Teoría de circuitos

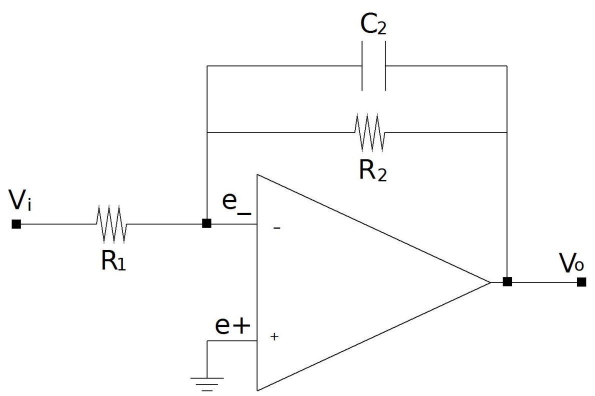
Primer parcial

2^o semestre 2019

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte**.
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio**.
- **SER PROLIJO Y EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS. Expresar sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta**.
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS**.
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS**.
- **Se recuerda que la prueba es individual**.
- **Todos los operacionales son ideales. Se sugiere explicar bien cómo los analiza en los circuitos**.

Problema 1 (10 puntos)

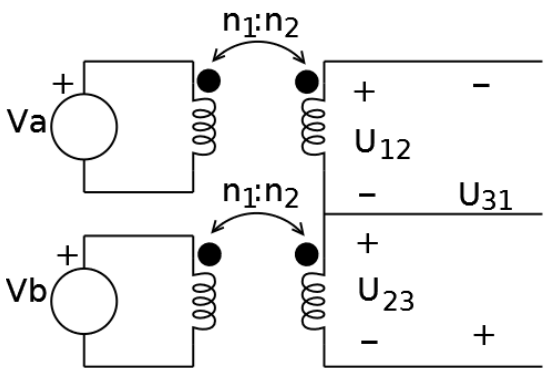


a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

b) ¿Existe alguna frecuencia ω_0 tal que para la entrada $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t)$, la respectiva salida en régimen esté adelantada 135^o respecto de la entrada? JUSTIFICAR.

Problema 2 (13 puntos)

a) Se tiene una carga de tipo inductivo caracterizada por su impedancia Z a la frecuencia de trabajo $50Hz$. Se realiza el siguiente ensayo: se la alimenta con una tensión sinusoidal de valor eficaz $230\,V$ y se miden la potencia activa y reactiva que consume. Se obtiene: $P = 2500\,W$ y $Q = 1444\,VAR$. Hallar el módulo y la fase de la impedancia Z.



b) Se considera el circuito en fasores de la figura, en el que los transformadores son ideales. Sabiendo que:

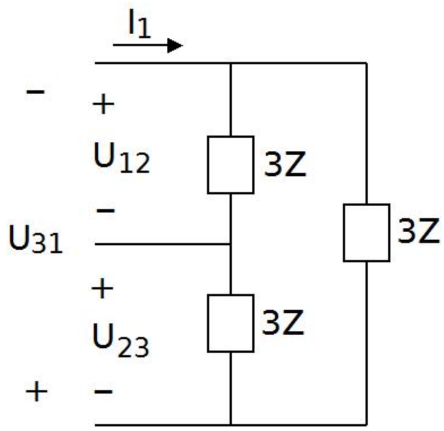
$$\begin{aligned} v_a(t) &= 400kV\sqrt{2}sen(\omega t) \\ v_b(t) &= 400kV\sqrt{2}sen(\omega t + 2\pi/3) \\ \frac{n_1}{n_2} &= 1000 \end{aligned}$$

mostrar que los fasores U_{12}, U_{23} y U_{31} representan una fuente trifásica equilibrada y perfecta. Hallar la expresión temporal de $u_{12}(t)$.

