Teoría de circuitos

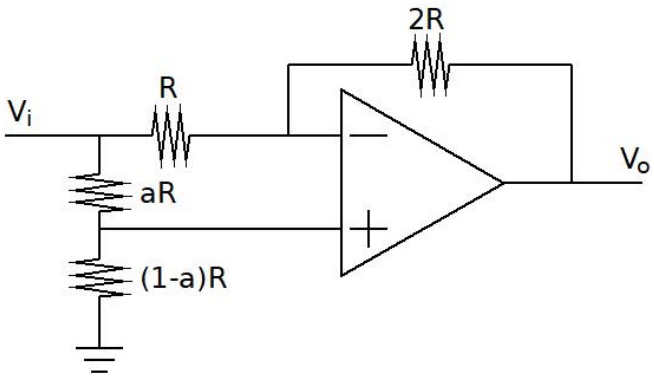
Primer parcial

2022 - 2^o semestre

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SER PROLIJO Y EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS. Expresar sus resultados exactamente en el formato pedido. Recordar que esta prueba prestende evaluar si se han alcanzado los objetivos de formación establecidos en el programa.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar la prueba, escanear las hojas, generar un pdf, subirlo como tarea en el EVA y entregar las hojas al docente.**
- **Todos los operacionales son ideales. Se sugiere explicar bien cómo los analiza en los circuitos.**

Problema 1 (10 puntos)



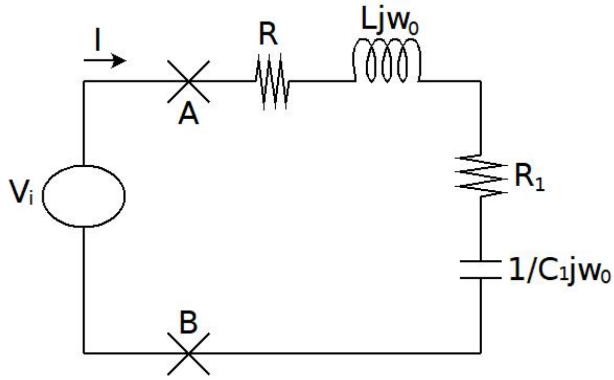
a) En el circuito de la figura, el parámetro a puede fijarse libremente en el intervalo $[0, 1]$. Hallar V_o en función de V_i, R y a.

b) Elegir a para que $V_o = V_i$.

c) Elegir a para que $V_o = -V_i$.

Problema 2 (14 puntos)

Se considera el circuito en régimen de la figura.



a) Hallar el fasor de corriente I.

b) Para los siguientes valores

$$R = 20\Omega \quad , \quad Lj\omega_0 = j60\Omega \quad , \quad R_1 = 20\Omega \quad , \quad \frac{1}{C_1 j\omega_0} = -j32\Omega$$

indicar si la impedancia que ve la fuente es inductiva o capacitiva. Justificar.

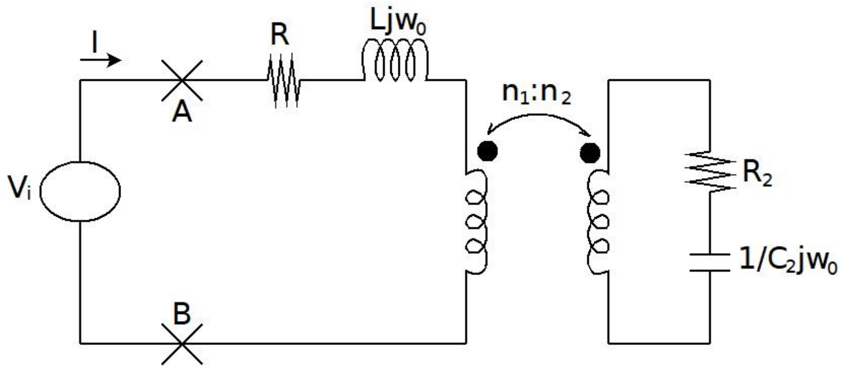
c) Hallar la potencia reactiva consumida a la fuente. (Asumir que se trabaja con valores eficaces).

d) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, colocando un elemento adecuado entre los puntos A y B. Indicar, fundamentando, qué elemento colocaría y de qué valor.

e) En el circuito de abajo, se tiene que:

