Teoría de circuitos

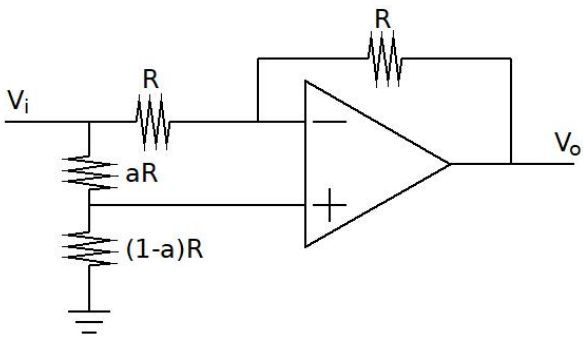
Primer parcial

2^o semestre 2020

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SER PROLIJO Y EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS. Expresar sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Todos los operacionales son ideales. Se sugiere explicar bien cómo los analiza en los circuitos.**

Problema 1 (10 puntos)



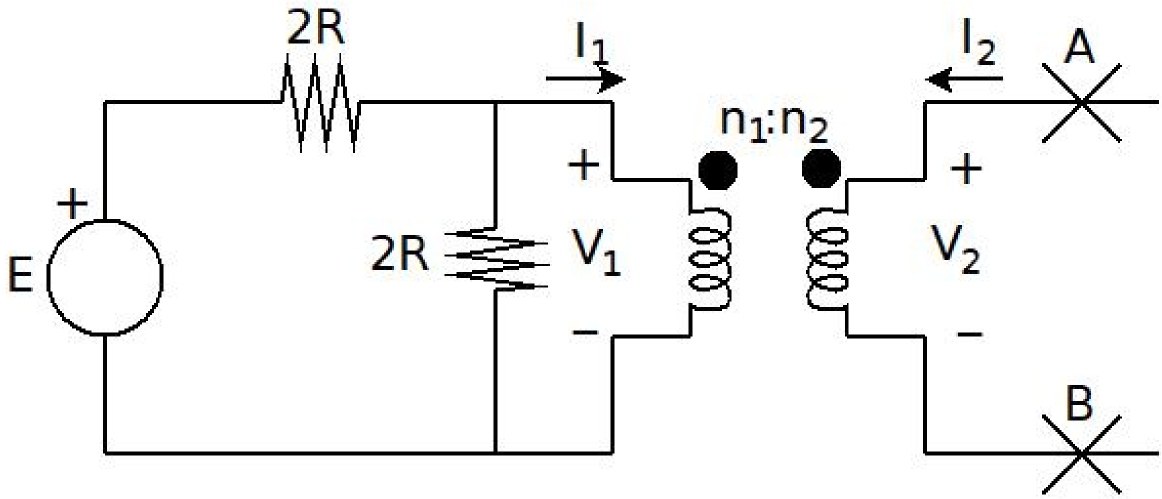
a) En el circuito de la figura, el parámetro a puede fijarse libremente en el intervalo $[0, 1]$. Hallar V_o en función de V_i y a.

b) Verificar que es posible elegir a tal que $V_o = V_i$ ó $V_o = -V_i$.

Problema 2 (10 puntos)

