Teoría de circuitos

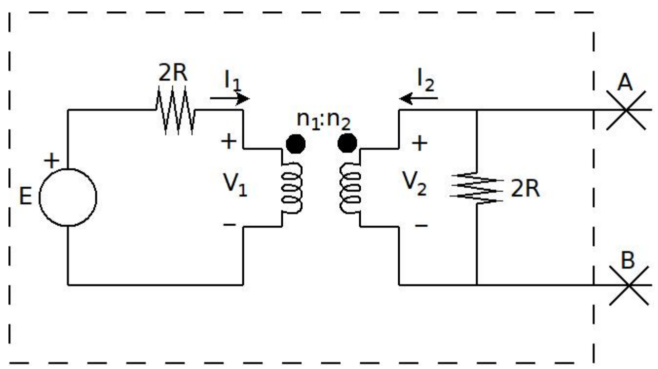
Primer parcial

2022 - 1er semestre

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SER PROLIJO Y EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS. Expresar sus resultados exactamente en el formato pedido. Recordar que esta prueba prestende evaluar si se han alcanzado los objetivos de formación establecidos en el programa.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar la prueba, escanear las hojas, generar un pdf, subirlo como tarea en el EVA y entregar las hojas al docente.**
- **Todos los operacionales son ideales. Se sugiere explicar bien cómo los analiza en los circuitos.**

Problema 1 (13 puntos)



a) Considere un transformador ideal, caracterizado por su relación de vueltas $\frac{n_1}{n_2}$. Si se carga el secundario con una impedancia Z_L, deducir la impedancia vista desde el primario.

b) ¿Si se carga el primario con una impedancia Z, cuál sería la impedancia vista desde el secundario?

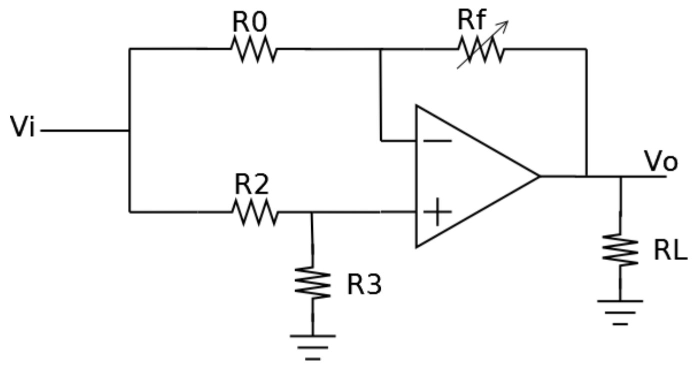
c) En el circuito de la figura, el transformador ideal tiene $\frac{n_1}{n_2} = 4$. Hallar el equivalente de Thévenin.

Problema 2 (10 puntos)

En el circuito de la figura, la resistencia R_f es variable y el operacional, ideal, está alimentado por fuentes de $\pm 15V$. Se cumple que $R_0 = R_3 = 1,5k\Omega$, $R_2 = 5R_0$, $R_L = 4R_0$, $V_i = 30V$.

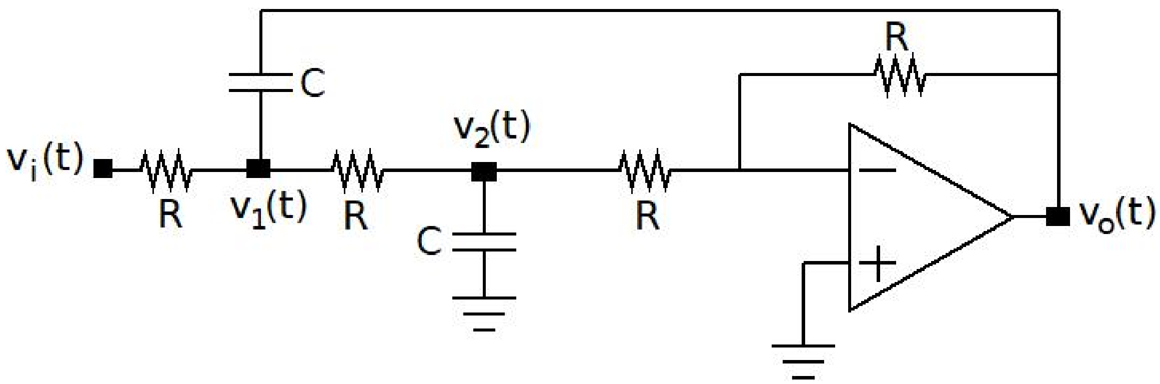
a) Asumiendo que el operacional funciona en zona lineal, expresar V_o en función de V_i.

b) Hallar el rango de valores de R_f que, manteniendo fijas las demás magnitudes, hacen saturar al operacional.