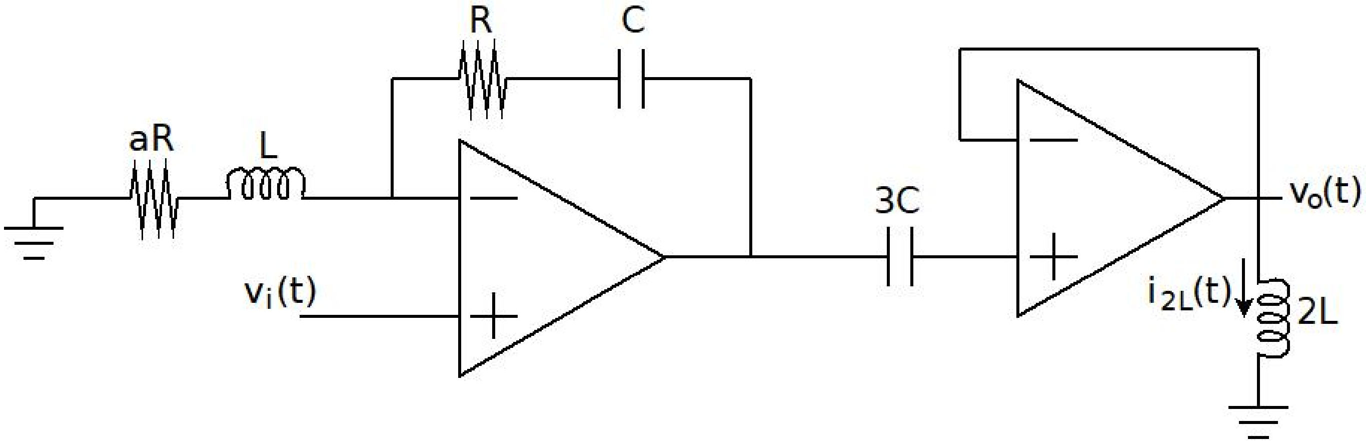
$$R = 20\Omega \quad , \quad Lj\omega_0 = j60\Omega \quad , \quad R_2 = 5\Omega \quad , \quad \frac{1}{C_2 j\omega_0} = -j8\Omega$$

Hallar la relación de transformación $\frac{n_1}{n_2}$ necesaria para que el circuito sea equivalente al de arriba, desde el punto de vista de la corriente que entrega la fuente. Es necesario justificar, pero no se pide demostrar nada.



Problema 3 (14 puntos)

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales, funcionando en zona lineal.



a) Dibujar el circuito equivalente en fasores.

b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. **Explicar claramente** cómo trabaja con los operacionales.

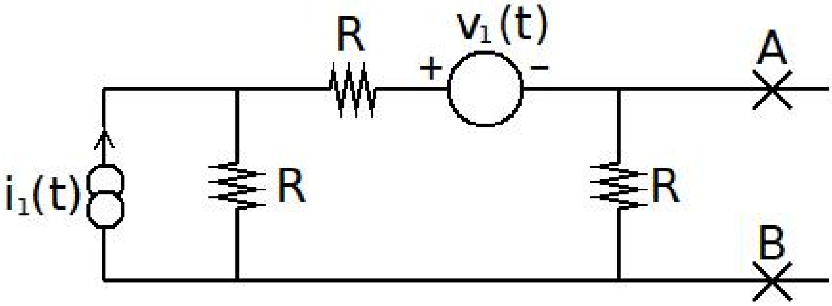
A partir de ahora se asume que $\mathbf{a = 1}$ y que $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{LC}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{RC}}$. Se define la pulsación $\omega_{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{LC}}}$.

c) Verificar que se cumple que $H(j\omega_0) = 1 - j$.

d) Se aplica la entrada $v_i(t) = A_i.\cos(\omega_0 t)$. Hallar la **expresión temporal** de la corriente i_{2L} en régimen.

Problema 4 (12 puntos)

Se considera el circuito de la figura, con las fuentes independientes $v_1(t)$ e $i_1(t)$.



a) Hallar el equivalente de Thévenin $(v_{Th}(t), R_{Th})$ entre los puntos A y B, en función de R, $v_1(t)$ e $i_1(t)$.

b) Para el caso en que

$$i_1(t) = A_i.\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad v_1(t) = R.A_i.\cos(\omega_0 t)$$

con A_i y ω_0 positivos:

i) Hallar la expresión de $v_{Th}(t)$.

ii) Dibujar un diagrama fasorial cualitativo que contenga los fasores asociados v_1, i_1 y v_{Th}.