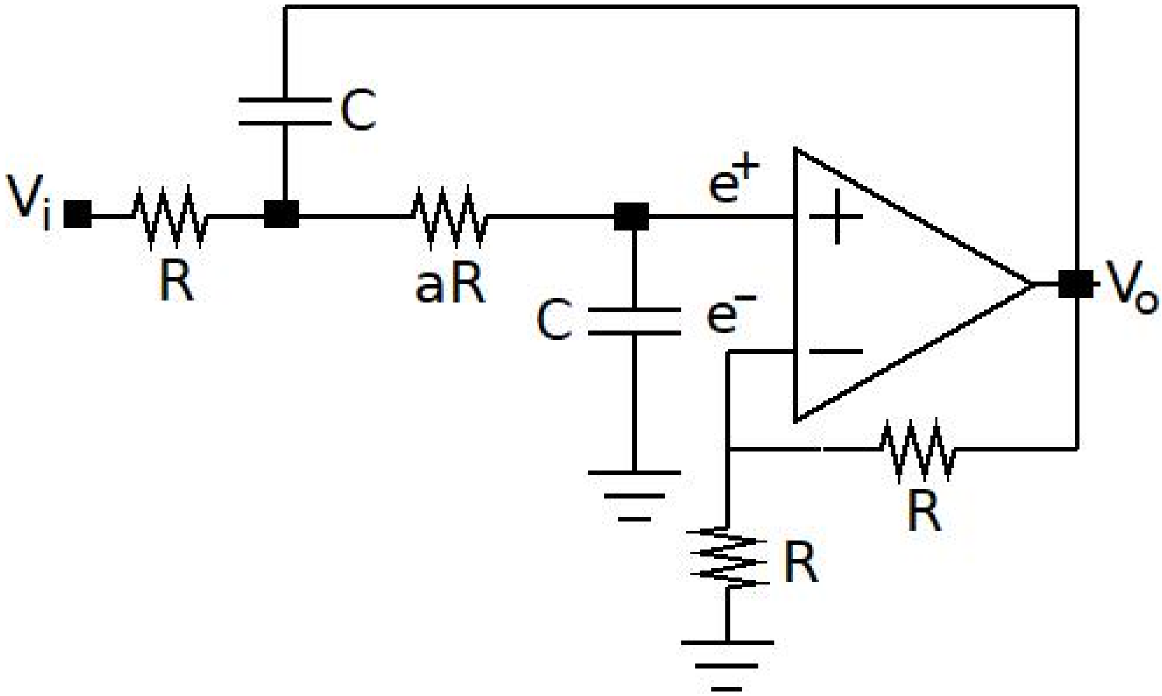
a) Se considera un transformador ideal, funcionando en régimen sinusoidal, cargado en su secundario con una impedancia de valor Z_L. **Deducir** la impedancia vista desde el primario.

b) En el circuito de la figura, hallar el equivalente de Thévenin, sabiendo que el transformador es ideal, de relación de transformación $n_1/n_2 = 3$.



Problema 3 (20 puntos)

Se considera el circuito de la figura, que implementa un filtro activo con la topología de Sallen-Key.



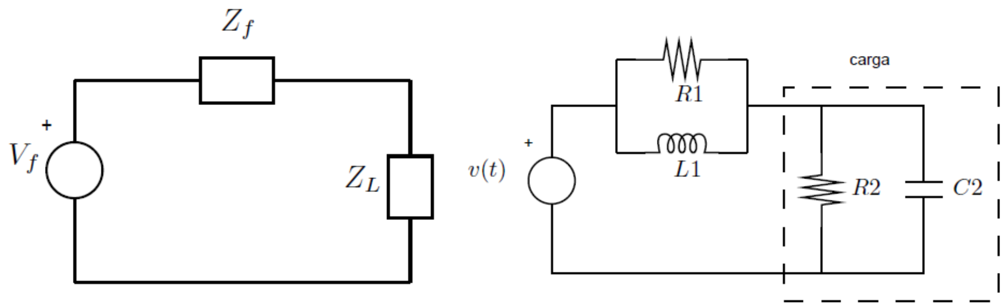
a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal. Verificar que el circuito implementa un **filtro pasabajos** de segundo orden.

b) Hallar valores posibles de R, C, y a para implementar un filtro de segundo orden con $\zeta = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = 2\pi.1kHz$.

c) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos, explicando claramente su deducción.

d) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo a la cual el circuito, al ser excitado por una señal $v_i(t) = A\cos(\omega_1 t)$, responde en régimen con una señal de la forma $v_o(t) = K.A\cos(\omega_1 t - 135^o)$, con K positivo?

