

# Teoría de circuitos

Segundo parcial

2º semestre 2022-2sem

## Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No demorarse mucho tiempo en un solo ejercicio.
- **SER PROLIJO. EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS, RESALTANDO LOS RESULTADOS.** Expresar los resultados exactamente en el formato pedido. Tener presente que si algo no es claro para el evaluador, se podrían perder puntos de la pregunta.
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- Al finalizar la prueba, escanear las hojas y subir el pdf en la tarea específica del EVA.
- Se recuerda que la prueba es individual.

## Problema 1 (10 puntos)

a) Definir la transformada de Laplace de una función.

A partir de la definición:

b) Probar la identidad

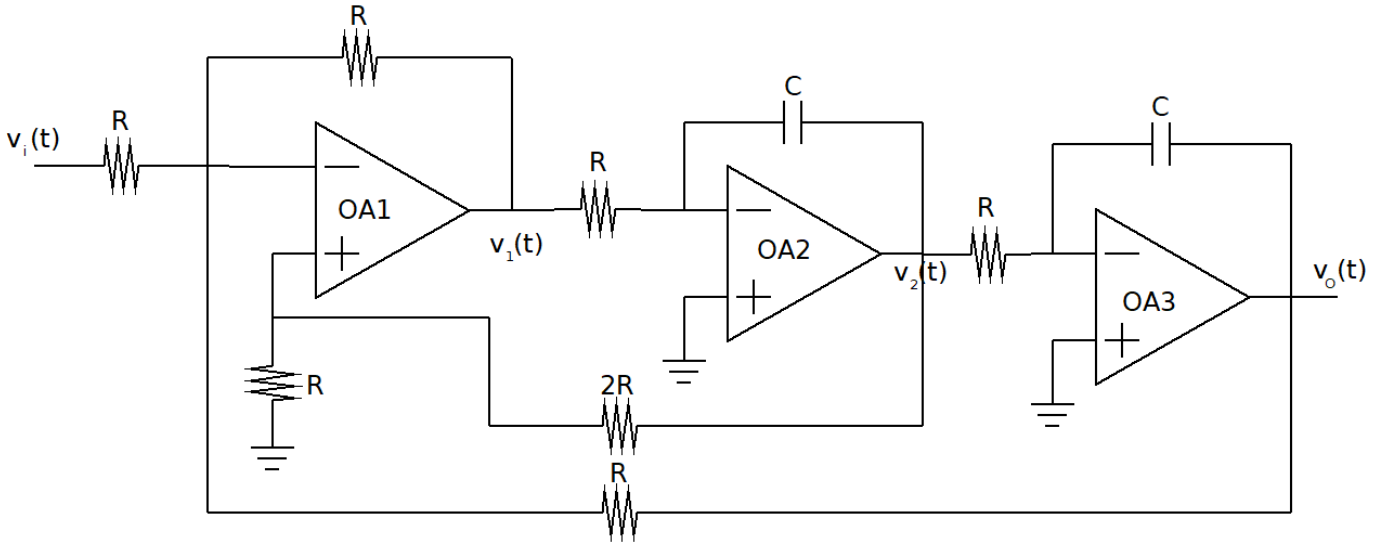
$$\mathcal{L}[Y(t).f'(t)](s) = s.\mathcal{L}[Y(t).f(t)](s) - f(0^+)$$

para una función  $f(t)$  derivable y transformable.

