Teoría de circuitos

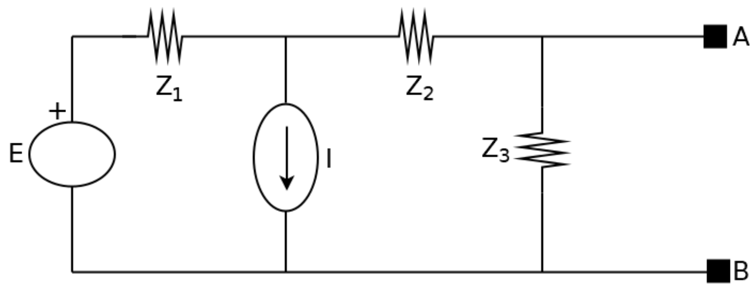
Primer parcial

2^o semestre 2021

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SER PROLIJO Y EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS. Expresar sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Todos los operacionales son ideales. Se sugiere explicar bien cómo los analiza en los circuitos.**

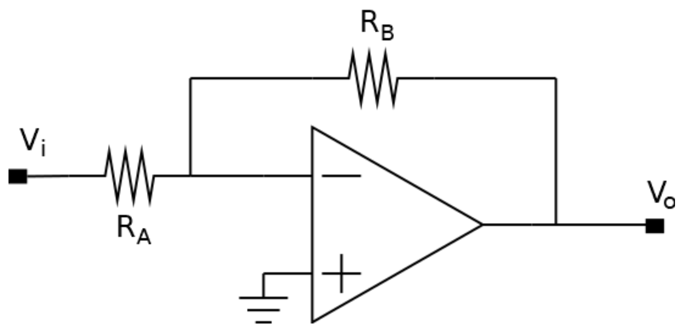
Problema 1 (10 puntos)



a) En el circuito en fasores de la figura, se pide hallar el equivalente de Thévenin entre A y B.

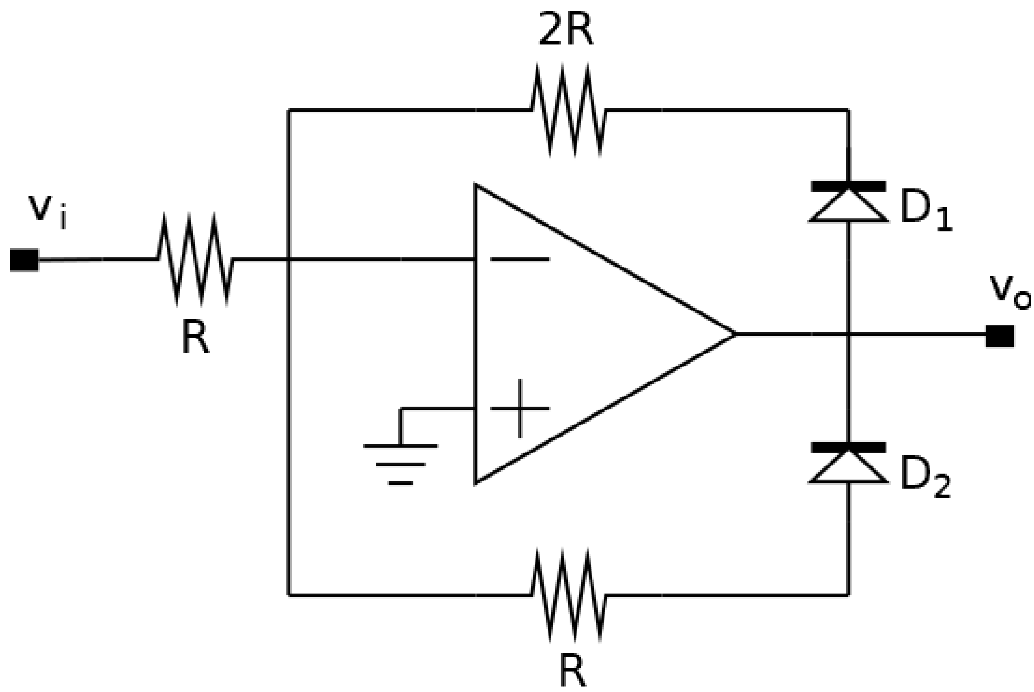
b) Se quiere cargar el circuito de forma tal de extraerle la máxima potencia activa posible. Indicar, sin demostrar, cuál es la carga Z_L que se debe colocar.