Problema 4 (10 puntos)



(a) (b)

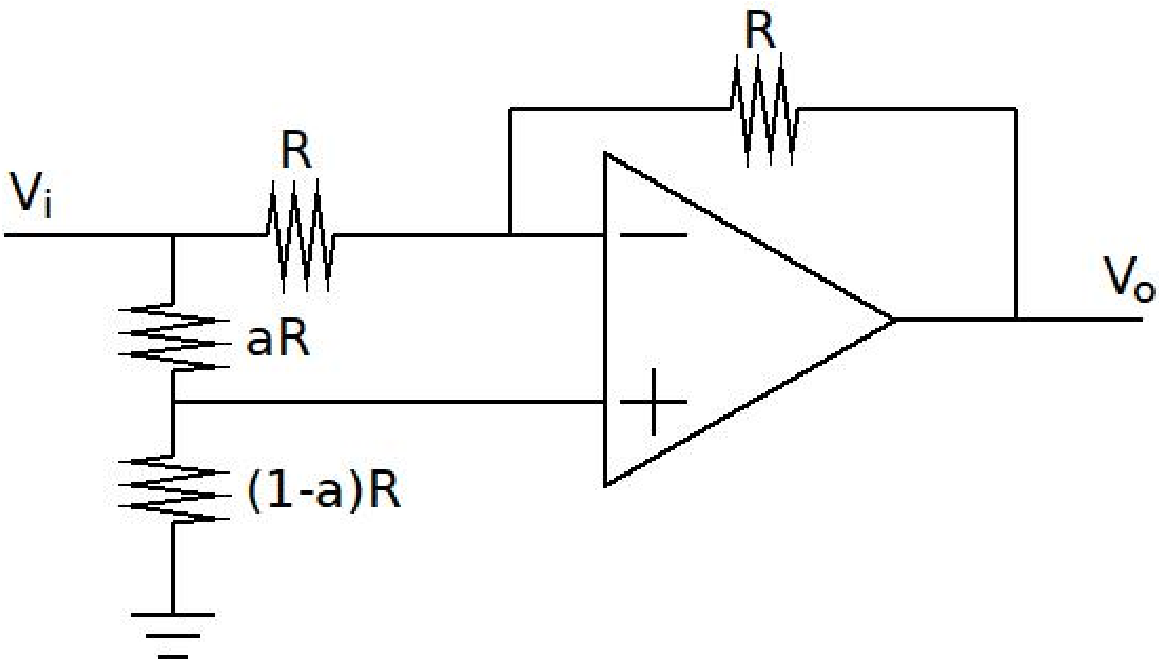
a) El circuito de la izquierda de la figura está funcionando en régimen sinusoidal. Deducir el valor que debe tener la impedancia Z_L en función de Z_f para que se disipe la máxima potencia activa posible en Z_L.

b) El circuito de la derecha está funcionando en régimen sinusoidal, con $v(t) = V_0 . \cos(\omega_0 t)$. Para $R_1 = R_2$, hallar la relación entre L_1, C_2 y ω_0 que asegure que se disipa la máxima potencia activa posible en la carga. Sugerencia: tener presente que

$$\overline{\left(\frac{1}{Z}\right)} = \frac{1}{\overline{Z}}$$

Solución

Problema 1 (10 puntos)



a) En el circuito de la figura, el parámetro a puede setearse libremente en el intervalo $[0, 1]$. Hallar V_o en función de V_i y a.

El operacional es ideal. Tenemos que no entra corriente por las patas + y −, por l aresistencia de entrada infinita. Como además funciona en zona lineal, tenemos el cortocircuito virtual de dichas patas, por la ganancia infinita.

La tensión e^+ la obtenemos haciendo un divisor de tensión:

$$e^+ = V_i.\frac{(1-a)R}{aR + (1-a)R} = (1-a).V_i = e^-$$

Planteando el nudo en la pata −, resulta que

$$\frac{V_i - e^-}{R} = \frac{e^- - V_o}{R} \Rightarrow \frac{V_i}{R} - e^-.\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = -\frac{V_o}{R}$$

$$\frac{V_i}{R} - e^-.\left(\frac{2}{R}\right) = -\frac{V_o}{R} \Rightarrow V_i - 2e^- = -V_o$$

$$\Rightarrow V_i - 2(1-a).V_i = -V_o \Rightarrow \boxed{V_o = (1-2a).V_i}$$

b) Verificar que es posible elegir a tal que $V_o = V_i$ ó $V_o = -V_i$.