c) Para el circuito trifásico de la figura,

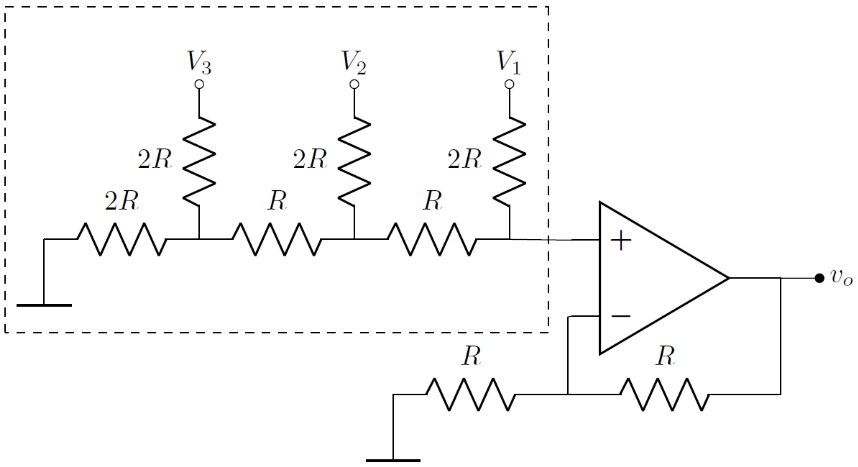
i) hallar la expresión temporal de $i_1(t)$.

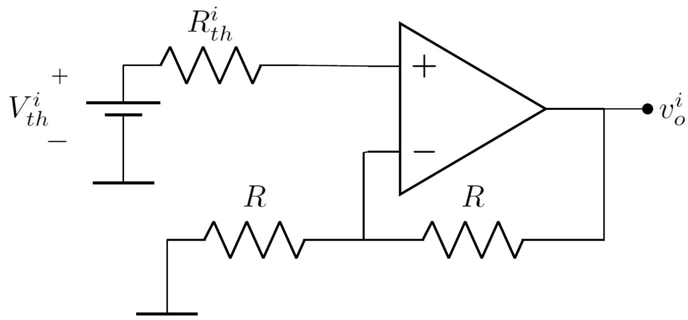
ii) compensar la potencia reactiva consumida por la carga trifásica, indicando qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.



Problema 3 (17 puntos)

En el circuito de la figura, V_1, V_2 y V_3 son fuentes **de continua de valor E**, donde cada una de ellas puede estar prendida o anulada.



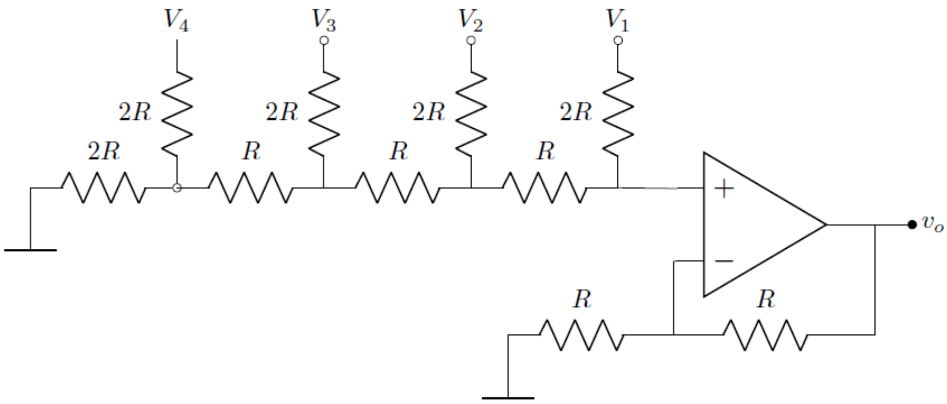


a) Hallar el equivalente de Thévenin del circuito conectado a la pata de entrada no inversora (punteado en la primer figura), para cada configuración donde una fuente está prendida y las demás anuladas. Observar primero que todos los equivalentes tienen la misma R_{Th} y calcularla.

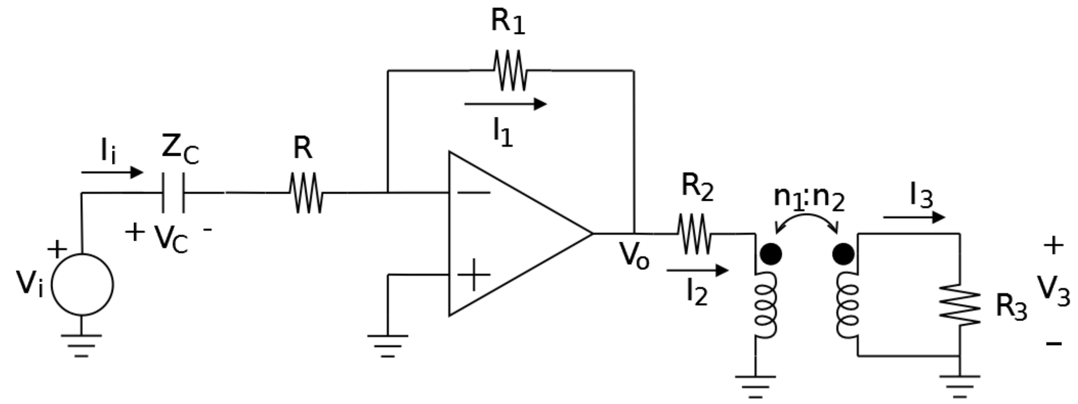
b) Aplicando superposición, hallar v_o en función de V_1, V_2 y V_3.