Problema 2 (10 puntos)



a) En el circuito de la figura, hallar la tensión de salida v_o en función de la tensión de entrada v_i y las resistencias R_A y R_B. Explicar claramente cómo se analiza el operacional.

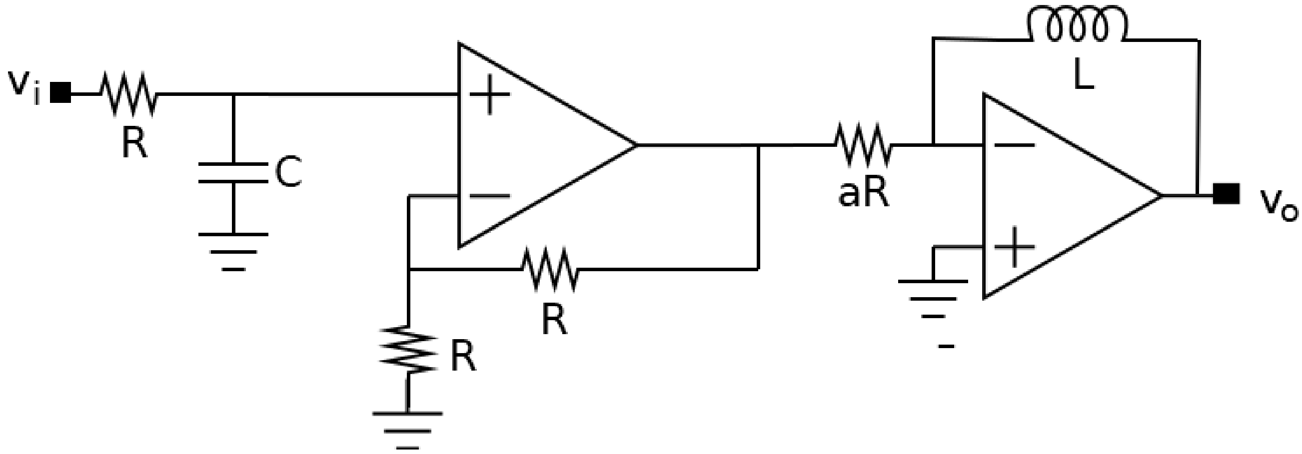
b) Se considera ahora el siguiente circuito, con el operacional, funcionando en zona lineal, y los diodos ideales. Explicando claramente el funcionamiento de los diodos, **hallar la expresión temporal** de la salida v_o, para la entrada es $v_i(t) = A\cos(t)$. Realizar una **gráfica** de dicha señal. Se sugiere analizar qué pasa en un periodo.



c) ¿Qué puede suceder en el circuito si la amplitud de la sinusoide de entrada es muy grande?

Problema 3 (20 puntos)

Se considera el circuito en régimen de la figura.

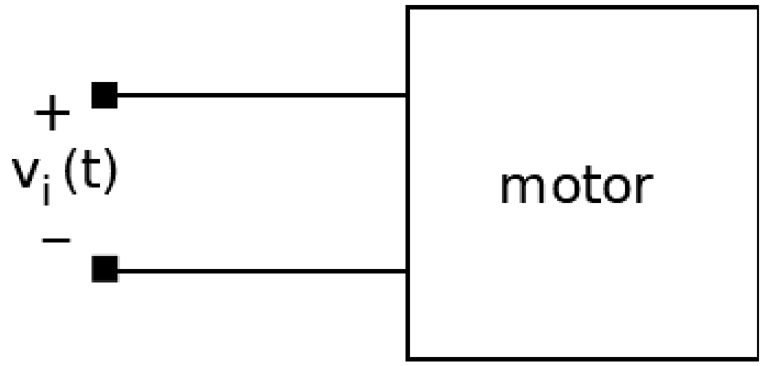


a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal, en función de los parámetros del circuito.

b) Sabiendo que $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0$, simplificar la expresión hallada y deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos, explicando claramente cómo lo hace.

c) Hallar a para que a la frecuencia de trabajo ω_0 el circuito introduzca una ganancia exacta de $20dB$.