Problema 3 (15 puntos)

Se considera el circuito de la figura, con el amplificador operacional ideal. Se define la pulsación $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal,

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

explicando claramente cómo analiza el circuito.

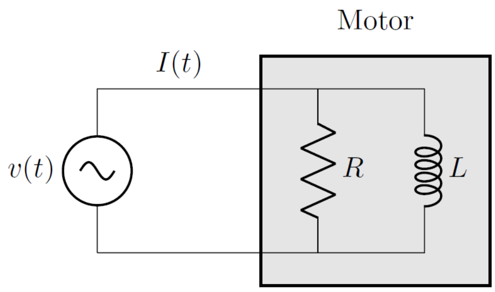
b) Hallar la respuesta en régimen del circuito para la entrada:

$$v_i(t) = A.\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

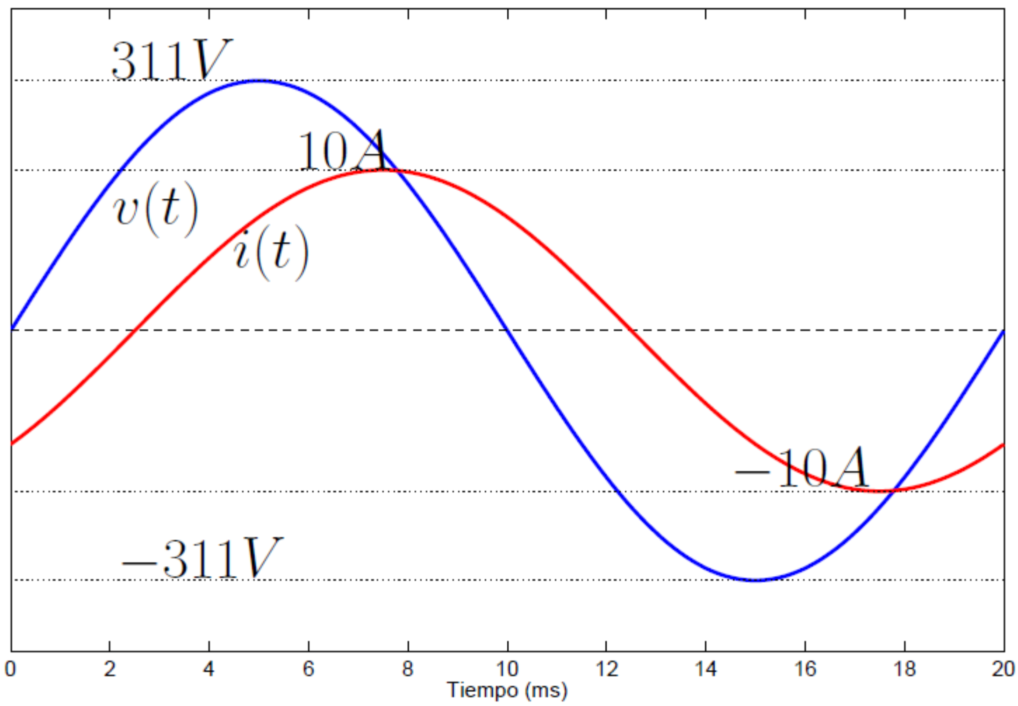
c) Para lo analizado en la parte b), dibujar **cualitativamente** en un mismo diagrama fasorial, los fasores V_1, V_o, V_2 y la corriente I_C que circula por el condensador a tierra, tomando como referencia V_o.

Problema 4 (12 puntos)

Se considera un motor funcionando en régimen sinusoidal. En la figura se muestra un modelo para representar la impedancia del motor.



La siguiente gráfica muestra un periodo de la tensión en bornes y la corriente consumida por el motor, funcionando en régimen sinusoidal. El desfasaje entre ambas señales es de $2.5ms$.