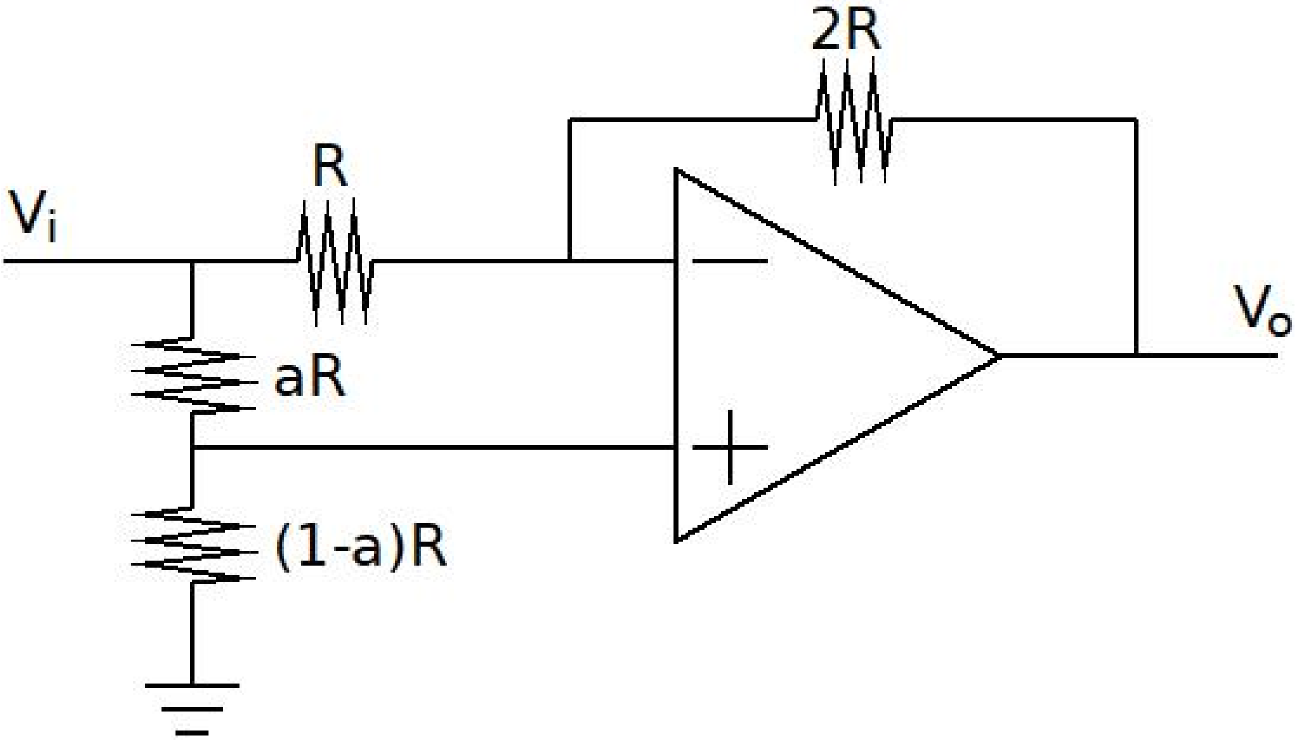
c) Con las mismas fuentes v_1 e i_1 de la parte anterior, se conecta entre A y B una inductancia L y se considera el circuito funcionando en régimen. Se cumple que

$$\angle R_{Th} + Lj\omega_0 = \frac{\pi}{6}$$

Dibujar un diagrama fasorial cualitativo en el que aparezcan v_1, i_1, v_{Th}, la corriente por L y la tensión en bornes de L (medidas desde A hacia B).

Solución

Problema 1



a) En el circuito de la figura, el parámetro a puede fijarse libremente en el intervalo $[0,1]$. Hallar V_o en función de V_i, R y a.

El operacional es ideal, por lo que no entra corriente por las patas de entrada. Asumimos funcionamiento lineal, lo que junto con la ganancia infinita implica cortocircuito virtual de las patas de entrada ($e^+ = e^-$). Como no entra corriente por la pata +, podemos aplicar un divisor de tensión para obtener e^+:

$$e^+ = \frac{(1-a)R}{aR + (1-a)R}.V_i = (1-a).V_i$$

Por otro lado, observamos que e^- va a ser una tensión intermedia entre V_i y V_o. Planteando el nudo en la pata -, obtenemos:

$$\frac{V_i - e^-}{R} = \frac{e^- - V_o}{2R} \Rightarrow 2V_i - 2e^- = e^- - V_o \Rightarrow 2V_i - 3e^- = -V_o$$

De donde:

$$2V_i - 3(1-a).V_i = (3a-1).V_i = -V_o \Rightarrow V_o = (1-3a).V_i$$

b) Elegir a para que $V_o = V_i$.