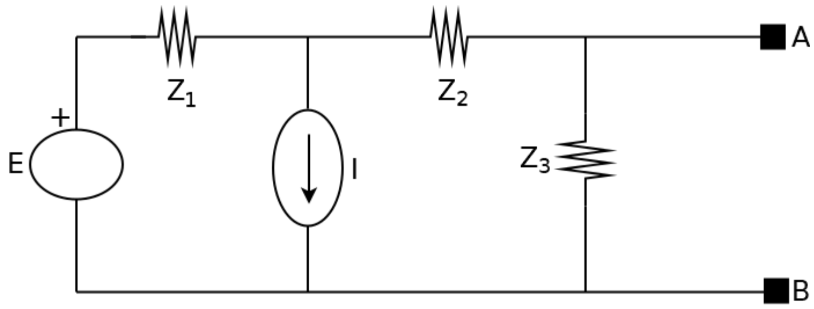
Problema 4 (10 puntos)



El circuito de la figura muestra un motor en régimen sinusoidal alimentado por una fuente de $50Hz$ y $230V$ eficaces. Se sabe que el motor consume $850W$, con un factor de potencia de 0.75, inductivo. Se pretende compensar la reactiva que consume el motor. Diseñar la compensación, explicando el proceso e indicando qué elemento colocaría, de qué valor y cómo lo conectaría.

Solución

Problema 1 (10 puntos)



a) En el circuito en fasores de la figura, se pide hallar el equivalente de Thévenin entre A y B.

Para hallar el equivalente pedido, calculamos primero la tensión de vacío V_{Th}, cuando no se extrae corriente por A, es decir. En ese caso, V_{Th} es la caida en Z_3, que puede obtenerse a partir de la caida en la fuente de corriente (V_I), haciendo un divisor de tensión entre Z_2 y Z_3. Para hallar V_I, planteamos el nudo y obtenemos

$$\frac{E-V_I}{Z_1} = I + \frac{V_I}{Z_2+Z_3} \Rightarrow \frac{E}{Z_1} - I = V_I.\left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2+Z_3}\right] = V_I.\left[\frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_1(Z_2+Z_3)}\right]$$

De donde

$$V_I = \left[\frac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3}\right].\left[\frac{E}{Z_1} - I\right] = \left[\frac{Z_2+Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}\right].[E - Z_1.I]$$

Haciendo el divisor de tensión, obtenemos

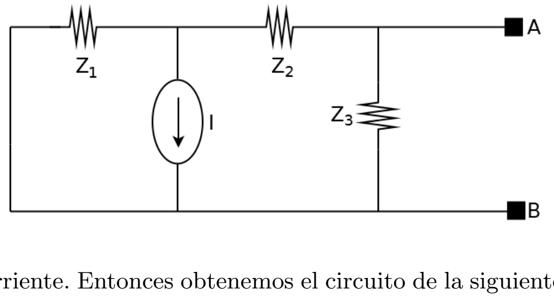
$$V_{Th} = \frac{Z_3}{Z_2+Z_3}.V_I = \frac{Z_3}{Z_2+Z_3}.\frac{Z_2+Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}.[E - Z_1.I] \Rightarrow \boxed{V_{Th} = \frac{Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}.[E - Z_1.I]}$$

El mismo resultado puede obtenerse superponiendo los efectos de las fuentes independientes. Si hacemos superposición, tenemos que considerar dos circuitos. El primero viene de anular la fuente de tensión.

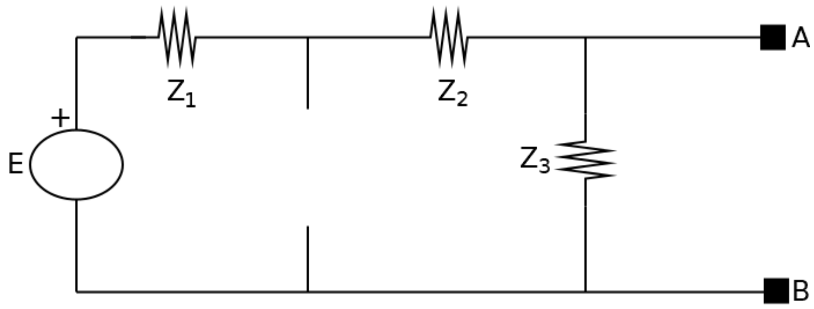
Denotemos por I_1 la corriente por R_1 e I_2 la corriente por R_2 y R_3, de forma tal que $I_1 + I_2 = -I$. Entonces