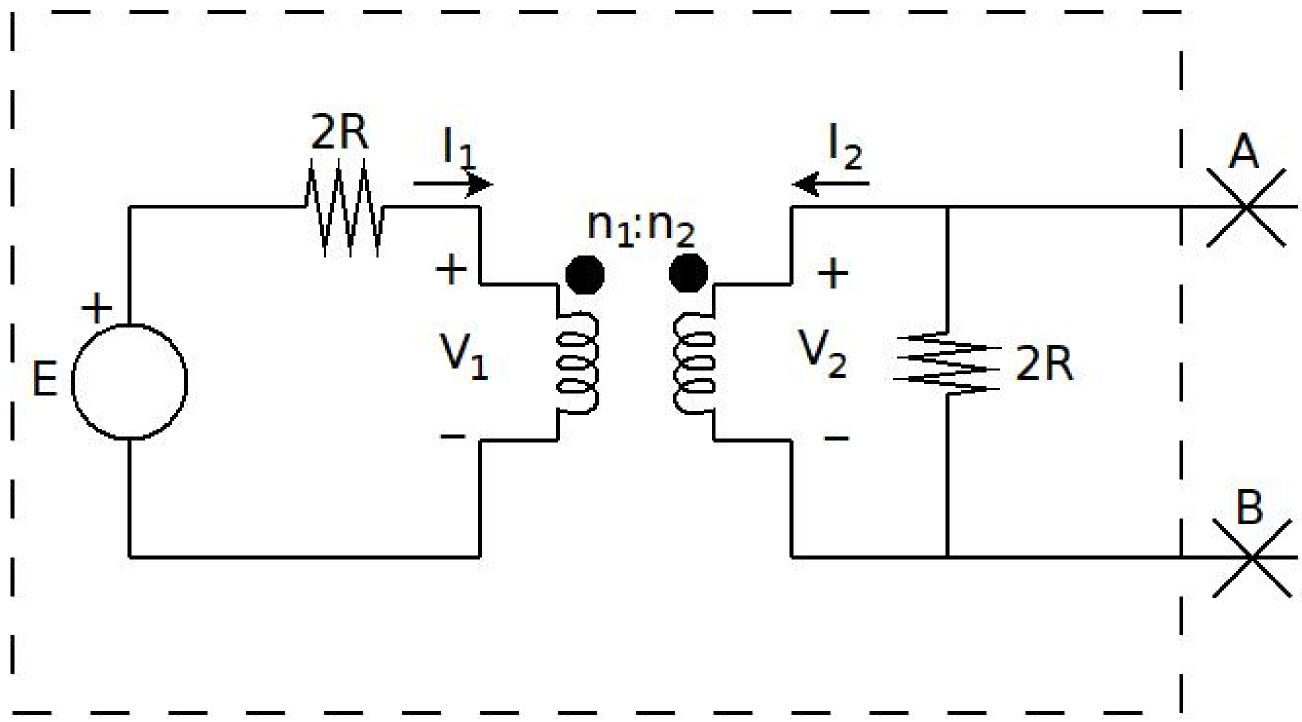
a) A partir de los datos que pueden extraerse de la gráfica, hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas por el motor.

b) Compensar la potencia reactiva consumida por el motor, indicando qué elemento colocaría, cómo lo conectaría y qué valor tendría que tener.

c) Hallar los valores de R y L que representen el modelo eléctrico del motor.

Solución

Problema 1 (13 puntos)



a) Considere un transformador ideal, caracterizado por su relación de vueltas $\frac{n_1}{n_2}$. Si se carga el secundario con una impedancia Z_L, deducir la imepdancia vista desde el primario.

Sean v_1 y v_2 las tensiones de primario y secundario, medidas desde los puntos. Sean i_1 e i_2 las corrientes del primario y secundario, entrantes por los puntos. Las ecuaciones del transformador ideal son las siguientes:

$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2} \quad , \quad n_1.i_1 + n_2.i_2 = 0$$

Trabajemos en fasores. Si se conecta una impedancia Z_L en el secundario, se tiene, por Ley de Ohm, que

$$V_2 = -Z_L.I_2$$

donde el signo de - se debe a que la corriente I_2 se asumión entrando al transformador por el punto respectivo. Por otro lado, la impedancia vista desde el primario es

$$Z_{v1} = \frac{V_1}{I_1}$$

Usando las ecuaciones del transformador, podemos escribir Z_{v1} sĺo en función de las magnitudes del secundario:

$$Z_{v1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{n_1}{n_2}.V_2}{-\frac{n_2}{n_1}.I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(-\frac{V_2}{I_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 .Z_L$$

Por lo tanto, desde el primario, se ve la impedancia conectada al secundario, multiplicada por el cuadrado de la relación de vueltas entre el primario y el secundario.

b) ¿Si se carga el primario con una impedancia Z, cuál sería la impedancia vista desde el secundario?