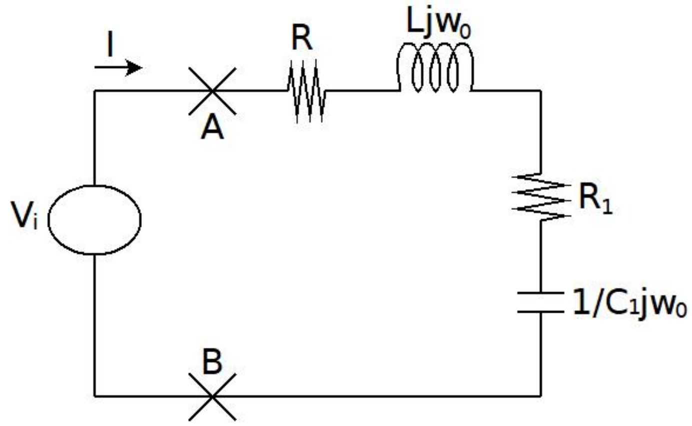
Para tener lo esperado, igualamos $1 - 3a = 1$, de donde $\boxed{a = 0}$.

c) Elegir a para que $V_o = -V_i$.

Para tener lo esperado, igualamos $1 - 3a = -1$, de donde $\boxed{a = 2/3}$.

Problema 2

Se considera el circuito en régimen de la figura.



a) Hallar el fasor de corriente I.

Planteando la malla, obtenemos[1]

$$I = \frac{V_i}{R + R_1 + j\left(L\omega_0 - \frac{1}{C_1 j\omega_0}\right)}$$

b) Para los siguientes valores

$$R = 20\Omega \quad , \quad Lj\omega_0 = j60\Omega \quad , \quad R_1 = 20\Omega \quad , \quad \frac{1}{C_1 j\omega_0} = -j32\Omega$$

indicar si la impedancia que ve la fuente es inductiva o capacitiva. Justificar.

La impedancia de interés es

$$Z(j\omega_0) = R + R_1 + j\left(L\omega_0 - \frac{1}{C_1\omega_0}\right) = \left[(20+20) + j\,(60-32)\right]\Omega = (40 + j28)\Omega$$

Como la reactancia es positiva, la carga es inductiva. La corriente de la fuente estará retrasada respecto de la tensión.

c) Hallar la potencia reactiva consumida a la fuente. (Asumir que se trabaja con valores eficaces).

Asumiendo que trabajamos en valores eficaces, tenemos que

$$Q = im\left[V_i.\overline{I}\right] = im\left[V_i.\overline{\frac{V_i}{Z(j\omega_0)}}\right] = |V_i|^2.im\left[\overline{\frac{1}{Z(j\omega_0)}}\right] = \frac{|V_i|^2}{|Z(j\omega_0)|^2}.im\left[Z(j\omega_0)\right]$$

$$\Rightarrow Q = |V_i|^2.\frac{L\omega_0 - \frac{1}{C_1\omega_0}}{(R+R_1)^2 + \left(L\omega_0 - \frac{1}{C_1\omega_0}\right)^2} = |V_i|^2.\frac{28}{40^2 + 28^2}\,VAR$$

[1] La expresión puede trabajarse más, llegando por ejemplo a un cociente de polinomios en $j\omega$. Dado lo que se pide luego, se optó por dejarla así.

d) Compensar la potencia reactiva entregada por la fuente, colocando un elemento adecuado entre los puntos A y B. Indicar, fundamentando, qué elemento colocaría y de qué valor.

Como la carga es inductiva, consume potencia reactiva. Para compensarla, colocamos un elemento capacitivo, de valor C_C, que entregue dicha reactiva. Al colocarlo entre A y B, queda en paralelo con $Z(j\omega_0)$ y ve la misma tensión V_i. Calculamos C_C de forma que entregue la reactiva que consume Z:

$$Q_C = -|V_i|^2.C_C\omega_0 = -Q \Rightarrow C_C = \frac{Q}{|V_i|^2.\omega_0} = \frac{28}{(40^2+28^2).\omega_0}F$$

e) En el circuito de abajo, se tiene que:

$$R = 20\Omega \quad , \quad Lj\omega_0 = j60\Omega \quad , \quad R_2 = 5\Omega \quad , \quad \frac{1}{C_2 j\omega_0} = -j8\Omega$$

Hallar la relación de transformación $\frac{n_1}{n_2}$ necesaria para que el circuito sea equivalente al de arriba, desde el punto de vista de la corriente que entrega la fuente. Es necesario justificar, pero no se pide demostrar nada.