$$Z_1.I_1 = (Z_2+Z_3).I_2 \Rightarrow -Z_1.(I+I_2) = (Z_2+Z_3).I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{Z_1}{Z_1+Z_2+Z_3}.I$$

$$\Rightarrow V_{Th_I} = Z_3.I_2 = -\frac{Z_3Z_1}{Z_1+Z_2+Z_3}.I$$



Anulemos ahora la fuente de corriente. Entonces obtenemos el circuito de la siguiente figura. Aplicando divisor de tensión,



obenemos la identidad

$$V_{Th_E} = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}.E$$

Sumando V_{Th_I} y V_{Th_E} recuperamos la expresión hallada anteriormente.

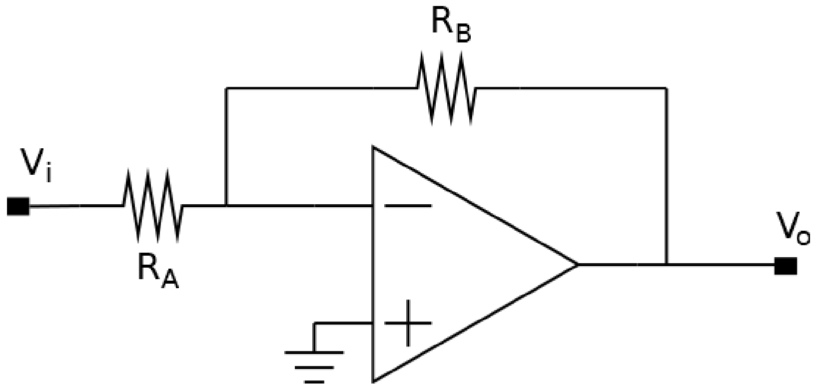
Para completar el equivalente de Thévenin, tenemos que hallar la impedancia vista Z_{Th}. Para ello anulamos las fuentes independientes y calculamos la impedancia resultante entre los bornes A y B, mirando hacia el circuito. En este caso, queda directamente

$$\boxed{Z_{Th} = Z_3||(Z_1 + Z_2) = \frac{(Z_1 + Z_2).Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}}$$

b) Se quiere cargar el circuito de forma tal de extraerle la máxima potencia activa posible. Indicar, sin demostrar, cuál es la carga Z_L que se debe colocar.

Por lo visto en el teórico, sabemos que se debe cumplir que $Z_L = \overline{Z_{Th}}$.

Problema 2 (10 puntos)



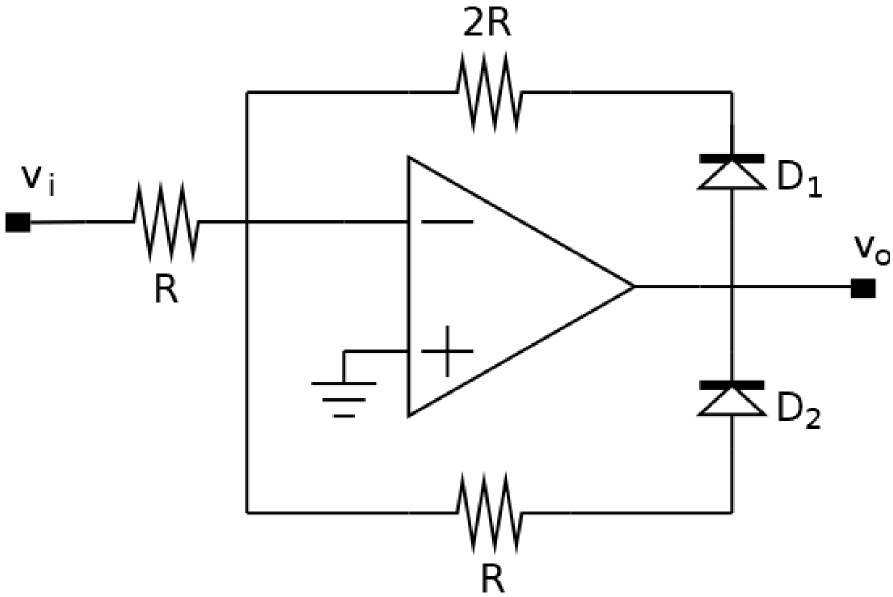
a) En el circuito de la figura, hallar la tensión de salida v_o en función de la tensión de entrada v_i y las resistencias R_A y R_B. Explicar claramente cómo se analiza el operacional.