c) ¿Cuál es el máximo valor posible de v_o? ¿Cuál es el mínimo valor no nulo de v_o?

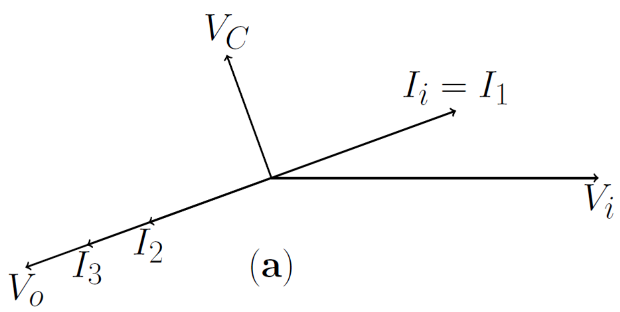
d) Inferir cómo quedarían v_o y los valores pedidos en la parte c) si modificáramos el circuito agregando un nuevo juego de resistencias y V_4.

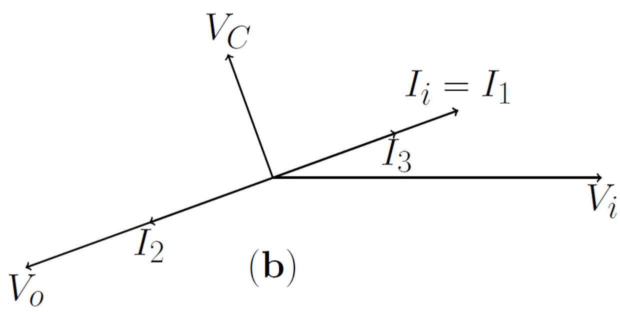


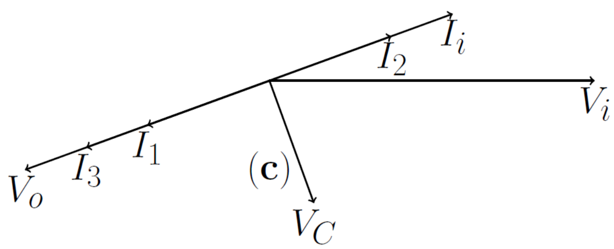
Problema 4 (10 puntos)

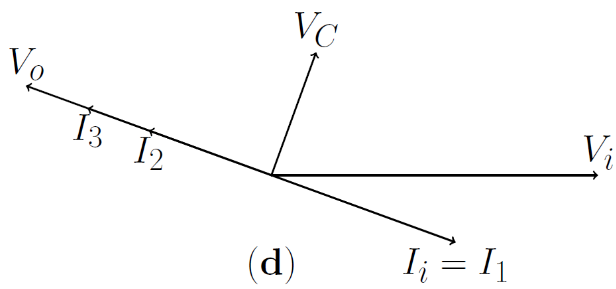


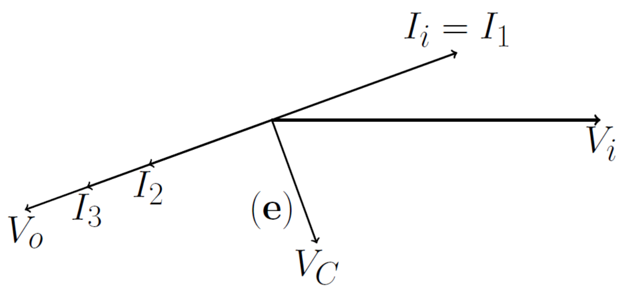
Para cada diagrama fasorial, indicar si representa o no al circuito en fasores de la figura y por qué.