Observando la expresión hallada, vemos que para $a = 1$, resulta $V_o = -V_i$. Notar que en este caso, el operacional queda en una configuración inversora, con $e^+ = 0$. Para $a = 0$, tenemos $V_o = V_i$. En este caso, tenemos $e^+ = e^- = V_i$ y no circula corriente por las resistencias de valor R.

Problema 2 (10 puntos)

a) Se considera un transformador ideal, funcionando en régimen sinusoidal, cargado en su secundario con una impedancia de valor Z_L. Hallar la impedancia vista desde el primario.

A continuación presentamos la resolución de este problema. Se sugiere hacer un dibujo del circuito para expresar bien las tensiones y corriente. Denotemos por V_1 y V_2 las tensiones del primario y del secundario respectivamente, medidas desde los puntos. Asímismo, sean I_1 e I_2 las corrientes del primario y secundario respectivamente, entrantes por los puntos. Las ecuaciones del transformador ideal nos dicen que

$$\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2} \quad , \quad n_1 I_1 + n_2 I_2 = 0$$

Estas expresiones valen tanto en el tiempo como en fasores. Trabajaremos en fasores. Supongamos que tenemos una impedancia de carga Z_L conectada en el secundario. Entonces, por la Ley de Ohm en fasores, sabemos que

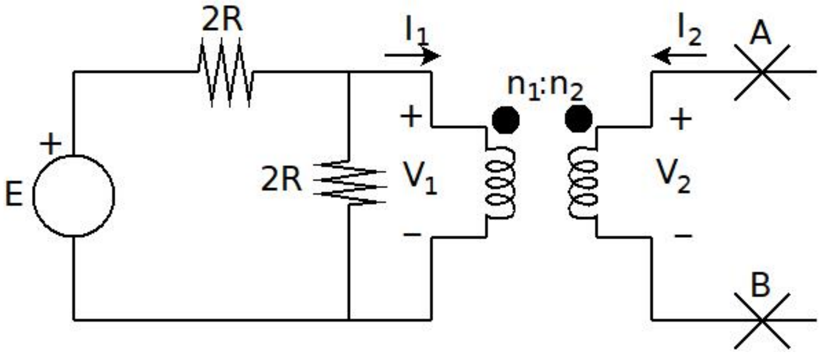
$$Z_L = -V_2.I_2$$

donde el signo de $-$ viene de que I_2 es entrante por el punto.

La impedancia vista del lado del primario es, por definición,

$$Z_{v1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{n_1}{n_2} V_2}{-\frac{n_2}{n_1} I_1} = \frac{n_1^2}{n_2^2} . \left(\frac{V_2}{-I_2} \right) = \frac{n_1^2}{n_2^2} . Z_L$$

Por lo que la impedancia vista del lado del primario es la impedancia de carga del secundario, multiplicada por la relacióno de transformación al cuadrado.



b) En el circuito de la figura, hallar el equivalente de Thévenin, sabiendo que el transformador es ideal, de relación de transformación $n_1/n_2 = 3$.

Para obtener el equivalente de Thévenin, hallamos primero la tensión de vacío, es decir, la tensión entre los puntos A y B, la tensión en el secundario, cuando no se extrae corriente. Esto significa que el secundario queda sin carga, por lo que $I_2 = 0$ y, por lo tanto, $I_1 = 0$. Entonces, en la malla del primario, por las dos resistencias pasa la misma corriente. Podemos deducir, aplicando un divisor de tensión, que la tensión del primario verifica

