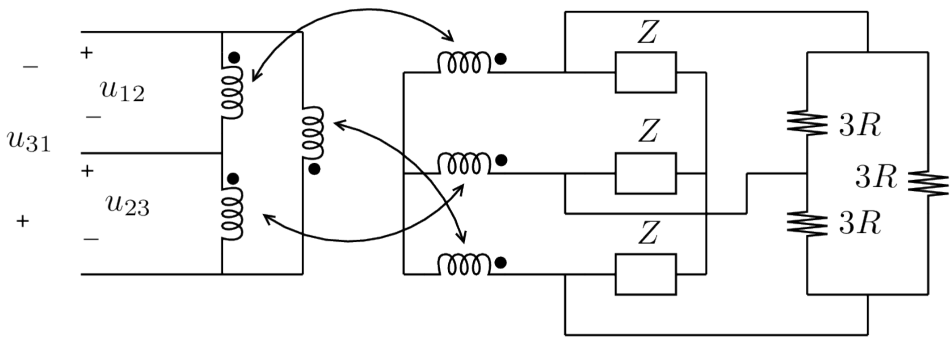
b) Si $Z = Lj\omega$, compensar la potencia reactiva consumida al sistemas trifásico de fuentes, indicando qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Observemos el equivalente monofásico. En este caso $Z_{eq} = R||Lj\omega$. Colocando un condensador de valor C en paralelo con la carga, podemos compensar la reactiva. Si $\frac{1}{Cj\omega} = -Lj\omega$, la impedancia total que ve la fuente es resistiva pura. La reactiva es nula y la activa no se altera por la presencia del condensador. Obtenemos $C = \frac{1}{L\omega^2}$. Volviendo al circuito trifásico origianl, el esquema de conexión con condensadores en estrella se muestra en la figura. También podemos compensar con un triángulo de condensadores idénticos, transfigurando la estrella anterior (ver figura). La impedancia es tres veces más grande, por lo que el valor del nuevo condensador será tres veces menor.





c) En el siguiente circuito, en el que los transformadores son ideales, de relación de vueltas $\frac{n_1}{n_2} = 10$. Repetir la parte b), **compensando del lado del primario**.



Usamos la propiedad siguiente: en un transformador ideal, una impedancia $\tilde{Z}$ conectada al secundario se ve como una impedancia de valor $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2.\tilde{Z}$ del lado del primario. El transformador trifásico tiene primarios en triángulo y secundarios en estrella. Entonces, la estrella de impedancias Z_{eq} contectada al secundario se ve como un triángulo equivalente del lado del primario, con impedancias idénticas de valor $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2.Z_{eq}$. Si transfiguramos el triángulo en una estrella equivalente, obtenemos una estrella equilibrada de impedancias $\frac{1}{3}.\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2.Z_{eq}$. Recordemos que como Z_{eq} es el paralelo de R y $Lj\omega$, la compensación en estrella requiere ahora un condensador de valor $\tilde{C}$

$$\tilde{C} = \frac{1}{\frac{1}{3}.\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2.L\omega^2} = \frac{1}{\frac{1}{3}.100.L\omega^2} = \frac{3}{100.L\omega^2}$$

y en triángulo un valor 3 veces menor.