Observemos que en el circuito, podemos pasar la impedancia del secundario al primario, obteniendo un circuito equivalente sin el transformador ideal. Como vimos en el curso, la impedancia del primario se obtiene multiplicando la impedancia del secundario por la relación de transformación al cuadrado. Para que el circuito resultante coincida con el de arriba, se debe cumplir que

$$R_1 + \frac{1}{C_1 j\omega_0} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 . \left(R_2 + \frac{1}{C_2 j\omega_0}\right)$$

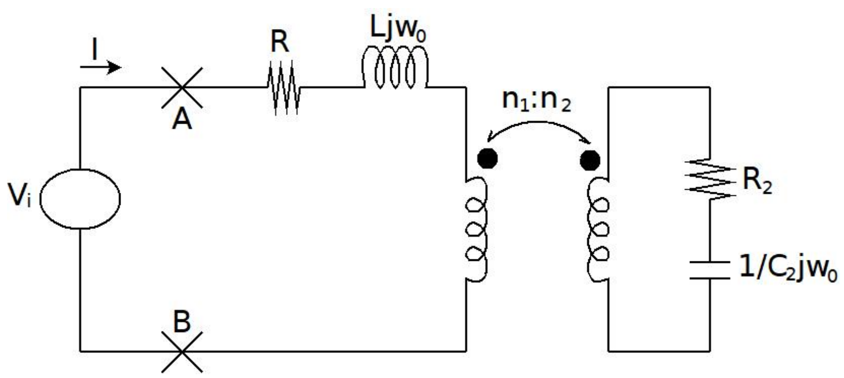
De donde

$$R_1 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 .R_2 \quad , \quad \frac{1}{C_1 j\omega_0} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 . \frac{1}{C_2 j\omega_0}$$

Sustituyendo por los valores dados:

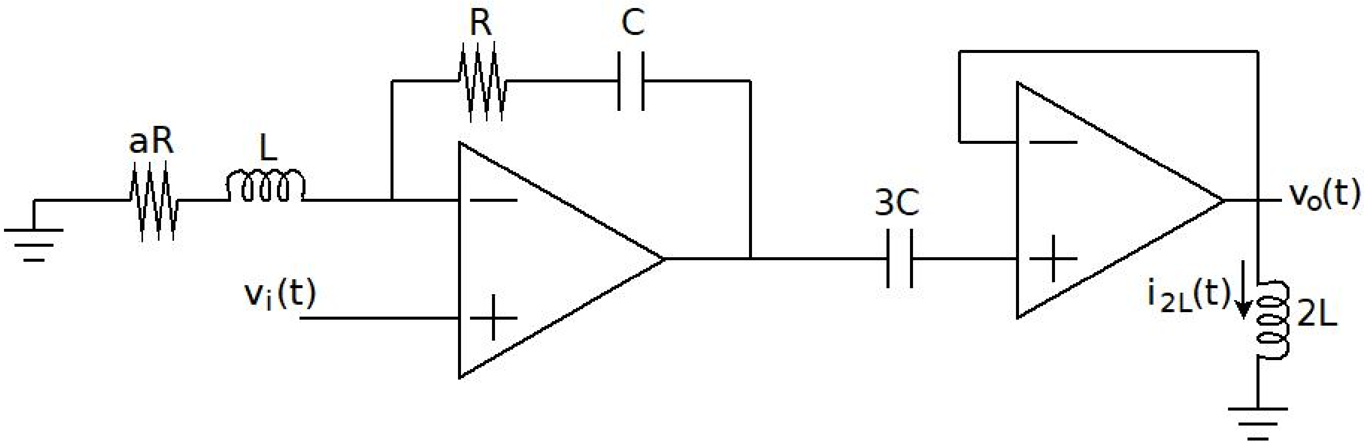
$$20\Omega = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 .5\Omega \quad , \quad -j32\Omega = -\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 .j8\Omega$$

Finalmente, obtenemos $\frac{n_1}{n_2} = 2$.



Problema 3

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales, funcionando en zona lineal.



a) Dibujar el circuito equivalente en fasores.

El circuito resultante es identico al anterior, salvo que las señales se sustituyen por sus fasores respectivos ($V_i(j\omega)$, $V_o(j\omega)$ e $I_{2L}(j\omega)$), y se identifican las componentes por sus respectivas impedancias. Queda pendiente hacer el nuevo dibujo.

b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. **Explicar claramente** cómo trabaja con los operacionales.

Al ser los operacionales ideales, no entra corriente por las patas de entrada, debido a la impedancia de entrada infinita. Por otro lado, al estar en zona lineal, la ganancia infinita implica el cortocircuito virtual de las patas de entrada.