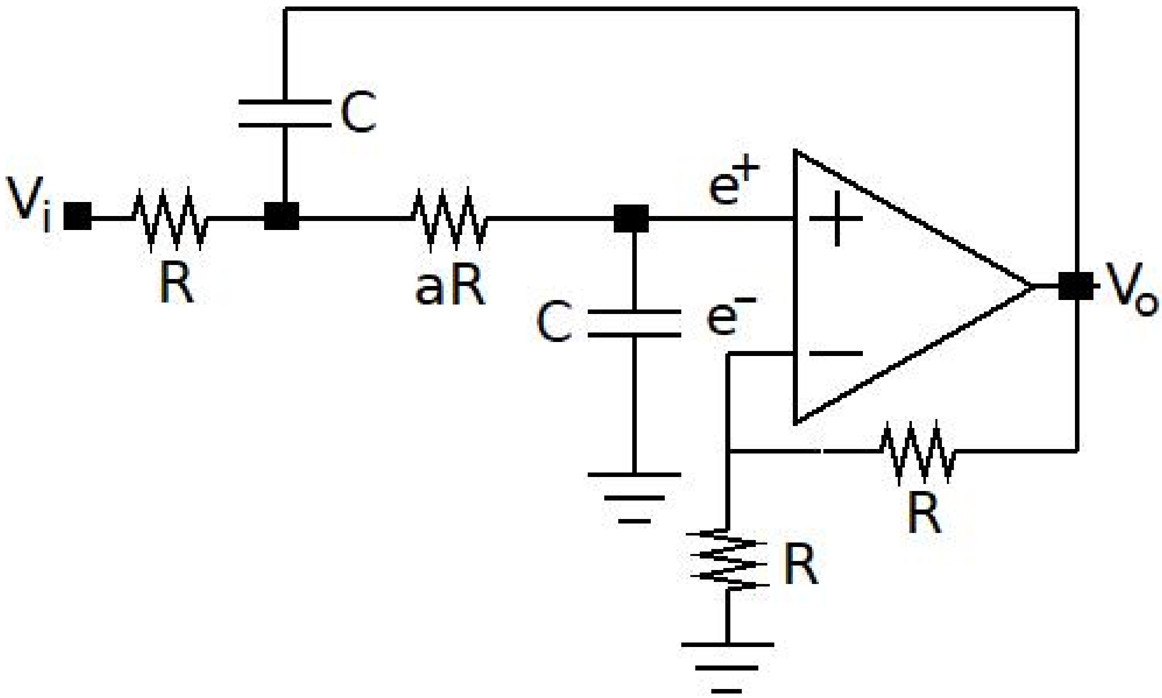
$$V_1 = \frac{E}{2} \Rightarrow V_{Th} = V_2 = \frac{n_2}{n_1}.V_1 = \frac{E}{6}$$

Hallemos ahora la impedancia vista Z_{Th}. Para ello anulemos la fuente independiente de valor E. Observemos que Z_{Th} es la impedancia vista desde el secundario, cuando el primario está cargado con una impedancia de valor $Z_1 = 2R||2R = R$. Para pasar esta impedancia de carga desde el primario al secundario, razonamos igual que en la parte anterior, invirtiendo los roles, de donde

$$Z_{Th} = \frac{n_2^2}{n_1^2}.R = \frac{R}{9}$$

Problema 3 (20 puntos)

Se considera el circuito de la figura, que implementa un filtro activo con la topología de Sallen-Key.



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal. Verificar que el circuito implementa un **filtro pasabajos** de segundo orden.

Pasemos al circuito equivalente en fasores. Denotemos por V_1 la tensión del nodo intermedio. La ecuación de Kirchoff para ese nodo nos dice que

$$\frac{V_i - V_1}{R} = \frac{V_1 - e^+}{aR} + (V_1 - V_o).Cj\omega \Rightarrow \frac{V_i}{R} = V_1.\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{aR} + Cj\omega\right] - \frac{e^+}{aR} - V_o.Cj\omega$$

Por la configuración del operacional, no inversora, sabemos que

$$V_o = \left(1 + \frac{R}{R}\right).e^+ = 2e^+ \Rightarrow e^+ = \frac{V_o}{2}$$

Por otro lado, al no entrar corriente al operacional por la pata +,

$$\frac{V_1 - e^+}{aR} = e^+.Cj\omega \Rightarrow V_1 = e^+.(1 + aRCj\omega) = V_o.\frac{1 + aRCj\omega}{2}$$

