Teoría de circuitos

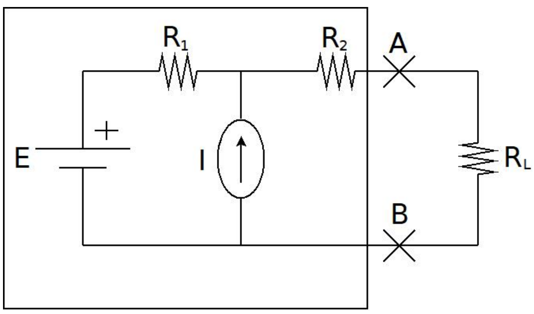
Primer parcial - Demo 1

2^o semestre 2020

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SER PROLIJO Y EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS. Expresar sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Todos los operacionales son ideales. Se sugiere explicar bien cómo los analiza en los circuitos.**

Problema 1 (XX puntos)



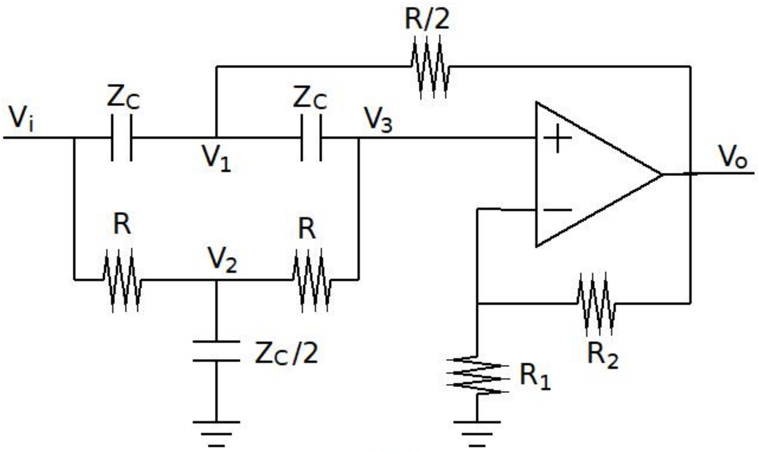
a) Hallar el equivalente de Thévenin del circuito de la figura (sin la resistencia R_L.)

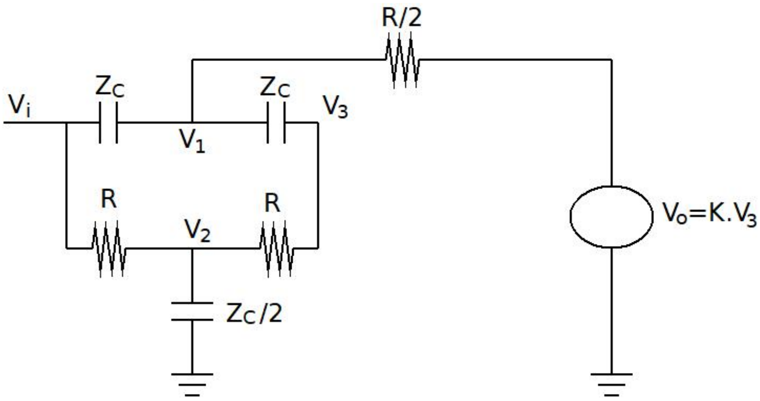
b) Deducir el equivalente de Norton.

c) Calcular la potencia instantánea disipada en R_L.

Problema 2 (XX puntos)

En los circuitos en régimen que siguen, las tensiones están referidas a tierra y el operacional es ideal, funcionando en zona lineal.





a) Hallar el valor de K que hace que ambos circuitos tengan la misma transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}$.

b) Para valores adecuados de las componentes, la transferencia del primer circuito puede escribirse como

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + a^2}{(j\omega + a)^2} \quad , \quad a > 0$$

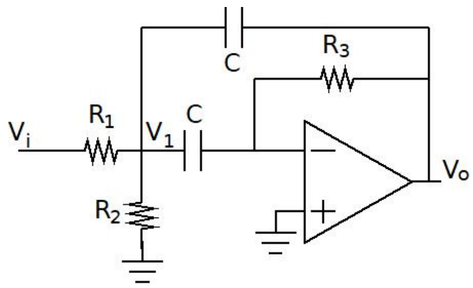
Hallar las respuestas en régimen (exactas) para las entradas

i) $v_i(t) = A\cos(2at)$;

i) $v_i(t) = A\cos(at)$.