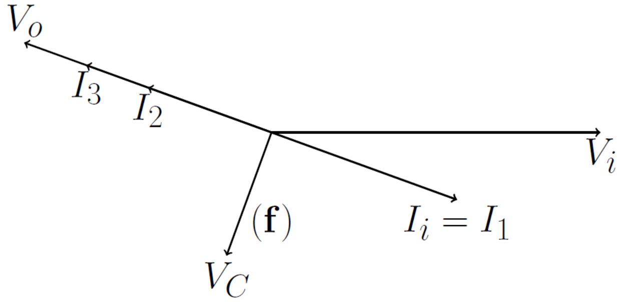






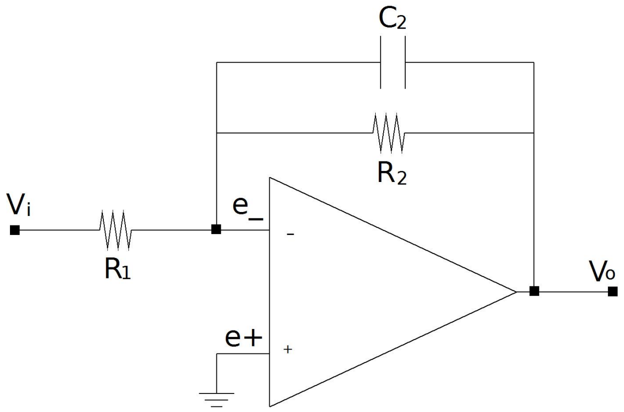






Solución

Problema 1



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

b) ¿Existe alguna frecuencia ω_0 tal que para la entrada $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t)$, la respectiva salida en régimen esté adelantada 135^o respecto de la entrada? JUSTIFICAR.

a) Para hallar la transferencia en régimen sinusoidal, pasamos primero al circuito equivalente en fasores. Nos queda una configuración inversora, con impedania $Z_1 = R_1$ entre la entrada y la pata $-$ e impedancia $Z_2 = R_2 || \frac{1}{Cj\omega}$ entre la salida del operacional y la pata $+$.

Como el operacional tiene ganancia infinita y está en zona lineal, tenemos el cortocircuito virtual entre las patas $+$ y $-$. Como la resistencia de entrada es infinita, no entra corriente por la pata $-$, por lo que por las impedancias Z_1 y Z_2 circula la misma corriente I (medida desde la entrada hacia la pata $-$).

Entonces, como $e^+ = e^- = 0$,

$$I = \frac{V_i}{Z_1} = -\frac{V_o}{Z_2} \Rightarrow V_o = -\frac{Z_2}{Z_1} V_i = -\frac{\frac{R_2 \frac{1}{C_2 j\omega}}{R_2 + \frac{1}{C_2 j\omega}}}{R_1} . V_i = -\frac{\frac{R_2}{R_2 C_2 j\omega + 1}}{R_1} - V_i = -\frac{R_2}{R_1} . \frac{1}{1 + R_2 C_2 j\omega} . V_i$$

Obtenemos $\boxed{H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1} . \frac{1}{1 + R_2 C_2 j\omega}}$.

b) Para una entrada sinusoidal de la forma $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t)$, sabemos que la respectiva respuesta en régimen vale

$$v_o(t) = A.|H(j\omega_0)|. \cos(\omega_0 t + arg\, H(j\omega_0))$$

Por lo tanto, tenemos que ver si existe una frecuencia de trabajo ω_0 para la cual $H(j\omega_0)$ tenga fase igual a $135^o = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Observemos que el argumento de $H(j\omega_0)$ vale

$$arg\, H(j\omega_0) = \pi - atan\,(R_2 C_2 \omega_0) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow atan(R_2 C_2 \omega_0) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow R_2 C_2 \omega_0 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{R_2 C_2}}$$

Problema 2

a) Se tiene una carga de tipo inductivo caracterizada por su impedancia Z a la frecuencia de trabajo $50Hz$. Se realiza el siguiente ensayo: se la alimenta con una tensión sinusoidal de valor eficaz $230\,V$ y se miden la potencia activa y reactiva que consume. Se obtiene: $P = 2500\,W$ y $Q = 1444\,VAR$. Hallar el módulo y la fase de la impedancia Z.