c) Probar la identidad

$$\mathcal{L}[Y(t).e^{-at}.f(t)](s) = \mathcal{L}[Y(t).f(t)](s + a)$$

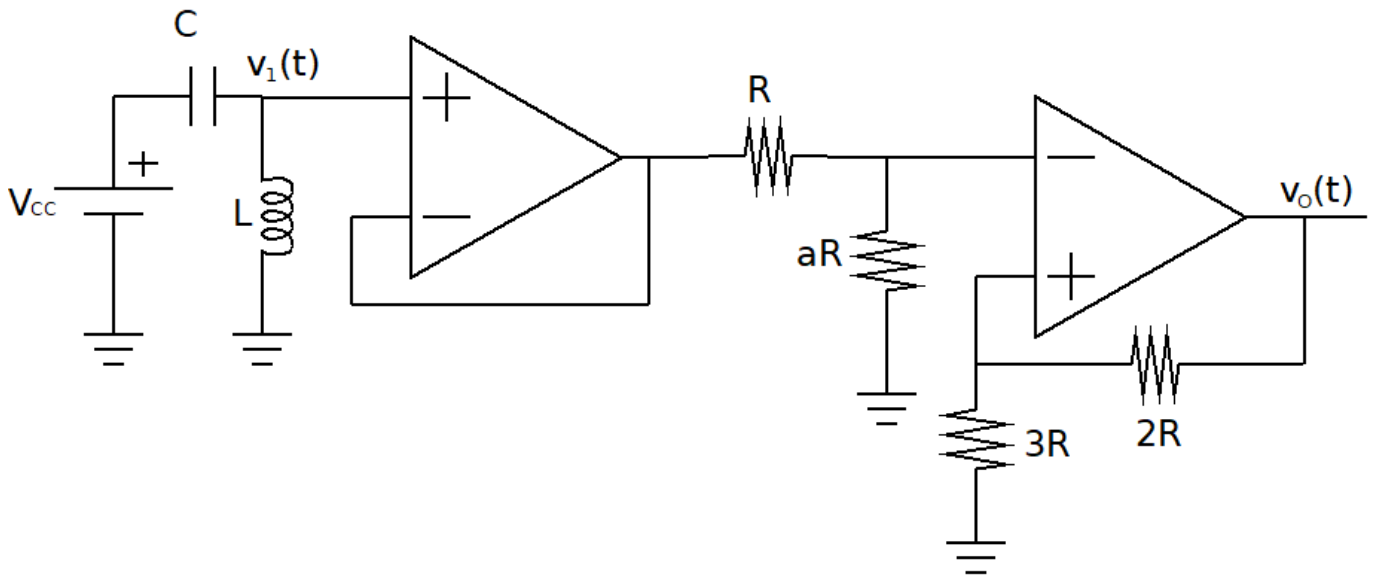
Problema 2 (15 puntos)



Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales. Se define  $\frac{1}{RC} = \omega_n$ .

- Hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ . Explicar cómo analiza los operacionales.
- Hallar el número complejo  $H(j\omega_n)$ .
- Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de  $H(j\omega)$ . Explicar claramente la deducción, especialmente la del diagrama de fase.
- Al diagrama de Bode de módulo anterior, incorporar el diagrama real, de forma coherente con lo hallado en la parte b).
- ¿Existe alguna frecuencia de trabajo  $\tilde{\omega}$  a la cual, ante una entrada sinusoidal pura, el sistema responde en régimen con una señal aproximadamente con la misma fase que la entrada y con una amplitud 100 veces menor? En caso afirmativo, ubicar aproximadamente dicha frecuencia.

## Problema 3 (13 puntos)



Se considera el circuito de la figura, inicialmente descargado (en  $t = 0$ ). El operacional de la derecha se alimenta con fuentes  $\pm V_{CC}$  y funciona como comparador.

- Identificar la configuración de los operacionales.
- Explicar cualitativamente el funcionamiento de la configuración del comparador.
- Hallar  $V_1(s)$  y  $v_1(t)$ , para todo tiempo positivo.
- Hallar el máximo valor del parámetro  $a$  que asegura que la salida del comparador no conmuta para ningún instante positivo, independientemente de cómo arranque.

Problema 4 (12 puntos)

Se considera un cuadripolo descrito por sus parámetros híbridos:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

Se carga el lado 2 con una impedancia de valor  $Z(s)$ .