JUSTIFICAR.

Problema 3 (XX puntos)



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. Se sugiere primero hallar la relación entre V_1 y V_o.

b) Si definimos $\omega_1 = \frac{1}{R_1C}$, mostrar que es posible elegir una relación adecuada entre R_1, R_2 y R_3 para que

$$H(j\omega) = \frac{-\omega_1(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

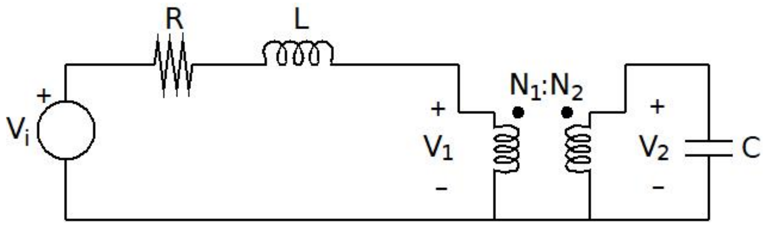
$\zeta = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = 10\omega_1$.

c) Realizar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando claramente su deducción.

d) ¿Existe alguna frecuencia ω_0 tal que para la entrada $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t)$, la respectiva salida en régimen esté en contrafase respecto de la entrada? JUSTIFICAR.

Problema 4 (XX puntos)

En el circuito en régimen de la figura, se sabe que la realción de vueltas del transformador ideal es $N_1/N_2 = 2$.



a) Hallar la expresión de la impedancia vista del lado del primario.

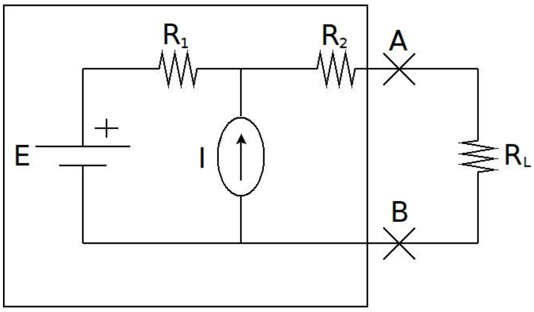
b) Hallar la tensión del primario.

c) Hallar la transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, siendo $V_o = V_2$, la tensión del secundario.

d) Hacer un diagrama fasorial cualitativo que contenga la tensión de la fuente, las tensiones en R y L y las tensiones y corrientes del primario y secundario, sabiendo que la impedancia total que ve la fuente es inductiva.

Solución

Problema 1 (XX puntos)



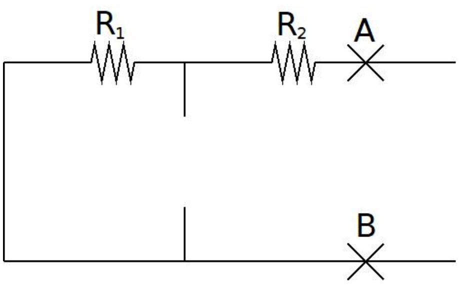
a) Hallar el equivalente de Thévenin del circuito de la figura (sin la resistencia R_L).

Todo el análisis lo hacemos sin la resistencia R_L. Tenemos que halar la tensión de vacio V_{Th} (sin corriente entregada por el circuito) y la resistencia vista R_{Th} (anulando las fuentes independientes). Primero hallamos la tensión de vacío V_{Th}. Es importante notar nos ponemos en la situación de que no circula corriente por la R_2. La tensión de vacío V_{Th} será entonces la tensión en bornes de la fuente de corriente. Al no circular corriente por R_2, toda la corriente de la fuente de corriente circula por R_1. Planteamos la única malla del circuito resultante:

$$E = -R_1.I + V_{Th} \Rightarrow \boxed{V_{Th} = E + R_1.I}$$

(prestar atención a los signos de la identidad anterior).