Volvemos entonces a la primera ecuación, eliminando V_1 y e^+:

$$\frac{V_i}{R} = V_o.\frac{1 + aRCj\omega}{2}.\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{aR} + Cj\omega\right] - \frac{V_o}{2aR} - V_o.Cj\omega$$

Hacemos común denominador.

$$\frac{V_i}{R} = V_o.\frac{1 + aRCj\omega}{2}.\left[\frac{a + 1 + aRCj\omega}{aR}\right] - \frac{V_o}{2aR} - V_o.Cj\omega$$

Agrupamos:

$$\frac{V_i}{R} = V_o.\left[\frac{(1 + aRCj\omega)(a + 1 + aRCj\omega)}{2aR} - \frac{1}{2aR} - Cj\omega\right] = V_o.\Bigg[\frac{(1 + aRCj\omega)(a + 1 + aRCj\omega) - 1 - 2aRCj\omega}{2aR}$$

Operamos:

$$\frac{V_i}{R} = V_o.\left[\frac{(1 + a) + (2 + a)aRCj\omega + a^2R^2C^2(j\omega)^2 - 1 - 2aRCj\omega}{2aR}\right] = V_o.\left[\frac{(a) + (a)aRCj\omega + a^2R^2C^2(j\omega)^2}{2aR}\right]$$

Entonces:

$$2V_i = V_o.[(1 + aRCj\omega + aR^2C^2(j\omega)^2] \Rightarrow H(j\omega) = \frac{2}{aR^2C^2(j\omega)^2 + aRCj\omega + 1}$$

b) Mostrar que es posible hallar valores de R, C y a para implementar un filtro de segundo orden con $\zeta = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = 2\pi.1kHz$.

Trabajamos la expresión:

$$H(j\omega) = \frac{1}{aR^2C^2}\frac{2}{(j\omega)^2 + \frac{aRC}{aR^2C^2}j\omega + \frac{1}{aR^2C^2}} = \frac{2.\frac{1}{aR^2C^2}}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{aR^2C^2}}$$

Igualamos a lo que queremos:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{a}RC} = 2\pi.1kHz \Rightarrow \sqrt{a}RC = \frac{1}{2\pi.1kHz}$$

$$2\zeta\omega_n = 2\zeta\frac{1}{\sqrt{a}RC} = \frac{1}{RC} \Rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{1}{2} \text{ si } a = 1 \quad (\forall R, C!!!)$$

En términos de ζ y ω_n, la transferencia en régimen queda

$$H(j\omega) = \frac{2.\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

c) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos, explicando claramente su deducción.

Partimos de la expresión genérica

$$H(j\omega) = 2.\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

con $\zeta = \frac{1}{2}$. Sabemos que al ser $|\zeta|$ menor que 1, tenemos dos raíces complejas conjugadas en el denominador, por lo que toda la discusión la haremos respecto de ω_n, el módulo de las raíces. Tenemos dos bandas, una de baja y otra de alta frecuencia. En cada banda, realizamos una aproximación asintótica:

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx 2.\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & [20\log(2)]\, dB \approx 6dB \\ arg(H) & \approx & 0 \end{cases}$$