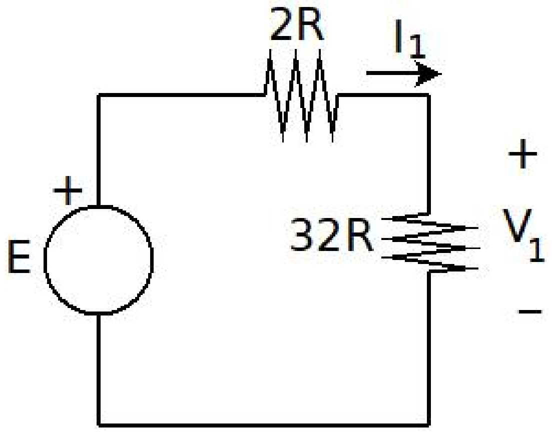
Observando la *simetría* del transformador ideal, es como intercambiar el primario con el secundario. La situación sería similar a lo ya analizado, cambiando la relación de vueltas:

$$Z_{v2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 .Z_L$$

c) En el circuito de la figura, el transformador ideal tiene $\frac{n_1}{n_2} = 4$. Hallar el equivalente de Thévenin.

Para hallar el equivalente de Thévenin, debemos hallar la tensión de vacío V_{Th} (definida como la tensión entre A y B cuando no se extrae corriente del circuito) y la impedancia vista Z_{Th} (definida como la impedancia equivalente entre A y B cuando se anulan las fuentes independientes del circuito).

Para hallar la tensión de vacío, dejamos abierto los puntos A y B (sin nada conectado entre ellos por fuera de la caja negra) y calculamos la tensión del secundario del transformador ideal. Observemos que dicho transformador tiene una resistencia R conectada en el secundario. Por la parte anterior, podemos pensar una situación equivalente pasando la impedancia al primario y eliminando el transformador. Como la relación de transformación vale $\frac{n_1}{n_2} = 4$, el circuito equivalente se ve en la figura: Podemos hallar V_1 simplemente aplicando un divisor



de tensión:

$$V_1 = \frac{32R}{2R + 32R}.E = \frac{32}{34}.E = \frac{16}{17}.E$$

La tensión del secundario, que será la tensión de vacío, vale:

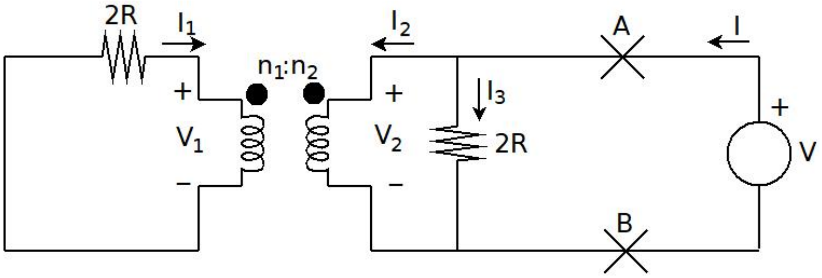
$$V_{Th} = V_2 = \frac{n_2}{n_1}.V_1 = \frac{1}{4}.\frac{16}{17}.E = \frac{4}{17}.E$$

Para hallar la impedancia vista Z_{Th}, volvemos al circuito original, anulamos la fuente independiente de valor E (la sustituimos por una fuente de tensión de valor nulo) y calculamos la impedancia vista desde los bornes A y B. Hay varias formas de hacer esto.

Una forma es aplicar el procedimiento asociado a la definición de la impedancia vista: anulamos las fuentes independientes, colocamos una fuente externa de valor V y calculamos la corriente I que la caja negra le consume a dicha fuente. Nos guiamos por la siguiente figura: Con la notación de la figura, tenemos que:

$$I = I_2 + I_3 = I_2 + \frac{V}{2R}$$

$$V = V_2 = \frac{n_2}{n_1}.V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{n_1}{n_2}.V$$



$$V_1 = -2R.I_1 = \frac{n_1}{n_2}.V \Rightarrow I_1 = -\frac{n_1}{n_2}.\frac{V}{2R}$$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{n_1}{n_2}.I_1 = \left(-\frac{n_1}{n_2}\right).\left(-\frac{n_1}{n_2}\right).\frac{V}{2R} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2.\frac{V}{2R} = 16.\frac{V}{2R} = 8.\frac{V}{R}$$

Entonces

$$I = 8.\frac{V}{R} + \frac{1}{2}.\frac{V}{R} = \left[8 + \frac{1}{2}\right].\frac{V}{R} = \frac{17}{2}.\frac{V}{R} \Rightarrow Z_{Th} = \frac{2}{17}.R$$