Para hallar la resistencia vista R_{Th}, primero anulamos las fuentes independientes del circuito (esto equivale a cortocircuitar la fuente de tensión y abrir la fuente de corriente). Obtenemos el siguiente circuito: Observamos que la resistencia equivalente entre A y B es $\boxed{R_{Th} = R_1 + R_2}$.



b) Deducir el equivalente de Norton.

Para obtener el equivalente de Norton, precisamos calcular la corriente de cortocircuito I_{cc} y la admitancia vista Y_N. Del equivalente de Thévenin obtenemos

$$Y_N = \frac{1}{R_{Th}} \quad , \quad I_{cc} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{E + R_1.I}{R_1 + R_2}$$

(Notar que I_{cc} podría haberse calculado también directamente por superposición).

c) Calcular la potencia instantánea disipada en R_L.

La expresión de la potencia instantánea en al resitencia R_L es:

$$p_{R_L}(t) = v_{R_L}(t).i_{R_L}(t)$$

Usando el equivalente de Thévenin, aplicando divisor de tensión, tenemos que

$$v_{R_L}(t) = V_{Th}.\frac{R_L}{R_{Th} + R_L}$$

Además,

$$i_{R_L}(t) = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L}$$

Entonces

$$p_{R_L}(t) = V_{Th}.\frac{R_L}{R_{Th} + R_L}.\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{V_{Th}^2}{(R_{Th} + R_L)^2}.R_L = \frac{(E + R_1.I)^2}{(R_1 + R_2 + R_L)^2}.R_L$$

Problema 2 (XX puntos)

En los circuitos en régimen que siguen, las tensiones están referidas a tierra y el operacional es ideal, funcionando en zona lineal.

a) Hallar el valor de K que hace que ambos circuitos tengan la misma transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}$.

Observando los circuitos, vemos que en el de arriba, la relación entre V_o y V_3 está definida por la configuración no inversora del operacional:

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right).V_3$$

Para tener la identidad buscada, basta con poner $K = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

b) Para valores adecuados de las componentes, la transferencia del primer circuito puede escribirse como

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + a^2}{(j\omega + a)^2} \quad , \quad a > 0$$

Hallar las respuestas en régimen (exactas) para las entradas

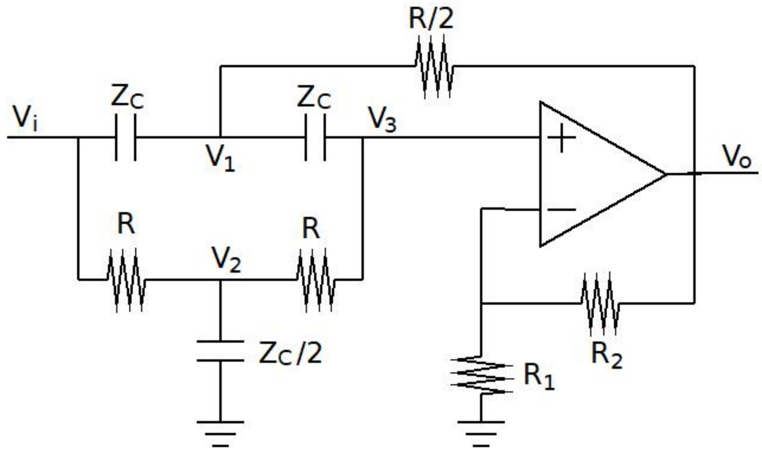
i) $v_i(t) = A\cos(2at)$;