Observemos que el operacional está realimentado por la pata -. Por ser ideal, tiene resistencia de entrada infinita, lo que implica que no entra corriente por sus patas + y -. Además, por la ganancia infinita, tenemos el cortocircuito virtual de las patas de entrada, por lo que en la pata - tenemos, en este caso, tierra virtual.

Ya sabemos del teórico que es una configuración inversora. Hagamos las cuentas. Planteando el nudo en la pata -, obtenemos la relación:

$$\frac{V_i - 0}{R_A} = \frac{0 - V_o}{R_B} \Rightarrow V_o = -\frac{R_B}{R_A}.V_i$$

Como vemos, la entrada y la salida son de signos opuestos.



b) Se considera ahora el siguiente circuito, con el operacional y los diodos ideales. Explicando claramente el funcionamiento de los diodos, hallar la expresión temporal de la salida v_o cuando la entrada es $v_i(t) = A\cos(t)$. Se sugiere analizar qué pasa en un periodo.

En primer lugar, notemos que si al menos uno de los diodos conduce, el operacional queda realimentado por su pata - y vamos a tener tierra virtual en dicha pata. En segundo lugar, miremos las ramas que contienen los diodos. Notamos que ambas conectan la pata - con la salida, con los diodos apuntando hacia lados distintos, por lo que ambos diodos no pueden conducir al mismo tiempo. Verifiquemos bien esto. Al referirnos a la tensión en bornes y la corriente de los diodos (V_{D_1}, I_{D_1}, V_{D_2}, I_{D_2}), asumiremos la convención de signos estándar.

Siguiendo la sugerencia, consideremos el caso en que $v_i(t)$ es positivo, la corriente que viene desde la entrada vale $I_i = \frac{v_i}{R} > 0$. El único camino que puede seguir esa corriente es a través de la rama que contiene el diodo D_2, por lo que vamos a suponer D_2 ON y D_1 OFF y lo verificaremos. La verificación de que D_2 conduce es inmediata, ya que con la convención de signos adoptada, tenemos que

$$I_{D_2} = I_i = \frac{v_i}{R} > 0$$

Para ver que efectivamente D_1 está cortado, notemos que su tensión en bornes vale $V_{D_1} = v_o(t) - e^- = v_o(t)$. Al conducir D_2, el operacional está en una configuración inversora como la de la parte a), con ganancia -1, por lo que $v_o(t) = -v_i(t)$, de donde $V_{D_1} = -v_i(t) < 0$.

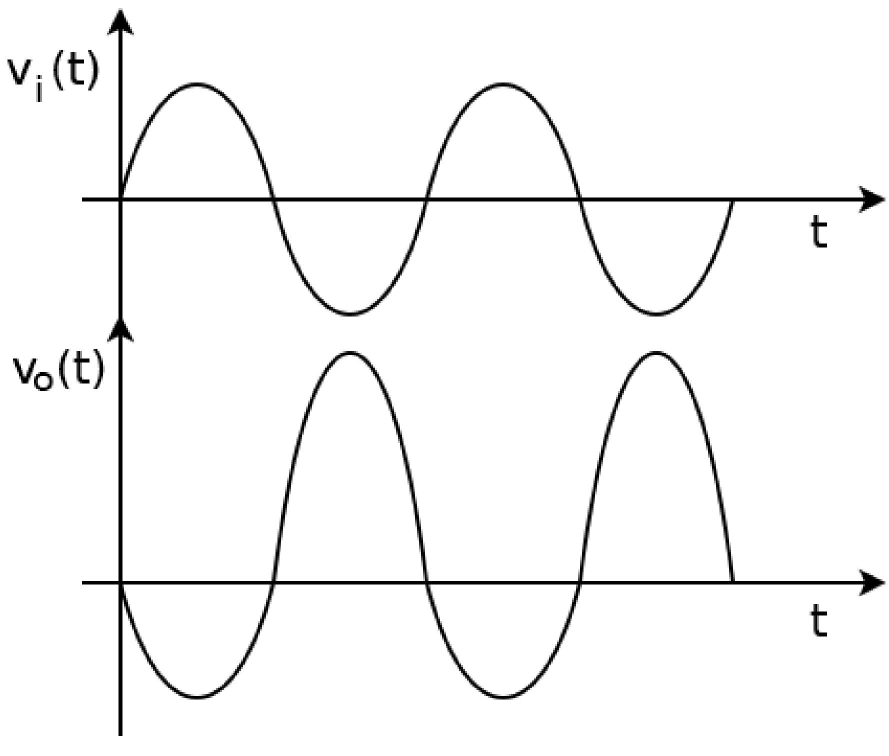
Tenemos un análisis similar cuando la entrada es de signo negativo. En este caso $I_i = \frac{v_i}{R} < 0$. Ahora suponemos D_1 ON y D_2 OFF. En este caso, el circuito es nuevamente una configuración inversora, ahora con ganancia -2, por lo que $v_o(t) = -2.v_i(t)$.