Otra forma es observar al anular la fuente independiente, nos queda la resistencia de valor $2R$ *en paralelo* con el transformador, que a su vez tiene una resistencia de valor $2R$ conectada en su primario. Acá podemos hacer más de una cosa. Podemos volver a pasar la resistencia del secundario al primario y observar que ahora tenemos dos resistencias en paralelo, una de valor $2R$ y la otra de valor $32R$. Este paralelo vale

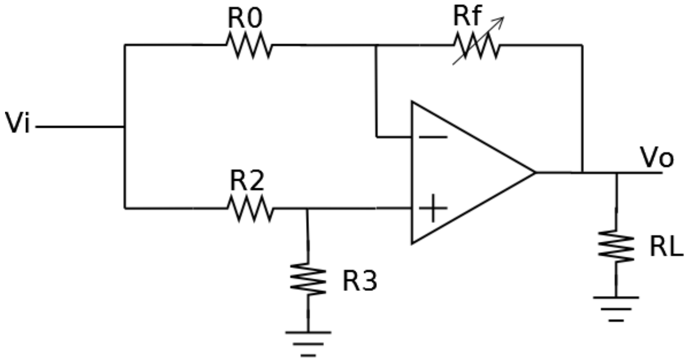
$$\frac{2R.32R}{2R + 32R} = \frac{64}{34}.R = \frac{32}{17}.R$$

Esta resistencia equivalente conectada en el primario, puede pasarse al secundario y eliminar así el transformador. Hay que usar la relación de transformación inversa a la hallada en la parte a):

$$Z_{Th} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.\frac{32}{17}.R = \frac{1}{16}.\frac{32}{17}.R = \frac{2}{17}.R$$

Problema 2 (10 puntos)

En el circuito de la figura, la resistencia R_f es variable y el operacional, ideal, está alimentado por fuentes de $\pm 15V$. Se cumple que $R_0 = R_3 = 1,5k\Omega$, $R_2 = 5R_0$, $R_L = 4R_0$, $V_i = 30V$.



a) Asumiendo que el operacional funciona en zona lineal, expresar V_o en función de V_i.

Como el operacional está en zona lineal, tenemos el cortocircuito virtual de las patas + y - ($e^+ = e^+$) y no circula corriente por estos terminales. Notemos que podemos obtener e^+ en función de V_i aplicando un divisor de tensión:

$$e^+ = \frac{R_3}{R_2 + R_3}.V_i = e^-$$

Podemos expresar e^- en función de V_i y V_o:

$$\frac{V_i - e^-}{R_0} = \frac{e^- - V_o}{R_f} \Rightarrow \frac{V_i}{R_0} - e^-.\left[\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_f}\right] = -\frac{V_o}{R_f}$$

$$\Rightarrow \frac{V_i}{R_0} - e^-.\left[\frac{R_f + R_0}{R_0.R_f}\right] = -\frac{V_o}{R_f}$$

$$\Rightarrow \frac{V_i}{R_0} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}.V_i.\left[\frac{R_f + R_0}{R_0.R_f}\right] = -\frac{V_o}{R_f}$$

$$\Rightarrow V_i.\left[\frac{1}{R_0} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}.\left(\frac{R_f + R_0}{R_0.R_f}\right)\right] = -\frac{V_o}{R_f}$$

$$\Rightarrow V_o = -\left[\frac{R_f}{R_0} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}.\left(\frac{R_f + R_0}{R_0}\right)\right].V_i = -\left[\frac{R_f}{R_0} - \frac{R_0}{5R_0 + R_0}.\left(\frac{R_f + R_0}{R_0}\right)\right].V_i$$

$$\Rightarrow V_o = -\left[\frac{R_f}{R_0} - \frac{1}{6}.\left(\frac{R_f}{R_0} + 1\right)\right].V_i = -\left[\frac{5}{6}.\frac{R_f}{R_0} - \frac{1}{6}\right].V_i = \left[\frac{1}{6} - \frac{5}{6}.\frac{R_f}{R_0}\right].V_i$$

b) Hallar el rango de valores de R_f que hacen saturar al operacional.