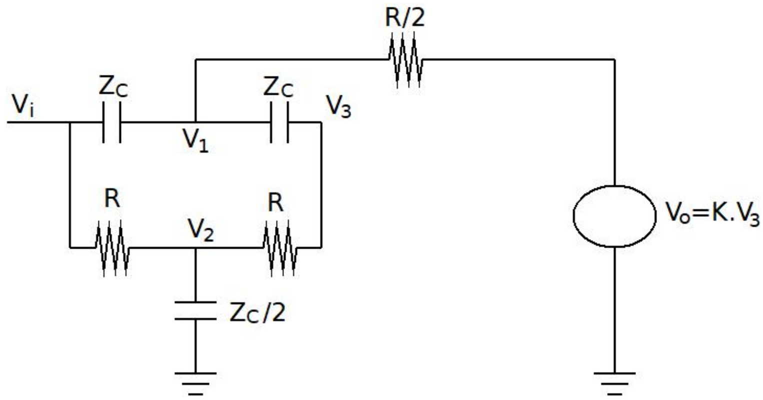
i) $v_i(t) = A\cos(at)$.

JUSTIFICAR.

Sabemos que si entramos con una señal sinusidal $v_i(t) = A\cos(\omega_1 t)$, la respectiva respuesta en régimen será

$$v_o(t) = A.|H(j\omega_1)|\cos(\omega_1 t + argH(j\omega_1))$$





i) $v_i(t) = A\cos(2at)$;

Para $\omega_0 = 2a$, obtenemos

$$v_o(t) = A.|H(j2a)|\cos(2at + argH(j2a)) = A.\left|\frac{(j2a)^2+a^2}{(j2a+a)^2}\right|\cos\left(2at + arg\frac{(j2a)^2+a^2}{(j2a+a)^2}\right)$$

$$v_o(t) = A.\left|\frac{(j2)^2+1}{(j2+1)^2}\right|\cos\left(2at + arg\frac{(j2)^2+1}{(j2+1)^2}\right) = A.\left|\frac{-4+1}{(j2+1)^2}\right|\cos\left(2at + arg\frac{-4+1}{(j2+1)^2}\right)$$

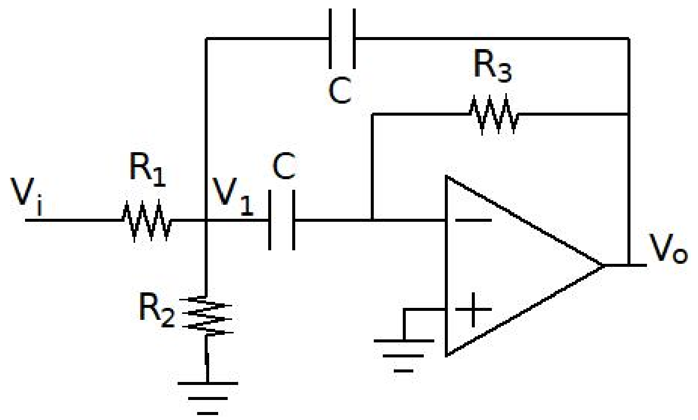
$$v_o(t) = A.\frac{3}{5}.\cos(2at + \pi - 2arctg(2))$$

i) $v_i(t) = A\cos(at)$.

Razonando igual que antes, para $v_i(t) = A\cos(at)$, obtenemos

$$v_o(t) = A.\left|\frac{(ja)^2+a^2}{(ja+a)^2}\right|\cos\left(at + arg\frac{(ja)^2+a^2}{(ja+a)^2}\right) = A.\left|\frac{(j)^2+1}{(j+1)^2}\right|\cos\left(at + arg\frac{(j)^2+1}{(j+1)^2}\right) = 0$$

Problema 3 (XX puntos)



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. Se sugiere primero hallar la relación entre V_1 y V_o.