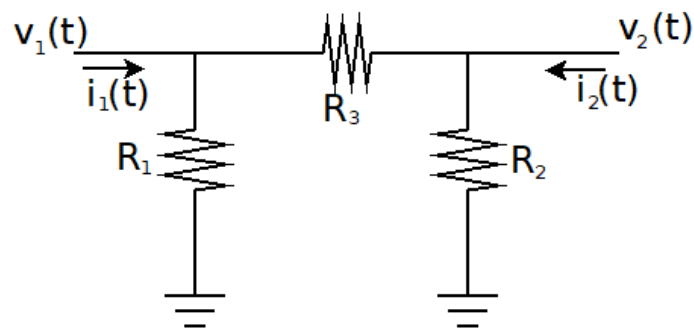
a) Mostrar que la transferencia del circuito vale

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{h_{21} \cdot Z(s)}{\Delta_h \cdot Z(s) + h_{11}}$$

con  $\Delta_h = h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}$ .

b) Para el caso en que  $Z(s) = Ls$  y que el cuadripolo es puramente resistivo, hallar la expresión temporal de la respuesta a un escalón  $v_1(t) = Y(t) \cdot E$ .

c) Hallar los parámetros híbridos del circuito de la figura.



**Solución**Problema 1

- a) Definir la transformada de Laplace de una función.

Dada una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos su transformada de Laplace como

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

que existe como integral impropia bajo ciertas condiciones de  $f$  (por ejemplo, estar asintóticamente mayorada por una exponencial). Normalmente escribimos  $\mathcal{L}[Y(t).f(t)](s)$  para enfatizar que integramos solamente en la semirrecta positiva.

A partir de la definición:

- b) Probar la identidad

$$\mathcal{L}[Y(t).f'(t)](s) = s.\mathcal{L}[Y(t).f(t)](s) - f(0^+)$$

para una función  $f(t)$  derivable y transformable.

$$\mathcal{L}[Y(t).f'(t)](s) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = f(t).e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-s)e^{-st} dt =$$

donde hemos integrado por partes. Tomando límite, obtenemos:

$$\mathcal{L}[Y(t).f'(t)](s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).e^{-st} - f(0^+) + s. \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = s.F(s) - f(0^+)$$

El primer límite tiende a 0 porque asumimos que  $f$  es transformable y tomamos  $s$  en la región de convergencia.

- c) Probar la identidad

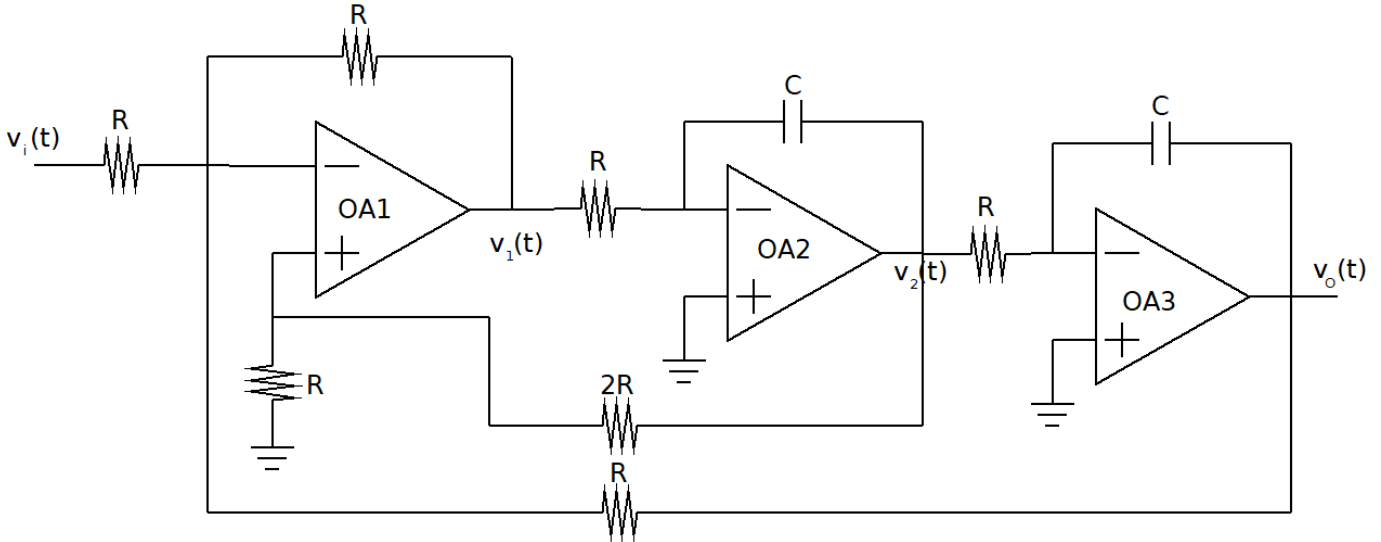
$$\mathcal{L}[Y(t).e^{-at}.f(t)](s) = \mathcal{L}[Y(t).f(t)](s + a)$$