Observamos que el operacional de la izquierda está en una configuración no inversora, de ganancia $1 + \frac{Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega)}$, con

$$Z_1(j\omega) = aR + Lj\omega \quad , \quad Z_2(j\omega) = R + \frac{1}{Cj\omega} = \frac{1 + RCj\omega}{Cj\omega}$$

El segundo operacional configura un seguidor ideal, de ganancia 1. El condensador de capacidad $3C$ no juega para nada en el circuito, ya que por él no circula corriente: la tensión de salida del primer operacional es la tensión de entrada del segundo. Por lo tanto

$$V_o(j\omega) = \left(1 + \frac{Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega)}\right).V_i(j\omega) = \left(\frac{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega)}\right).V_i(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{aR + Lj\omega + \frac{1+RCj\omega}{Cj\omega}}{aR + Lj\omega} = \frac{aRCj\omega + LC(j\omega)^2 + 1 + RCj\omega}{Cj\omega.(aR + Lj\omega)}$$

$$H(j\omega) = \frac{LC(j\omega)^2 + (1+a)RCj\omega + 1}{Cj\omega.(aR + Lj\omega)} = \frac{LC(j\omega)^2 + (1+a)RCj\omega + 1}{LC(j\omega)^2 + aRCj\omega}$$

A partir de ahora se asume que $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{RC}$. Se define la pulsación $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

c) Verificar que para $a = 1$ se cumple que $H(j\omega_0) = 1 - j$.

$$H(j\omega_0) = \frac{LC(j\omega_0)^2 + (1+a)RCj\omega_0 + 1}{Cj\omega_0.(aR + Lj\omega_0)} = \frac{(j)^2 + (1+a)j + 1}{(j)^2 + aj} = \frac{(1+a)j}{-1 + aj}$$

Para $a = 1$, tenemos que:

$$H(j\omega_0) = \frac{2j}{-1+j} = \frac{2j.(-1-j)}{(-1+j).(-1-j)} = \frac{-2j-2(j)^2}{|-1+j|^2} = \frac{-2j+2}{2} = 1-j = \sqrt{2}\angle -\frac{\pi}{4}$$

d) Se aplica la entrada $v_i(t) = A_i.\cos(\omega_0 t)$. Hallar la **expresión temporal** de la corriente i_{2L} en régimen.

En fasores, sabemos que

$$I_{2L}(j\omega_0) = \frac{V_o(j\omega_0)}{2Lj\omega_0} = \frac{H(j\omega_0).V_i(j\omega_0)}{2Lj\omega_0} = \frac{1-j}{2Lj\omega_0}.V_i(j\omega_0)$$

Pasando al tiempo, hallamos la expresión temporal de la corriente en régimen:

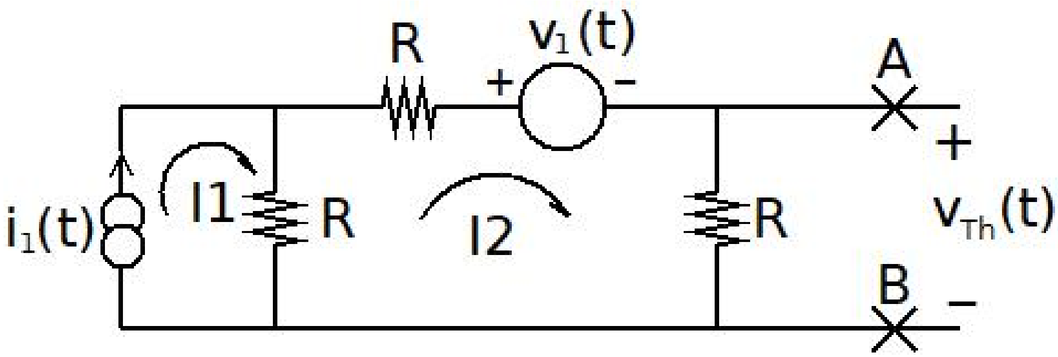
$$i_{2L}(t) = re\left[I_{2L}(j\omega_0).e^{j\omega_0 t}\right] = re\left[\frac{1-j}{2Lj\omega_0}.V_i(j\omega_0).e^{j\omega_0 t}\right] = re\left[\frac{\sqrt{2}}{2L\omega_0}.e^{-j\frac{\pi}{4}}.e^{-j\frac{\pi}{2}}.V_i(j\omega_0).e^{j\omega_0 t}\right]$$

Entonces

$$i_{2L}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2L\omega_0}.A_i.\cos\left(\cos\omega_0 t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Problema 4

Se considera el circuito de la figura, con las fuentes independientes $v_1(t)$ e $i_1(t)$.



a) Hallar el equivalente de Thévenin $(v_{Th}(t), R_{Th})$ entre los puntos A y B, en función de R, $v_1(t)$ e $i_1(t)$.