Pasamos primero al circuito equivalente en fasores. Observemos que la relación entre los fasores V_1 y V_o queda definida por la configuración inversora del operacional, ya que toda la corriente que circula por el condensador hacia la pata $-$ se va por R_3 hacia la salida del opamp. Por el cortocircuito virtual, tenemos tierra virtual en la pata $-$.

$$V_o = -R_3C(j\omega).V_1 \Rightarrow V_1 = -\frac{1}{R_3Cj\omega}.V_o$$

Veamos ahora el nudo de tensión V_1:

$$\frac{V_i - V_1}{R_1} = \frac{V_1}{R_2} + (V_1 - V_o)Cj\omega + V_1.Cj\omega = \frac{V_1}{R_2} + (V_1 - V_o)Cj\omega - \frac{V_o}{R_3}$$

Agrupando, obtenemos:

$$\frac{V_i}{R_1} = V_1.\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + Cj\omega\right] - V_o.\left[\frac{1}{R_3} + Cj\omega\right]$$

Hacemos común denominador y sustituímos V_1:

$$\frac{V_i}{R_1} = -\frac{V_o}{R_3Cj\omega}.\left[\frac{R_1 + R_2 + R_1R_2Cj\omega}{R_1R_2}\right] - V_o.\left[\frac{1 + R_3Cj\omega}{R_3}\right]$$

Operamos:

$$\frac{V_i}{R_1} = -V_o.\left[\frac{R_1 + R_2 + R_1R_2Cj\omega + R_1R_2Cj\omega(1 + R_3Cj\omega)}{R_1R_2R_3Cj\omega}\right]$$

$$\Rightarrow V_i.R_2R_3Cj\omega = -V_o.\left[R_1 + R_2 + R_1R_2Cj\omega + R_1R_2Cj\omega + R_1R_2R_3C^2(j\omega)^2\right]$$

De donde

$$H(j\omega) = \frac{-R_2R_3C(j\omega)}{R_1 + R_2 + 2R_1R_2 + R_1R_2R_3C^2(j\omega)^2} = -\frac{(\frac{1}{R_1C})(j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{2}{R_3C}(j\omega) + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2R_3C^2}}$$

b) Si definimos $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C}$, mostrar que es posible elegir una relación adecuada entre R_1, R_2 y R_3 para que

$$H(j\omega) = \frac{-\omega_1(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

$\zeta = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = 10\omega_1$.

El numerador resulta ser $\omega_1(j\omega)$. Veamos el denominador. Queremos que

$$(j\omega)^2 + \frac{2}{R_3 C}(j\omega) + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C^2} = (j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2$$

Debe cumplirse al mismo tiempo que:

$$\frac{2}{R_3 C} = 2\zeta\omega_n = 10\omega_1 \Rightarrow R_3 = \frac{1}{5\omega_1 C} = \frac{R_1}{5}$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C^2} = w_n^2 = 100\omega_1^2 \Leftrightarrow R_1 + R_2 = \frac{100}{R_1^2 C^2}.R_1 R_2 R_3 C^2 = \frac{100.R_1 R_2 R_1}{R_1^2.5} = 20R_2$$

De donde $R_2 = \frac{R_1}{19}$.

c) Realizar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando claramente su deducción.

Partimos de la expresión genérica

$$H(j\omega) = \frac{-\omega_1(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

con $\zeta = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = 10\omega_1$. Identificamos las frecuencias críticas: 0 en el numerador y ω_n en el denominador (que por el valor de ζ, vemos que tiene dos raíces complejas conjugadas). Por lo tanto, para llevar adelante un análisis por bandas, observamos que tenemos una banda de baja frecuencias y otra de frecuencias altas, separadas por ω_n. En cada banda, realizamos una aproximación asintótica:

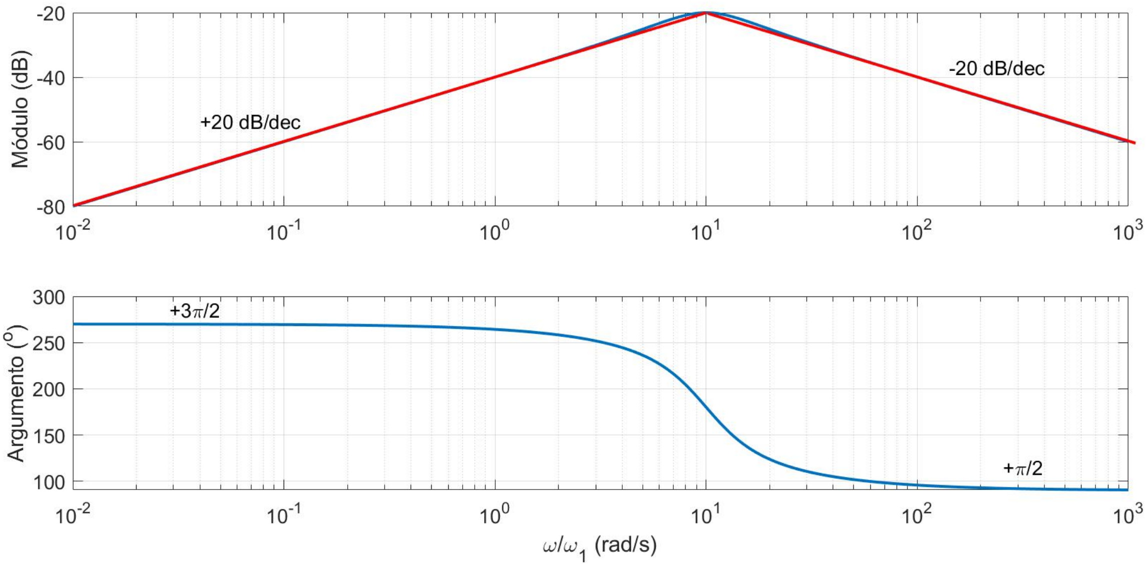
$$\omega \ll \omega_n = 10\omega_1 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{-\omega_1(j\omega)}{\omega_n^2} = \frac{-\omega_1(j\omega)}{100\omega_1^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & [-20\log(100\omega_1) + 20\log(\omega)]\ db \\ arg(H) & \approx & -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\omega_n = 10\omega_1 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{-\omega_1(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{-\omega_1}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & [20\log(\omega_1) - 20\log(\omega)]\ db \\ arg(H) & \approx & \frac{\pi}{2}\ (\text{ó } -\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

Para resolver la duda que surge acerca de la fase en alta frecuencia, podemos evaluar en un punto donde la aproximación no sea buena, como por ejemplo $\omega = \omega_n = 10\omega_1$.

$$H(j\omega_n) = H(j100\omega_1) = \frac{-\omega_1(j10\omega_1)}{(j10\omega_1)^2 + 2\zeta 10\omega_1(j10\omega_1) + 100\omega_1^2} = \frac{-(j10)}{2\zeta(j100)} = -\frac{1}{2\zeta} = -\frac{1}{10}$$

Obtenemos un número real negativo, por lo que la fase disminuye desde $-\frac{\pi}{2}$ hacia $-\frac{3\pi}{2}$. Observemos que los diagramas de Módulo real y asintótico coinciden en ω_n. La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de $H(j\omega)$. Observar que el diagrama de fase muestra el mismo recorrido que hallamos analíticamente, pero en otro rango de valores (tener presente que la fase está definida a menos de múltiplos de 2π).

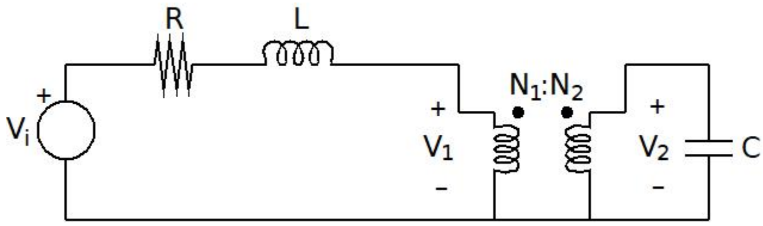


d) ¿Existe alguna frecuencia ω_0 tal que para la entrada $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t)$, la respectiva salida en régimen está en contrafase respecto de la entrada? JUSTIFICAR.