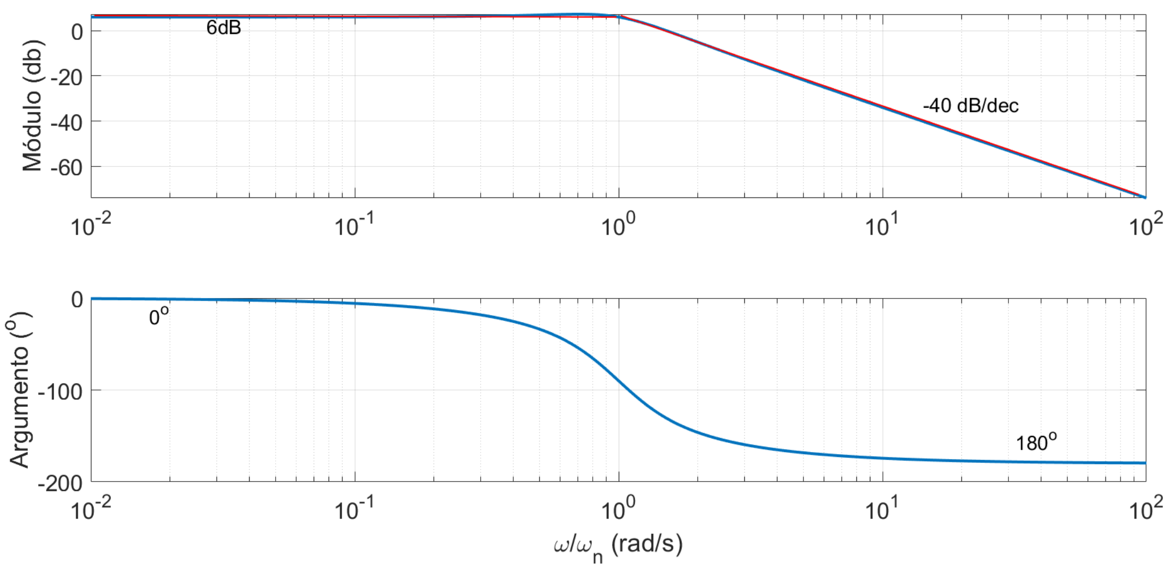
$$\omega_n \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx 2.\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2} = -2\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & [40\log(\sqrt{2}\omega_n) - 40\log(\omega)]\, dB \\ arg(H) & \approx & \pm\pi \end{cases}$$

Para resolver la duda que surge acerca de la fase en alta frecuencia (si subimos hacia $+\pi$ o bajamos hacia $-\pi$), podemos evaluar en un punto donde la aproximación no sea buena, como por ejemplo $\omega = \omega_n$.

$$H(j\omega_n) = 2\frac{\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{2}{2j\zeta} = -\frac{j}{\zeta} = -2j$$

Obtenemos un número imaginario puro con parte imaginaria negativa, por lo que la fase disminuye desde 0 hacia $-\pi$. Observemos que los diagramas de Módulo real y asintótico coinciden en ω_n.

La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de $H(j\omega)$. Para que el diagrama real pase por el valor $6dB$, debe crecer un poco antes de bajar.



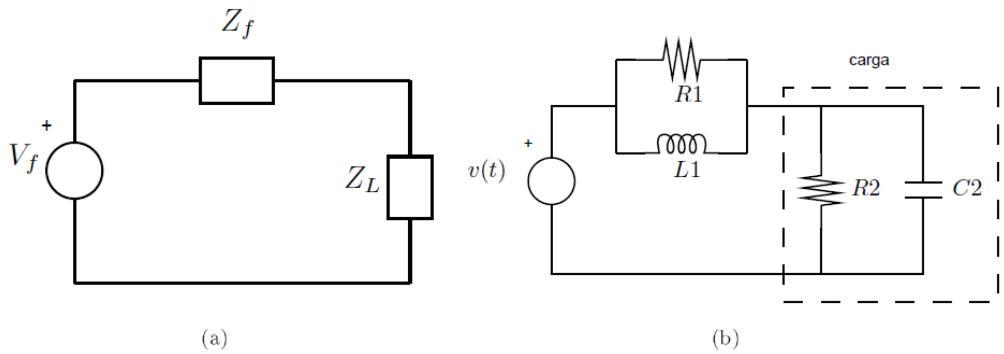
d) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo a la cual el circuito, al ser excitado por una señal $v_i(t) = A\cos(\omega_1 t)$, responde en régimen con una señal de la forma $v_i(t) = K.A\cos(\omega_1 t - 135^o)$, con K positivo?