Nuevamente a partir de la definición:

$$\mathcal{L}[Y(t).e^{-at}.f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-at}.f(t).e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}.f(t) dt = F(s + a)$$

donde la última identidad es nuevamente por definición.

Problema 2



Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales. Se define  $\frac{1}{RC} = \omega_n$ .

- a) Hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ , explicando cómo analiza los operacionales.

Los operacionales se encuentran en modo lineal, lo que implica cortocircuito virtual de las entradas (debido a la ganancia infinita) y que no entra corriente por las entradas (debido a la resistencia de entrada infinita). Los opamps 2 y 3 están en una configuración inversora, un integrador ideal, en tanto el primero configura un sumador particular, ya que la pata + no está a tierra, sino que está a una tensión relacionada con  $v_2(t)$ .

Pasando a Laplace, con datos previos nulos (ya que nos interesa la transferencia con  $V_i(s)$  como única excitación), tenemos que:

$$V_o(s) = -\frac{V_2(s)}{RCs} \Rightarrow V_2(s) = -RCs.V_o(s)$$

$$V_2(s) = -\frac{V_1(s)}{RCs} \Rightarrow V_1(s) = -RCs.V_2(s) \Rightarrow V_1(s) = (RCs)^2.V_o(s)$$

En el primer operacional, la pata + se obtiene de  $V_2(s)$  usando un divisor de tensión:

$$e^+(s) = e^-(s) = \frac{R}{3R}.V_2(s) = -\frac{RCs}{3}.V_o(s)$$

Mirando el nudo en la pata -:

$$\frac{V_i(s) - e^-(s)}{R} + \frac{V_o(s) - e^-(s)}{R} = \frac{e^-(s) - V_1(s)}{R} \Rightarrow V_i(s) = 3e^-(s) - V_1(s) - V_o(s)$$

Entonces

$$V_i(s) = -RCs.V_o(s) - (RCs)^2.V_o(s) - V_o(s)$$

Despejando la transferencia, obtenemos

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{(RC)^2s^2 + RCs + 1} = -\frac{\frac{1}{R^2C^2}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}}$$

Usando la identidad  $\omega_n = \frac{1}{RC}$ , obtenemos la expresión simplificada

$$H(s) = -\frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n s + \omega_n^2}$$

que corresponde a un sistema de segundo orden de frecuencia natural  $\omega_n$  y dos raíces complejas conjugadas, ya que  $\zeta = \frac{1}{2}$ .

b) Hallar el número complejo  $H(j\omega_n)$ .

Evaluando, vemos que:

$$H(j\omega_n) = -\frac{\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + \omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = -\frac{1}{j} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Notamos que este número complejo tiene módulo 1 y fase  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$  ó  $-270^\circ$ ).

c) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de  $H(j\omega)$ , explican claramente la deducción, especialmente la del diagrama de fase.

Hacemos un análisis asintótico por bandas discutiendo según la frecuencia natural  $\omega_n$ . En la banda de baja frecuencia:

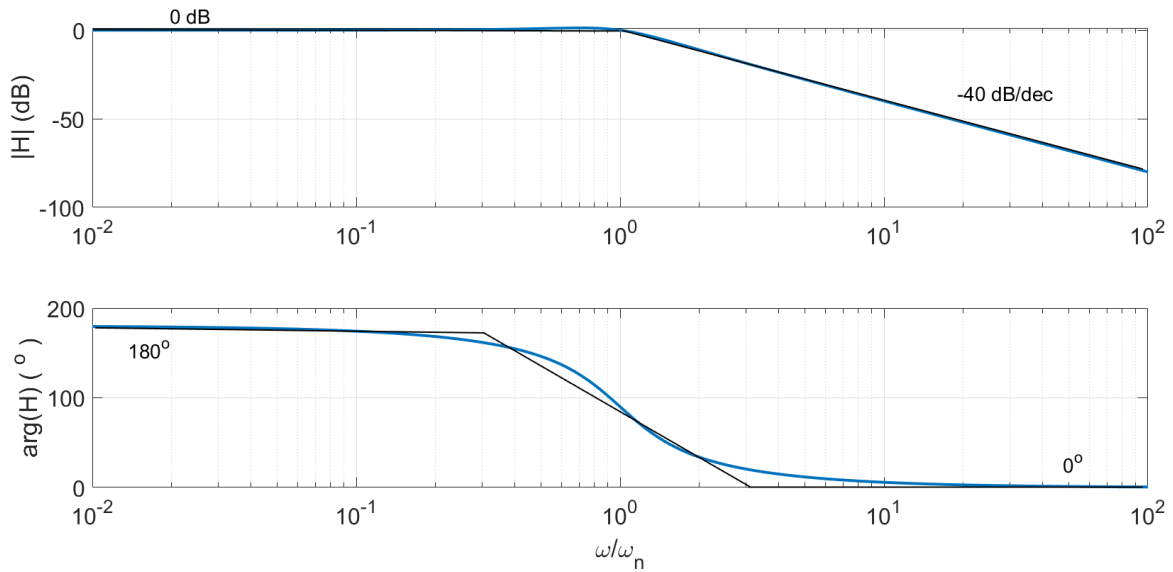
$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} \approx 0 \text{ dB} \\ \text{arg}(H) \approx -\pi \end{cases}$$

En la banda de alta frecuencia:

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} \approx (40 \log(\omega_n) - 40 \log(\omega)) \text{ dB} \\ \text{arg}(H) \approx 0 \text{ (ó } \pm 2\pi) \end{cases}$$

Como hay una variación de 180 grados en la fase, tenemos que discernir si la fase sube a  $0^\circ$  o baja a  $-360^\circ$ . Para ello, podemos usar la parte b) y ver la información exacta para la frecuencia crítica  $\omega_n$ . Como elegimos  $-\pi$  como la fase en baja frecuencia, vemos que la fase tiene que disminuir hacia  $-2\pi$ . Si hubiéramos elegido  $\pi$  como la fase en baja frecuencia, la fase debería disminuir hacia 0. Hay que tener presente siempre que el diagrama de fase está definido a menos de traslaciones de múltiplos de  $2\pi$ .

La siguiente figura ilustra los diagramas de Bode asintóticos y reales de  $H$ .



- d) Al diagrama de Bode de módulo anterior, incorporar el diagrama real, de forma coherente con lo hallado en la parte b).

La figura muestra el diagrama real, donde puede verse que el módulo crece por encima de 0dB (el valor en continua) un poco antes de  $\omega_n$ , para luego descender. Al descender, pasa por 0dB en  $\omega_n$  y luego sigue cayendo de forma monótona.

- e) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo  $\tilde{\omega}$  a la cual, ante una entrada sinusoidal pura, el sistema responde en régimen con una señal aproximadamente con la misma fase que la entrada y con una amplitud 100 veces menor? En caso afirmativo, ubicar aproximadamente dicha frecuencia.