Recordemos que la diferencia de fase entre la entrada y la salida en régimen está dada por el argumento de la transferencia evaluada en la frecuencia de trabajo. Por lo tanto, al ser en este caso la fase una función continua de la frecuencia, tenemos que mirar el diagrama de Bode de fase y ver si pasa por algun múltiplo impar de π. Vemos que eso efectivamente pasa para $\omega = \omega_n = 10\omega_1$, cosa que ya sabíamos por haber calculado el valor exacto.

Problema 4 (XX puntos)

En el circuito en régimen de la figura, se sabe que la realción de vueltas del transformador ideal es $N_1/N_2 = 2$.



a) Hallar la expresión de la impedancia vista del lado del primario.

PAra un transformador ideal, sabemos que una impedancia Z_2 conectada al secundario pasa al primario multiplicada por la relación de transformación al cuadrado:

$$Z_{v1} = \frac{N_1^2}{N_2^2}.Z_2$$

En el circuito, tenemos que $Z_2 = \frac{1}{Cj\omega}$, por lo que

$$Z_{v1} = 4.\frac{1}{Cj\omega}$$

b) Hallar la tensión del primario.

Aplicando el divisor de tensión, nos queda

$$V_1 = V_i.\frac{4.\frac{1}{Cj\omega}}{R + Lj\omega + 4.\frac{1}{Cj\omega}} = V_i.\frac{4}{4 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2}$$

c) Hallar la transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, siendo $V_o = V_2$, la tensión del secundario.

Usando que $\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$, tenemos que

$$V_o = V_2 = \frac{N_2}{N_1}.V_1 = \frac{1}{2}.V_i.\frac{4}{4 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2} =$$

Resulta

$$H(j\omega) = \frac{2}{4 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2} = V_i.\frac{\frac{2}{LC}}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}(j\omega) + \frac{4}{LC}}$$

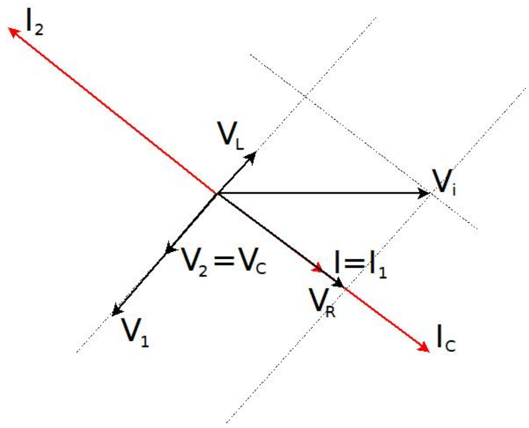
d) Hacer un diagrama fasorial cualitativo que contenga la tensión de la fuente y las tensiones y corrientes del primario y secundario, sabiendo que la impedancia total que ve la fuente es inductiva.

Tomamos como referencia el fasor V_i de la tensión de la fuente. Como la fuente ve unan impedancia inductiva, sabemos que el fasor I_i de corriente por la fuente, que coincide con la corriente del primario, estará atrasado respecto de V_i. La tensión del primario es la tensión en un condensador (el condensador equivalente a haber pasado la carga al primario), por lo que la tensión del primario estará retrasada 90 grados respecto de la corriente $I_i = I_1$. De la identidad

$$N_1.I_1 + N_2.I_2 = 0$$

obtenemos $I_2 = -\frac{N_1}{N_2}.I_1 = -2.I_i$. Finalmente, la tensión del secundario está retrasada 90 grados respecto de la opuesta de la corriente del secundario, que es la que circula por el condensador en el sentido de la caída de tensión.

El diagrama aproximado resultante se muestra en la figura. Notar que se cumple $V_i = V_R + V_L + V_1$.



I_2
V_L
V_i
$V_2 = V_C$
$I = I_1$
V_R
V_1
I_C