El operacional va a satura cuando la salida alcance los límites impuestos por las fuentes $\pm V_{CC}$. Entonces, se debe cumplir que

$$V_o = \left[\frac{1}{6} - \frac{5}{6}.\frac{R_f}{R_0}\right].V_i = +V_{CC} \Rightarrow 6.\frac{V_{CC}}{V_i} = 1 - 5\frac{R_f}{R_0} \Rightarrow 5.\frac{R_f}{R_0} = 1 - 6.\frac{V_{CC}}{V_i} 1 - 6.\frac{15V}{30V} = -2$$

$$\Rightarrow R_f = -\frac{2}{5}.R_0$$

Este valor negativo es absurdo, por lo que no habrá saturación a $+V_{CC}$. Por otro lado,

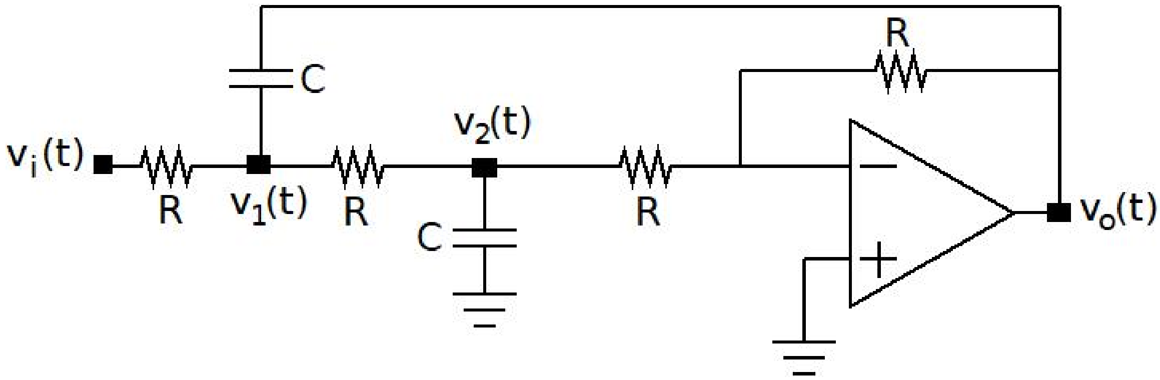
$$V_o = \left[\frac{1}{6} - \frac{5}{6}.\frac{R_f}{R_0}\right].V_i = -V_{CC} \Rightarrow -6.\frac{V_{CC}}{V_i} = 1 - 5.\frac{R_f}{R_0} \Rightarrow 5.\frac{R_f}{R_0} = 1 + 6.\frac{V_{CC}}{V_i} = 1 + 6.\frac{15V}{30V} = 4$$

$$\Rightarrow R_f = \frac{4}{5}.R_0$$

Si R_f alcanza o supera ese valor, el operacional se satura.

Problema 3 (15 puntos)

Se considera el circuito de la figura, con e amplificador operacional ideal. Se define la pulsación $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal,

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

explicando claramente cómo analiza el circuito.

Pasamos al circuito equivalente en fasores. En primer término, observamos que el circuito contiene una configuracón inversora de ganancia -1, de donde

$$V_2 = -V_o$$

Escribimos los nudos correspondientes a V_1 y V_2.

$$\frac{V_i - V_1}{R} = (V_1 - V_o).Cj\omega + \frac{V_1 - V_2}{R}$$

$$\frac{V_1 - V_2}{R} = V_2.Cj\omega + \frac{V_2}{R}$$

Notemos que a esta altura, tenemos tres ecuaciones lineales que relacionan V_i, V_1, V_2 y V_o, por lo que podemos usar dos de ellas para eliminar V_1 y V_2 y obtner una relación entre V_i y V_o.

$$\frac{V_1 - V_2}{R} = V_2.Cj\omega + \frac{V_2}{R} \Rightarrow \frac{V_1}{R} = V_2.\left[\frac{1}{R} + Cj\omega + \frac{1}{R}\right] = -V_o.\left[\frac{2 + RCj\omega}{R}\right]$$

De donde

$$V_1 = -V_o.(2 + RCj\omega)$$

Ya tenemos V_1 y V_2 en función de V_o.

$$\frac{V_i - V_1}{R} = (V_1 - V_o).Cj\omega + \frac{V_1 - V_2}{R} \Rightarrow \frac{V_i}{R} = \left[\frac{1}{R} + Cj\omega + \frac{1}{R}\right].V_1 - V_o.Cj\omega - V_2.\frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{V_i}{R} = \left[\frac{2+RCj\omega}{R}\right].V_1 - V_o.\frac{RCj\omega}{R} - V_2.\frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow V_i = (2+RCj\omega).V_1 - RCj\omega.V_o - V_2$$