La relación entre una entrada sinusoidal de pulsación  $\tilde{\omega}$  y amplitud  $A$  y la respectiva salida en régimen es

$$v_o(t) = A \cdot |H(j\tilde{\omega})| \cdot \cos(\omega_0 t + \arg H(j\tilde{\omega}))$$

Para que se cumpla lo pedido, el argumento de  $H$  debe ser aproximadamente 0 y el módulo de  $H$  debe ser aproximadamente  $1/100$ . Observando los diagramas de Bode, vemos que una situación de ese estilo es posible para una frecuencia ubicada aproximadamente una década por encima de la frecuencia crítica  $\omega_n$ , es decir

$$\tilde{\omega} \approx 10\omega_n$$

ya que en una década, tenemos una caída de 40dB. El valor exacto de  $H$  en esa frecuencia es

$$H(j10\omega_n) = -\frac{\omega_n^2}{(j10\omega_n)^2 + \omega_n(j10\omega_n) + \omega_n^2} = -\frac{1}{-100 + j10 + 1} \Rightarrow \begin{cases} |H| \approx \frac{1}{\sqrt{99^2+100}} \approx \frac{1}{99} \\ \arg(H) \approx -\text{atan}\left(\frac{10}{99}\right) \approx 6^\circ \end{cases}$$

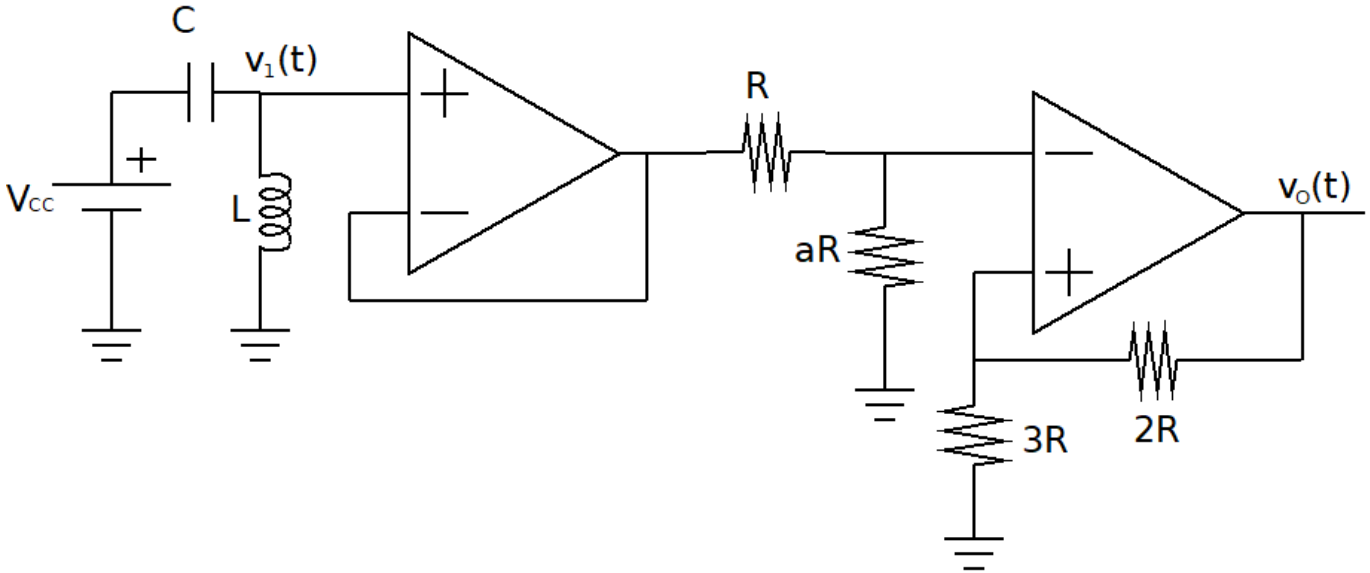
Si se pidiera el valor exacto de  $\tilde{\omega}$ , se podría hallar imponiendo

$$|H(j\alpha\omega_n)|^2 = \frac{1}{100^2}$$



y resolviendo la ecuación bicuadrada en  $\alpha$  resultante, lo que da  $\tilde{\omega} \approx 9.64\omega_n$ . Como se ve, el valor obtenido de la lectura directa de los diagramas de Bode es bastante bueno, ya que estamos a una década por encima de la frecuencia de corte.

Problema 3



Se considera el circuito de la figura, inicialmente descargado (en  $t = 0$ ). El operacional se alimenta con fuentes  $\pm V_{CC}$  y funciona como comparador.

- a) Identificar la configuración de los operacionales.