Elijamos un modelo paralelo para la impedancia: $Z = R_p||jX_p$. Si elegimos un modelo serie, $Z = R_S + jX_s$, las cuentas son un poco más complicadas. AL elegir un modelo paralelo, tanto la resistencia R_P como la reactancia X_P ven la misma tensión (E=230 V eficaces). Teniendo en cuenta que sólo la resistencia consume activa, tenemos que

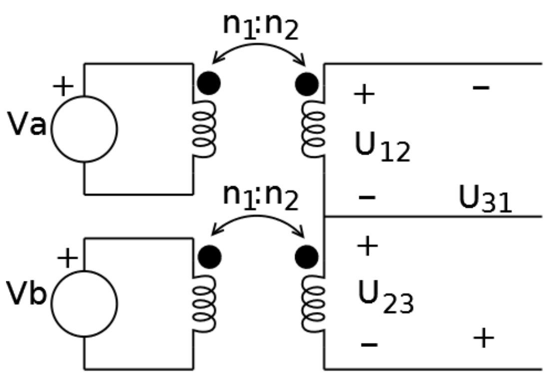
$$P = \frac{|E|^2}{R_P} \Rightarrow R_P = \frac{|E|^2}{P} = \frac{(230V)^2}{2500W} \approx 21\Omega$$

Teniendo en cuenta que sólo la reactancia consume reactiva, tenemos que

$$Q = \frac{|E|^2}{X_P} \Rightarrow X_P = \frac{|E|^2}{Q} = \frac{(230V)^2}{1444VAR} \approx 37\Omega$$

Como

$$Z = R_P||jX_P = \frac{R_P jX_P}{R_P + jX_P} \Rightarrow \boxed{Z \approx (18,3\angle 30^o)\,\Omega}$$



b) Se considera el circuito en fasores de la figura, en el que los transformadores son ideales. Sabiendo que:

$$\begin{aligned} v_a(t) &= 400kV\sqrt{2}sen(\omega t) \\ v_b(t) &= 400kV\sqrt{2}sen(\omega t + 2\pi/3) \\ \frac{n_1}{n_2} &= 1000 \end{aligned}$$

mostrar que los fasores U_{12}, U_{23} y U_{31} representan una fuente trifásica equilibrada y perfecta. Hallar la expresión temporal de $u_{12}(t)$.

Tenemos dos transformadores ideales que trabajan de forma independiente. Consideremos el primero, el que está alimentado por V_a. La tensión de su secundario, U_{12}, verifica que

$$\frac{V_a}{n_1} = \frac{U_{12}}{n_2} \Rightarrow U_{12} = \frac{n_2}{n_1}V_a$$

Entonces, las tensiones sinusoidales $v_a(t)$ y $u_{12}(t)$ están en fase, y sus amplitudes están relacionadas por el factor $\frac{n_2}{n_1}$. De donde

$$\boxed{u_{12}(t) = 400kV.\sqrt{2}.\frac{1}{1000}sen(\omega t) = \sqrt{2}.400V.sen(\omega t)}$$

Razonando de forma similar, obtenemos que $U_{23} = \frac{n_2}{n_1}.V_b = \frac{n_2}{n_1}.V_a.e^{j\frac{2\pi}{3}} = U_{12}.e^{j\frac{2\pi}{3}}$. Finalmente,

$$U_{31} = -U_{12} - U_{23} = -U_{12}\left[1 + e^{j\frac{2\pi}{3}}\right] = e^{j\pi}.U_{12}.\left[e^{j\frac{\pi}{3}}\right] = U_{12}.e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

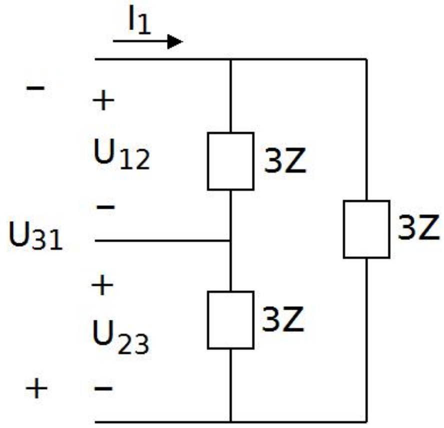
De donde los fasores U_{12}, U_{23} y U_{31} tienen la misma amplitud y difieren 120^o entre sí, verificando que

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0$$

c) Para el circuito trifásico de la figura,

  i) hallar la expresión temporal de $i_1(t)$.

  ii) compensar la potencia reactiva consumida por la carga trifásica, indicando qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.