Observemos que v_o es positivo!!!. Verifiquemos las suposiciones sobre los diodos. Ver que D_1 conduce es inmediato, ya que

$$I_{D_1} = -I_i = -\frac{v_i}{R} > 0$$

Para ver que D_2 está cortado, notemos que su tensión en bornes vale $V_{D_2} = e^- - v_o(t) = 2.v_i(t) < 0$.

Resumiendo, cuando la entrada es positiva, la salida es la entrada multiplciada por -1, y cuando la entrada es negativa, la salida es la entrada multiplicada por -2.

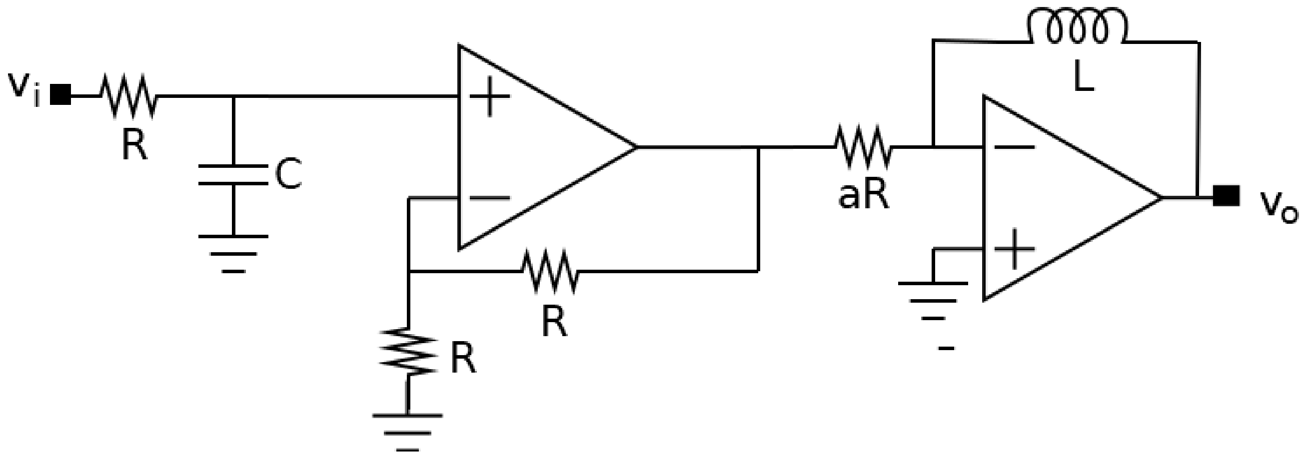


c) ¿Qué puede suceder en el circuito si la amplitud de la sinusoide de entrada es muy grande?

El análisis de la parte anterior se hizo suponiendo el operacional en zona lineal. Esto implica que no se considera el efecto de saturación, es decir, el fenómeno que ocurre cuando la salida del operacional alcanza su valor máximo o mínimo admisible. Si la amplitud de la sinusoide es suficientemente grande, se va a dar la saturación. Si suponemos el operacional alimentado con fuentes de $\pm V_{CC}$, la amplitud mínima de la entrada que satura al operacional es de $\frac{V_{CC}}{2}$.

Problema 3 (20 puntos)

Se considera el circuito en régimen de la figura.



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal, en función de los parámetros del circuito.