El primer operacional está realimentado por la pata - y configura un seguidor ideal, de ganancia unitaria, que copia en su salida el valor de  $v_1(t)$ . El segundo operacional, realimentado por la pata +, funciona como comparador, como dice la letra, y configura un Schmitt trigger, con una ventana de histéresis que va a estar definida por el divisor de tensión asociado a la pata +.

- b) Hallar  $V_1(s)$  y  $v_1(t)$ , para todo tiempo positivo.

Observemos en primer término que el seguidor aísla el circuito *tanque LC* del circuito no lineal de la derecha. A la izquierda tenemos una única malla, por lo que la tensión de interés la podemos hallar aplicando un divisor de tensión en el circuito equivalente en Laplace, con datos previos nulos:

$$V_1(s) = \frac{Ls}{\frac{1}{Cs} + Ls} \cdot \frac{V_{CC}}{s} = \frac{LCs}{1 + LCs^2} \cdot V_{CC} = V_{CC} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

Pasando al tiempo, nos da directamente

$$v_1(t) = Y(t) \cdot V_{CC} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

es decir, una senoide de pulsación  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  y amplitud  $V_{CC}$ .

- c) Hallar el máximo valor del parámetro  $a$  que asegura que la salida del operacional no conmuta para ningún instante positivo, independientemente de cómo arranque.

La tensión  $v_1(t)$  se copia a la salida del seguidor y alimenta el divisor de tensión conformado por las resistencias de valor  $R$  y  $aR$ , ya que no entra corriente al operacional. Por lo tanto, la pata - del comparador tendrá el valor

$$e^-(t) = v_1(t) \cdot \frac{a}{1+a} = V_{CC} \cdot \frac{a}{1+a} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

Por otra parte, la pata+ del comparador tendrá el valor

$$e^+(t) = v_o(t) \cdot \frac{3R}{5R} = \frac{3}{5} \cdot v_o(t)$$

donde nuevamente hemos aplicado un divisor de tensión. Si el comparador arranca saturado a  $+V_{CC}$ , tendremos que la tensión en la pata + es  $\frac{3}{5} \cdot V_{CC}$  y esa situación se mantendrá siempre y cuando la pata - no supere ese valor de umbral.

Si el comparador arranca saturado a  $-V_{CC}$ , tendremos que la tensión en la pata + es  $-\frac{3}{5} \cdot V_{CC}$  y esa situación se mantendrá siempre y cuando la pata - no descienda de ese valor de umbral.

Como la entrada es una senoide de amplitud  $\frac{a}{1+a} \cdot V_{CC}$ , para asegurarnos que el comparador no conmute, independientemente de cómo arranque, basta con imponer que la amplitud de la senoide no llegue al umbral:

$$\frac{a}{1+a} \cdot V_{CC} < \frac{3}{5} \cdot V_{CC} \Rightarrow 5a < 3 + 3a \Rightarrow 2a < 3 \Rightarrow \boxed{a < \frac{3}{2}}$$

De esta forma

$$\left| \frac{1}{1+a} \cdot V_{CC} \cdot \cos(\omega_0 t) \right| < \frac{3}{5} \cdot V_{CC}$$

y el comparador nunca conmuta, ya que la entrada queda dentro de la *franja de histéresis*.

Problema 4

Se considera un cuadripolo descrito por sus parámetros híbridos:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

Se carga el lado 2 con una impedancia de valor  $Z(s)$ .

a) Mostrar que la transferencia del circuito vale

$$H(s) = -\frac{h_{21} \cdot Z(s)}{\Delta_h \cdot Z(s) + h_{11}}$$

con  $\Delta_h = h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}$ .