En el circuito trifásico de la figura, la carga está alimentada por un sistema equilibrado y perfecto de tensiones compuestas. Como la carga está en triángulo, para calcular las corrientes que llegan hacemos una transfiguración triángulo-estrella. Al ser carga idénticas, esto consiste simplemente en dividir entre 3 el valor de las impedancias. Obtenemos entonces una estrella equivalente, formada por tres impedancias idénticas de valor Z.

Podemos entonces pasar al equivalente monofásico y obtener el fasor $I_1 = V_1/Z$, donde V_1 es la tensión de fase

$$V_1 = \frac{U_{12}}{\sqrt{3}}.e^{\pm j\frac{\pi}{6}}$$

Para saber si hay que sumar o restar 30^o, tenemos que mirar con atención el sentido de las tensiones compuestas, lo que nos lleva a $V_1 = \frac{U_{12}}{\sqrt{3}}.e^{+j\frac{\pi}{6}}$ y

$$I_1 = \frac{\frac{U_{12}}{\sqrt{3}}.e^{+j\frac{\pi}{6}}}{Z} = \frac{U_{12}.e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}.Z} \Rightarrow \boxed{i_1(t) = \sqrt{2}.\frac{400}{\sqrt{3}.18,3} sen\,(\omega t + 30^o - 30^o)\,A}$$

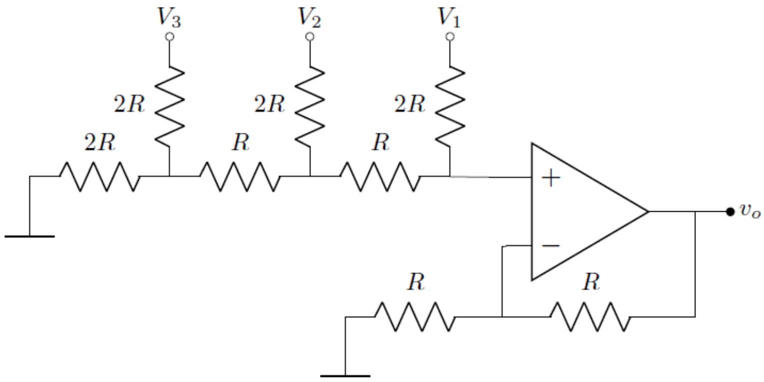
Para compensar la potencia reactiva, observemos que el equivalente monofásico es exactamente el circuito de la parte a), ya que el valor eficaz de la tensión de fase es el de la tensión compuesta sobre $\sqrt{3}$ ($400/\sqrt{3} \approx 230$). Entonces, la reactiva a compensar es $Q_T = 3.Q = 3 \times 1444VAR$ o, al ser un sistema equilibrado, $1444VAR$ por fase. Para compensar la reactiva (inductiva), comenzamos calculando el condensador a colocar en el equivalente monofásico:

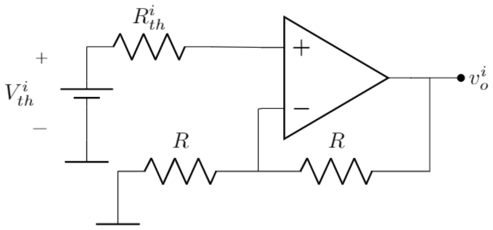
$$Q_C = -Q = -|E|^2 C\omega \Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{|E|^2\omega} = \frac{1444VAR}{|230V|^2.100\pi}}$$

Volviendo al sistema trifásico, tendríamos que colocar una estrella de condensadores idénticos de valor C en paralelo con la carga o, mejor aún, un triángulo equivalente, formado por tres condensadores idénticos de valor $C/3$.

Problema 3

En el circuito de la figura, V_1, V_2 y V_3 son fuentes de continua de valor E, donde cada una de ellas puede estar prendida o anulada.





a) Hallar el equivalente de Thévenin del circuito conectado a la pata de entrada no inversora (punteado en la primer figura), para cada configuración donde una fuente está prendida y las demás anuladas. Observar primero que todos los equivalentes tiene la misma R_{Th} y calcularla.