En primer lugar, pasamos al circuito equivalente en fasores, introduciendo las impedancias de las distintas componentes. Denotemos por **1** al operacional de la izquierda y por **2** al de la derecha. Observemos que el primer operacional está en una configuración no inversora, de ganancia 2, en tanto el otro está en una configuración inversora, de ganancia $-\frac{Lj\omega}{aR}$ (esto puede verificarse en seguida haciendo el análisis concreto). Para propagar la entrada al resto del circuito, hacemos un divisor de tensión.

$$e_1^- = V_i.\frac{\frac{1}{Cj\omega}}{R+\frac{1}{Cj\omega}} = V_i.\frac{1}{1+RCj\omega}$$

Por lo visto antes, la tensión e_1^- se duplica a la salida del primer operacional y es la entrada de la etapa inversora que sigue. Por lo tanto,

$$V_o = -\frac{Lj\omega}{aR}.2e_1^- = -\frac{2Lj\omega}{aR}.\frac{1}{1+RCj\omega}.V_i \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = -\frac{2Lj\omega}{aR(1+RCj\omega)}}$$

b) Sabiendo que $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0$, simplificar la expresión hallada y deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos, explicando claramente cómo lo hace.

Podemos re-escribir la transferencia como sigue:

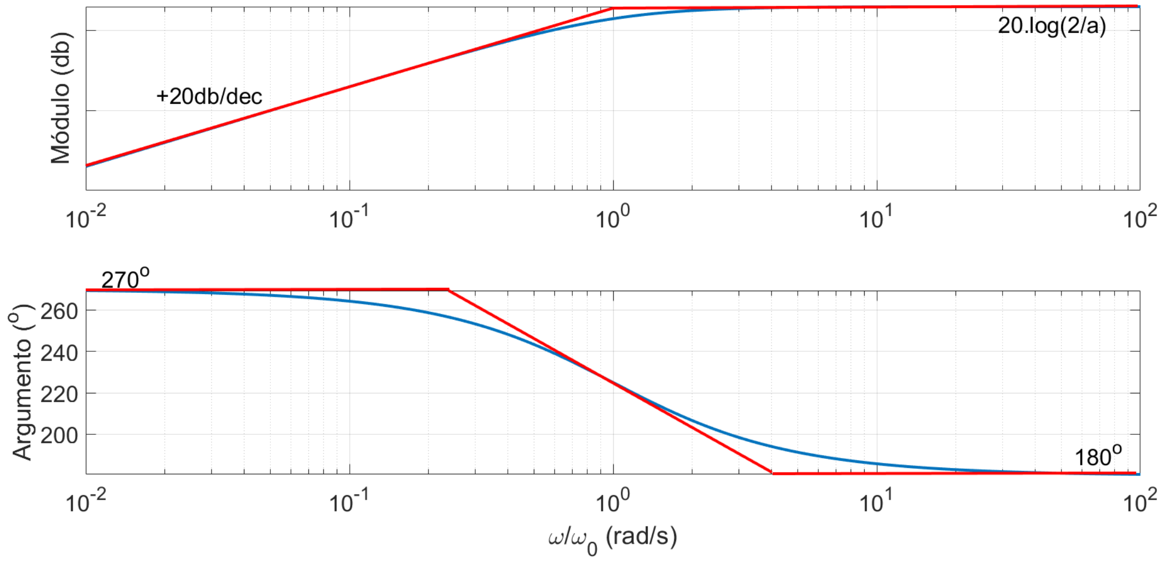
$$H(j\omega) = -\frac{2\frac{1}{RC}}{a\frac{R}{L}}\frac{j\omega}{j\omega+\frac{1}{RC}} = -\frac{2\omega_0}{a\omega_0}.\frac{j\omega}{j\omega+\omega_0} = -\frac{2}{a}\frac{j\omega}{j\omega+\omega_0}$$

La transferencia es real racional de primer orden. Para obtener los diagramas de Bode asintóticos, identificamos primero las frecuencias crtícas del numerador y el denominador. En el numerador tenemos una raíz nula, en tanto en el denominador tenemos una raíz en $-\omega_0$. Entonces, para el análisis asintótico tenemos solamente dos bandas, las frecuencias mucho menores y mucho mayores a ω_0.