La transferencia es  $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ . Planteando la malla del lado 2, tenemos

$$V_2(s) = -Z(s) \cdot I_2(s)$$

donde el signo de - está asociado a que tomamos  $I_2$  entrante al cuadripolo. Entonces podemos despejar  $I_1$  de la segunda ecuación y la sustituimos en la primera:

$$-\frac{V_2}{Z(s)} = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot V_2 \Rightarrow h_{21} \cdot I_1 = -\frac{V_2}{Z(s)} - h_{22} \cdot V_2 = -\left(\frac{1}{Z(s)} + h_{22}\right) \cdot V_2$$

Entonces

$$I_1 = -\frac{1}{h_{21}} \cdot \left(\frac{1}{Z(s)} + h_{22}\right) \cdot V_2$$

Volviendo a la primera ecuación:

$$V_1 = -\frac{h_{11}}{h_{21}} \cdot \left(\frac{1}{Z(s)} + h_{22}\right) \cdot V_2 + h_{12} \cdot V_2 = -\left[\frac{h_{11} + h_{11} \cdot h_{22} \cdot Z(s) - h_{21} \cdot h_{12} \cdot Z(s)}{h_{21} \cdot Z(s)}\right] \cdot V_2$$

Despejamos la transferencia:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{h_{21} \cdot Z(s)}{(h_{11} \cdot h_{22} - h_{21} \cdot h_{12})Z(s) + h_{11}} = -\frac{h_{21} \cdot Z(s)}{\Delta_h \cdot Z(s) + h_{11}}$$

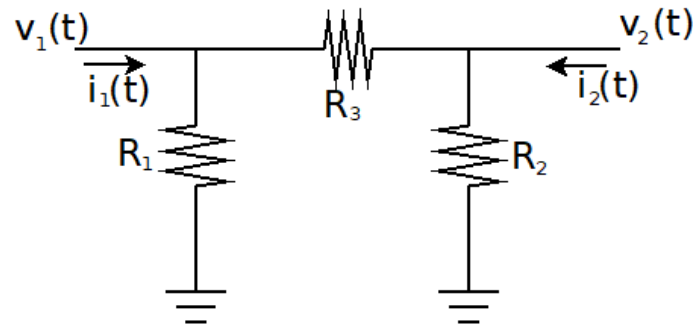
b) Para el caso  $Z(s) = Ls$  y que el cuadripolo es puramente resistivo, hallar la expresión temporal de la respuesta a un escalón  $v_1(t) = Y(t) \cdot E$ .

Como el cuadripolo es resistivo, los parámetros son puramente reales. Hacemos la transformada de Laplace de la entrada, planteamos la expresión en Laplace de la respuesta y ponemos  $Z(s) = Ls$ :

$$V_2(s) = -\frac{E}{s} \cdot \frac{h_{21} \cdot Z(s)}{\Delta_h \cdot Z(s) + h_{11}} = -\frac{E}{s} \cdot \frac{h_{21} \cdot Ls}{\Delta_h \cdot Ls + h_{11}} = -\frac{h_{21} \cdot E}{\Delta_h} \frac{1}{s + \frac{h_{11}}{\Delta_h \cdot L}}$$

Pasando al tiempo:

$$v_2(t) = -Y(t) \cdot \frac{h_{21} \cdot E}{\Delta_h} \cdot e^{-(h_{11} \cdot t)/(\Delta_h \cdot L)}$$



c) Hallar los parámetros híbridos del circuito de la figura. A partir de la expresión

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

planteamos los ensayos para obtener los parámetros. Cortocircuitamos el lado 2, obteniendo

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}, \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Vemos que  $R_2$  queda cortocircuitada, por lo que no circula corriente por ella. Obtenemos

$$V_1 = (R_1 || R_3) \cdot I_1 \Rightarrow h_{11} = (R_1 || R_3)$$

Para hallar  $I_2$ , planteamos el divisor de corriente

$$I_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_3} \cdot I_1 \Rightarrow h_{21} = -\frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

Ahora anulamos  $I_1$  y planteamos

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}, \quad h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Observemos que como  $I_1 = 0$ , entonces  $R_1$  y  $R_3$  están en serie. Tenemos que

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2 || (R_3 + R_1)} \Rightarrow h_{22} = \frac{1}{R_2 || (R_3 + R_1)}$$

Por otra parte,  $V_1$  lo obtenemos aplicando divisor de tensión:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_3 + R_1} \cdot V_2 \Rightarrow h_{12} = \frac{R_1}{R_3 + R_1}$$