La tensión de vacío V_{Th} es la que tenemos entre A y B cuando no extraemos corriente del circuito. En este caso, es la caída en la resistencia R de más a la derecha. Observemos que el circuito tiene dos mallas. Denotemos por I_1 la corriente de la malla de la izquierda y por I_2 la corriente de la malla de la derecha, medidas en sentido horario. Entonces:

$$I_1 = i_1(t) \text{ (dato)} \quad , \quad v_{Th} = R.I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{v_{Th}}{R}$$

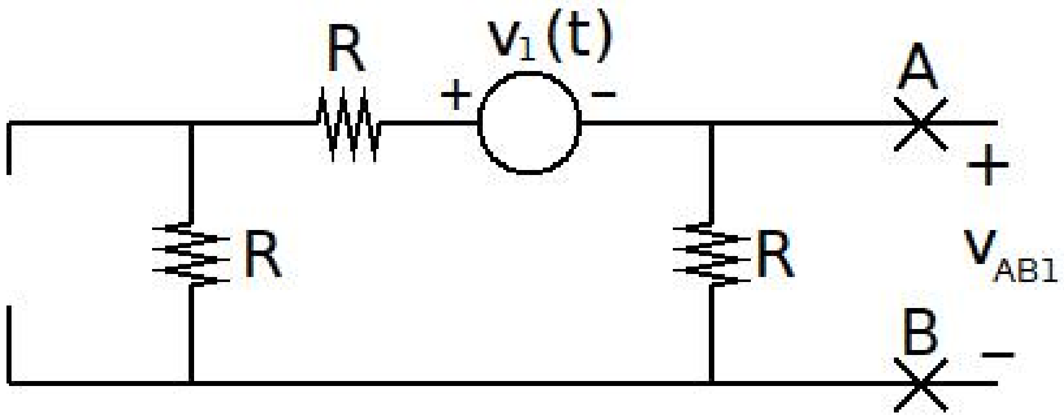
Además,

$$R.(I_1 - I_2) = R.I_2 + v_1(t) + R.I_2 \Rightarrow R.i_1(t) = 3R.\frac{v_{Th}}{R} + v_1(t)$$

De donde

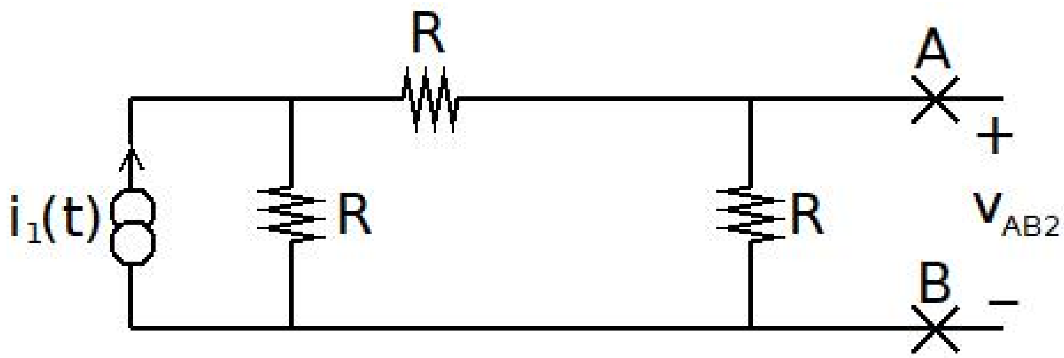
$$v_{Th} = \frac{R.i_1(t) - v_1(t)}{3}$$

Observar que para hallar $v_{Th}(t)$ podríamos haber usado superposición, considerando las fuentes de a una. Tenemos dos circuitos resultantes: En el primero, la tensión de interes sale por división de tensión:



$$v_{AB1} = \frac{R}{R+R+R}(-v_1(t)) = -\frac{v_1(t)}{3}$$

En el segundo, hacemos un divisor de corriente para hallar la corriente que circula entre los puntos A y B,



obteniendo:

$$v_{AB2} = R.\left[\frac{R}{R+(2R)}\right].i_1(t) = \frac{R.i(t)}{3}$$

Finalmente,

$$v_{Th} = v_{AB1} + v_{AB2} = \frac{R.i_1(t) - v_1(t)}{3}$$

Para hallar la resistencia de Thévenin (R_{Th}), anulamos las fuentes independientes y calculamos la resistencia vista desde A y B. Podemos hacerlo imponiendo una fuente externa y viendo qué corriente le consume el circuito. O, directamente,