Sustituimos por las expresiones de V_1 y V_2:

$$\Rightarrow V_i = -(2+RCj\omega).(2+RCj\omega).V_o - RCj\omega.V_o + V_o$$

Operamos:

$$a.V_i = -\left[4 + 4RCj\omega + R^2C^2(j\omega)^2 + RCj\omega - 1\right].V_o$$

$$\Rightarrow V_i = -\left[R^2C^2(j\omega)^2 + +5RCj\omega + 3\right].V_o$$

De donde

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{3+5RCj\omega + R^2C^2(j\omega)^2} = -\frac{1}{R^2C^2}.\frac{1}{(j\omega)^2 + \frac{5RC}{R^2C^2}(j\omega) + \frac{3}{R^2C^2}}$$

Definiendo $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, obtenemos

$$H(j\omega) = -\frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 5\omega_0(j\omega) + 3\omega_0^2}$$

b) Hallar la respuesta en régimen del circuito para la entrada:

$$v_i(t) = A.\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Sabemos que la respuesta en régimen será:

$$v_o(t) = A.|H(j\omega_0)|.\cos\left[\omega_0 t + \frac{\pi}{4} + arg\, H(j\omega_0)\right]$$

Hallemos entonces el número complejo $H(j\omega_0)$:

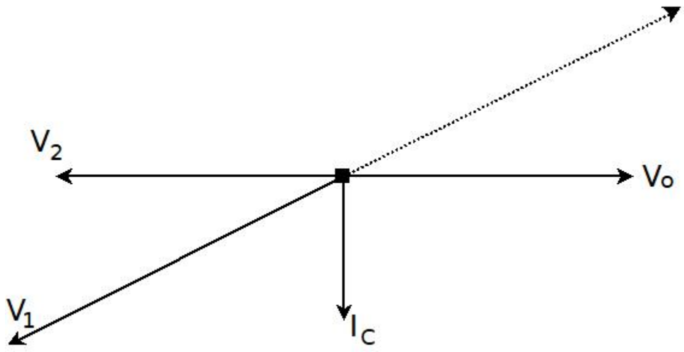
$$H(j\omega_0) = -\frac{\omega_0^2}{(j\omega_0)^2 + 5\omega_0(j\omega_0) + 3\omega_0^2} = -\frac{1}{-1+j5+3} = -\frac{1}{2+j5} \approx 0.18\angle 1,95$$

De donde,

$$v_o(t) = 0,18.A.\cos\left[\omega_0 t + \frac{\pi}{4} + 1,95\right]$$

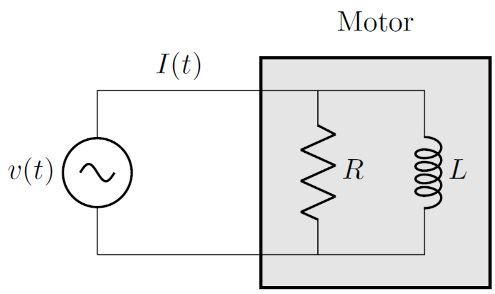
c) Para lo analizado en la parte b), dibujar cualitativamente en un mismo diagrama fasorial, los fasores V_1, V_o, V_2 y la corriente I_C que circula por el condensador a tierra, tomando como referencia V_o.