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{2}{a}\frac{j\omega}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} & \approx & 20.log(\omega) + 20.log\left(\frac{2}{a\omega_0}\right) \\ arg(H(j\omega)) & \approx & -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{2}{a}\frac{j\omega}{j\omega} = -\frac{2}{a} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} & \approx & 20.log\left(\frac{2}{a}\right) \\ arg(H(j\omega)) & \approx & \pm\pi \end{cases}$$

Al ser términos de primer orden, cada uno solamente puede aportar $\pm\pi/2$. En baja frecuencia elegimos arrancar en $-\frac{\pi}{2}$, por lo que en alta frecuencia solamente podemos alcanzar los valores 0 o $-\pi$. Observando los valores posibles, concluimos que la fase disminuye desde $-\frac{\pi}{2}$ hacia $-\pi$. La figura siguiente resume lo anterior (ya se incluyeron los diagramas reales).



c) Hallar a para que a la frecuencia de trabajo ω_0 el circuito introduzca una ganancia exacta de $20dB$.

Sabemos que la respuesta en régimen ante una entrada sinusoidal de la forma $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ es

$$v_o(t) = A.|H(j\omega_0)|.\cos\left(\omega_0 t + \varphi + arg\ H(j\omega_0)\right)$$

Entonces, a la frecuencia de trabajo indicada, el circuito introduce la ganancia

$$|H(j\omega_0)| = \frac{2}{a}.\frac{\omega_0}{|j\omega_0 + \omega_0|} = \frac{2}{a}.\frac{1}{|j+1|} = \frac{2}{a}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{a}$$

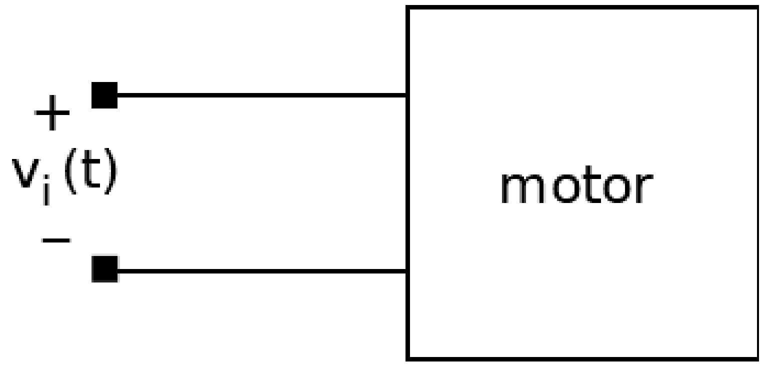
Para tener una ganancia de $20dB$, debe ser

$$20.log(|H(j\omega_0)|) = 20dB \Leftrightarrow log(|H(j\omega_0)|) = 1 \Leftrightarrow |H(j\omega_0)| = 10$$

De donde

$$10 = \frac{\sqrt{2}}{a} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{2}}{10}}$$

Problema 4 (10 puntos)



El circuito de la figura muestra un motor en régimen sinusoidal alimentado por una fuente de $50Hz$ y $230V$ eficaces. Se sabe que el motor consume $850W$, con un factor de potencia de 0.75, inductivo. Se pretende compensar la reactiva que consume el motor. Diseñar la compensación, explicando el proceso e indicando qué elemento colocaría, de qué valor y cómo lo conectaría.

Sabemos la potencia activa que consume el motor y conocemos su factor de potencia, por lo que podemos calcular la potencia reactiva consumida. Para ello, tenemos varios caminos posibles. Mostramos uno nomás. Como el factor de potencia es inductivo, sabemos que la reactiva consumida es positiva. Además, si consideramos el triángulo (rectángulo)de potencias (S, P, Q) y aplicamos trigonometría, obtenemos

$$|S| = \frac{P}{\cos(\varphi)} = \frac{Q}{\sin(\varphi)} \Rightarrow Q = \tan(\varphi).P = \frac{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}{\cos(\varphi)}.P = \frac{\sqrt{1-0,75^2}}{0,75}.850VAR \approx 750VAR$$

Dado que la potencia reactiva consumida es positiva, debemos colocar un elemento capacitivo, para entregar reactiva. Lo conectamos en paralelo con la carga, para no afectar la tensión de alimentación del motor ni la potencia activia consumida. El valor del condensador a colocar debe ser tal que a la tensión de alimentación, entregue una reactiva igual a la que consume el motor. En fasores,

$$Q_C = -|V_i|^2 C\omega = -Q \Rightarrow |230V|^2 C 2\pi 50Hz = 750VAR \Rightarrow C = \frac{750}{100 \times \pi \times 230^2} F \approx 45\mu F$$