$$R_{Th} = (R+R)||R = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}.R$$

b) Para el caso en que

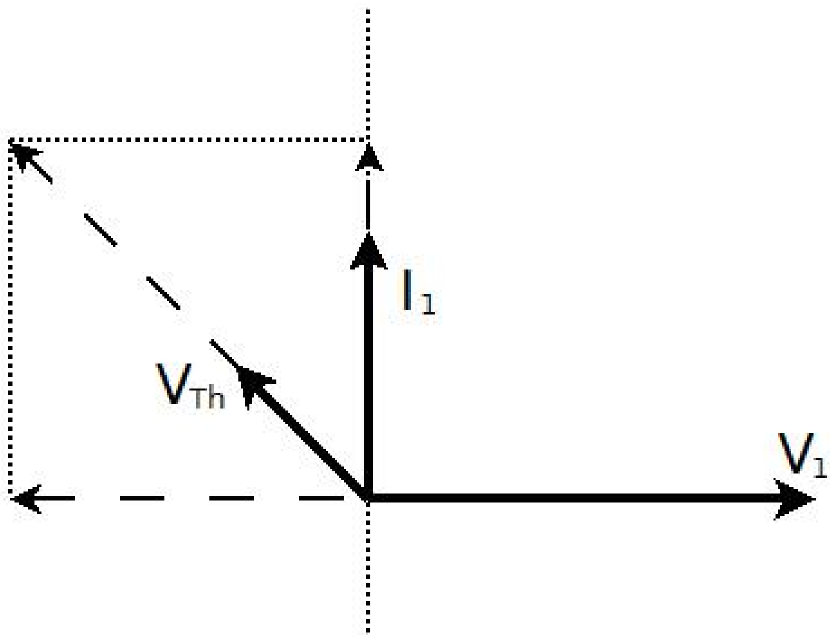
$$i_1(t) = A_i.\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad v_1(t) = R.A_i.\cos(\omega_0 t)$$

i) Hallar la expresión de $v_{Th}(t)$.

$$v_{Th} = \frac{R.i_1(t) - v_1(t)}{3} = \frac{1}{3}.\left[R.A_i.\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) - R.A_i.\cos(\omega_0 t)\right]$$

ii) Dibujar un diagrama fasorial cualitativo que contenga los fasores asociados v_1, i_1 y v_{Th}.

Dado que todas las señales son de pulsación ω_0, podemos representarlas en un mismo diagrama fasorial. Como no conocemos los valores de R, A_i y A_v, lo hacemos cualitativo. Tomamos como referencia el fasor asociado a $v_1(t)$. El fasor asociado a $i_1(t)$ va a estar en cuadratura, adelantado 90^o. Finalmente la combinación lineal asociada a v_{Th} nos indica que su fasor estará en el tercer cuadrante, con argumento -135 grados. La siguiente figura resume la situación.



c) Con las mismas fuentes v_1 e i_1 de la parte anterior, se conecta entre A y B una inductancia L y se considera el circuito funcionando en régimen. Se cumple que

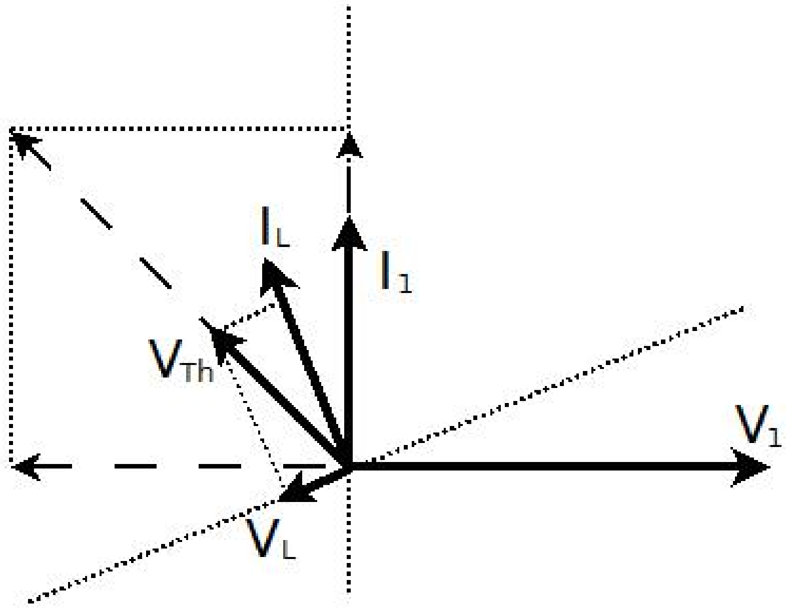
$$\angle R_{Th} + Lj\omega_0 = \frac{\pi}{6}$$

Dibujar un diagrama fasorial cualitativo en el que aparezcan v_1, i_1, v_{Th}, la corriente por L y la tensión en bornes de L (medidas desde A hacia B).

Usando el equivalente de Thévenin, y trabajando en fasores, podemos calcular la corriente y la tensión por la inductancia y :

$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + Lj\omega_0} \quad , \quad V_L = \frac{Lj\omega_0}{R_{Th} + Lj\omega_0}.V_{Th}$$

Observemos que I_L estará retrasado menos de 30 grados respecto de V_{Th}, en tanto V_L será perpendicular a I_L, con un adelanto de 90 grados. Por lo que habíamos visto antes, el fasor I_L está en el tercer cuadrante.La siguiente figura resume la situación.



I_L
I_1
V_Th
V_1
V_L