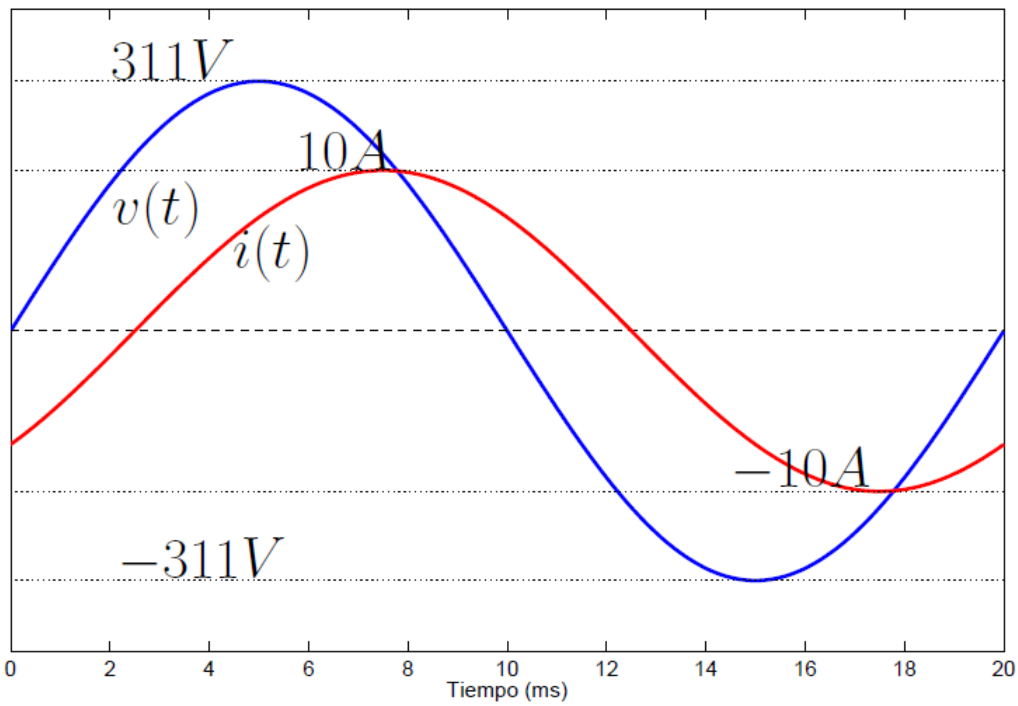
Al ser cualitativo, no necesitamos calcular los fasores de interés. Mirando el circuito y las ecuaciones planteadas antes, vemos que los fasores V_2 y V_o son opuestos, I_C es perpendicular a V_2, con adelanto de 90 grados y V_1 está retrasado más de 90 grados respecto de V_o.



Problema 4 (12 puntos)

Se considera un motor funcionando en régimen sinusoidal. En la figura se muestra un modelo para representar la impedancia del motor.





a) A partir de los datos que pueden extraerse de la gráfica, hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas por el motor.

Las gráficas muestran dos señales sinusoidales, de frecuencia $50Hz$, ya que el periodo es $T = 20ms$. Esto da una pulsación de $\omega_0 = 100\pi$. La amplitud de la tensión es $311V$, por lo que su valor eficaz será de $\frac{311}{\sqrt{2}} \approx 220V$. Por otra parte, el valor eficaz de la corriente es de $7,07A$. El retardo entre ambas señales es de aproximadamente $\tau = 2,5ms$, lo que está asociado a un desfasaje $\varphi = \omega_0\tau \approx \frac{\pi}{4} = 45^o$, de tipo inductivo. La impedancia asociada al motor se obtiene de la identidad fasorial

$$V_M = Z_M.I_M$$

donde $V_,$ e I_M son los fasores asociados a las señales de la figura. Entonces

$$Z_M = \frac{311}{10}\angle\frac{\pi}{4}\Omega$$

Observemos que dado el argumento de Z_M, las potencias activas y reactivas consumidas por el motor serán de la misma magnitud. Aplicando algunas de las fórmulas vistas en el curso, llegamos a

$$P_M = V_{Meff}.I_{Meff}.\cos(\varphi) = \frac{311 \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{311 \times 10 \times \sqrt{2}}{4} \approx 1,1\,kW$$

De donde

$$Q_M \approx 1,1\,kVAR$$

(¡¡¡La reactiva es positiva porque la carga es inductiva!!!)

El vector volt-ampere es

$$S_M = P_M + jQ_M = 1,1.(1+j)\,VA$$

b) Compensar la potencia reactiva consumida por el motor, indicando qué elemento colocaría, cómo lo conectaría y qué valor tendría que tener.

Para compensar la reactiva consumida por el motor, colocamos un condensador en paralelo con el motor, que aporte exactamente la reactiva que consume el motor. Al conocer la tensión en bornes del condensador, tenemos que

$$Q_C = -\left(\frac{311}{\sqrt{2}}\right)^2.C\omega_0\,VAR = -Q_M \Rightarrow C = \frac{2.Q_M}{311^2\omega_0}F \approx 72\mu F$$

c) Hallar los valores de R y L que representen el modelo eléctrico del motor.

Al tener un modelo paralelo de la impedancia y conocer la tensión en bornes y las potencias, directamente obtenemos las expresiones siguientes:

$$P_M = \frac{V_{Meff}^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V_{Meff}^2}{P_M} = \frac{\left(\frac{311}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{311\times10\times\sqrt{2}}{4}} = \frac{311^2}{2}.\frac{4}{311\times 10\times\sqrt{2}} \approx \sqrt{2}.\frac{311}{10}\Omega = 44\Omega$$

Dado el argumento de Z_M, $R = L\omega_0$. Entonces

$$L \approx \frac{44}{100\pi}H$$