Recordemos que para una entrada de la forma $v_i(t) = A\cos(\omega_1 t)$, la respuesta en régimen será

$$v_o(t) = A.|H(j\omega_1)|\cos\left(\omega_1 t + arg\ H(j\omega_1)\right)$$

Entonces, buscamos una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual $arg\ H(j\omega_1)$ sea -135^o. Observando el diagrama de Bode de fase, vemos que la fase varía de forma continua desde 0 a -180^o, por lo que va a existir una frecuencia ω_1 que cumple lo buscado. Como sabemos que en ω_n la fase es -90^o, entonces ω_1 es mayor que ω_n. El valor correspondiente a K es el módulo de $H(j\omega_1)$.

Problema 4 (10 puntos)



a) El circuito de la izquierda de la figura está funcionando en régimen sinusoidal. Deducir el valor que debe tener la impedancia Z_L en función de Z_f para que se disipe la máxima potencia posible en Z_L.

En primer término, planteamos la potencia activa disipada en Z_L, trabajando en valores eficaces:

$$P_{Z_L} = re(V_L.\overline{I_L}) = re\left(V_f.\frac{Z_L}{Z_f + Z_L}.\overline{\frac{V_f}{Z_f + Z_L}}\right) = \frac{|V_f|^2}{|Z_f + Z_L|^2}.re(Z_L)$$

Para maximizar esta potencia en función de Z_L, parametrizamos la carga en función de su parte real R_L y su parte imaginaria X_L, teniendo en cuenta que $R_L \geq 0$ y $X_L \in \mathbb{R}$. Ponemos también $Z_f = R_f + jX_f$. Entonces

$$P_{Z_L} = |V_f|^2 \frac{R_L}{(R_f + R_L)^2 + (X_f + X_L)^2}$$

Nos queda una función real que depende de dos variables: R_L y X_L. Para maximizarla, anulamos el gradiente:

$$\frac{\partial P_{Z_L}}{\partial R_L} = |V_f|^2 \frac{-(R_f + R_L)^2 - (X_f + X_L)^2 + R_L.2.(R_f + R_L)}{[(R_f + R_L)^2 + (X_f + X_L)^2]^2}$$

$$\frac{\partial P_{Z_L}}{\partial X_L} = |V_f|^2 \frac{R_L.2.(X_f + X_L)}{[(R_f + R_L)^2 + (X_f + X_L)^2]^2}$$

Observemos que $\frac{\partial P_{Z_L}}{\partial X_L}$ se anula para $X_L = -X_f$. Imponiendo esto en l aprimera ecuación, obtenemos

$$\frac{\partial P_{Z_L}}{\partial R_L} = |V_f|^2 \frac{-(R_f + R_L)^2 + R_L.2.(R_f + R_L)}{[(R_f + R_L)^2]^2} = |V_f|^2 \frac{-R_f^2 - R_L^2 - 2R_f.R_L + 2R_L.R_f + 2R_L^2}{[(R_f + R_L)^2]^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_{Z_L}}{\partial R_L} = |V_f|^2 \frac{R_L^2 - R_f^2}{[(R_f + R_L)^2]^2}$$

de donde $R_L = R_f$. Por lo tanto, Z_L debe ser igual al conjugado de Z_f.

b) El circuito de la derecha está funcionando en régimen sinusoidal, con $v(t) = V_0. \cos(\omega_0 t)$. Para $R_1 = R_2$, hallar la relación entre L_1, C_2 y ω_0 que asegure que se disipa la máxima potencia posible en la carga.

Aplicamos la parte anterior, con $Z_f = R_1 || L_1 j\omega_0$ y $Z_L = R_2 || \frac{1}{C_2 j\omega}$. Por la parte anterior, sabemos que debe cumplirse que

$$Z_L = \overline{Z_f} \Rightarrow$$

Notemos que esto implica

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_1 j\omega_0} = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{\overline{Z_f}} = \overline{\frac{1}{Z_f}} = \overline{\frac{1}{R_2} + C_2 j\omega_0} = \frac{1}{R_2} - C_2 j\omega_0$$

Como $R_1 = R_2$, se debe cumplir que

$$\frac{1}{L_1 j\omega_0} = -C_2 j\omega_0 \Rightarrow L_1 C_2 \omega_0^2 = 1$$