Tenemos que hallar tres equivalentes de Thévenin, según qué fuente estemos considerando. En primer término, observemos que los tres equivalentes tienen la misma R_{th}, ya que para hallarla, anulamos las fuentes independientes y, en los tres casos, obtenemos el mismo circuito. Del análisis del circuito resultante, obtenemos

$$R_{th} = ((((2R||2R) + R)\,||\,2R) + R)\,||\,2R = (((R + R)\,||\,2R) + R)\,||\,2R$$
$$= ((2R\,||\,2R) + R)\,||\,2R = (R + R)\,||\,2R = R$$

Calculemos V^1_{Th}, la tensión de vacío cuando consideramos V_1 y anulamos V_2 y V_3. Del circuito resultante, obtenemos $\boxed{V^1_{Th} = \dfrac{V_1}{2}}$.

Consideremos ahora V_2. En el circuito resultante, observemos que hay una tensión intermedia, que llamaremos V_2'. A partir de esta tensión, tenemos que V^2_{Th} vale

$$V^2_{Th} = V_2'.\frac{2R}{R+2R} = \frac{2}{3}.V_2'$$

Para hallar V_2', hacemos la resistencia equivalente entre ese nodo y tierra, que da $2R||3R = \frac{6}{5}R$ y nos queda un nuevo divisor de tensión:

$$V_2' = V_2.\frac{\frac{6}{5}R}{2R+\frac{6}{5}R} = V_2.\frac{6R}{16R} = \frac{3}{8}.V_2 \Rightarrow \boxed{V^2_{Th} = \frac{3}{8}.\frac{2}{3}.V_2 = \frac{V_2}{4}}$$

Trabajando con la misma idea (y con un poco más de cuentas) llegamos a $\boxed{V_{Th}^3 = \frac{V_3}{8}}$.

b) Aplicando superposición, hallar v_o en función de V_1, V_2 y V_3.

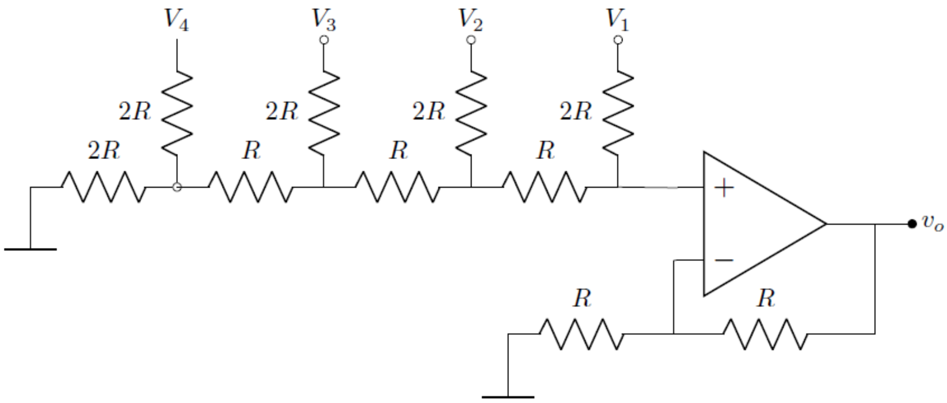
Observemos que el operacional está en una configuración no inversora, de ganancia 2. Aplicamos superposición y consideramos las fuentes de a una por vez, anulando las demás (recordar que *anularlas* significa sustituirlas por una fuente del mismo tipo de valor cero, o sea, es equivalente a cortocircuitarlas). Podemos usar los equivalentes de Thévenin hallados antes. Como no entra corriente por la pata + del operacional, la tensión de dicha pata es exactamente el V_{Th}^i y, a la salida, tenemos el doble de dicha tensión. Sumando los efectos, tenemos que

$$v_o = 2.\left[V_{Th}^1 + V_{Th}^2 + V_{Th}^3\right] = \frac{V_3}{4} + \frac{V_2}{2} + V_1$$

c) ¿Cuál es el máximo valor posible de v_o? ¿Cuál es el mínimo valor no nulo de v_o?

El máximo valor será cuando todas las fuentes estén encendidas (y vale $v_o^{max} = E(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{7}{4}E$) y el mínimo no nulo será cuando esté encendida solamente la fuente V_1 (y vale $v_o^{min} = \frac{1}{4}E$).

d) ¿Inferir cómo quedarían v_o y los valores pedidos en la parte c) si modificáramos el circuito agregando un nuevo juego de resistencias y V_4?



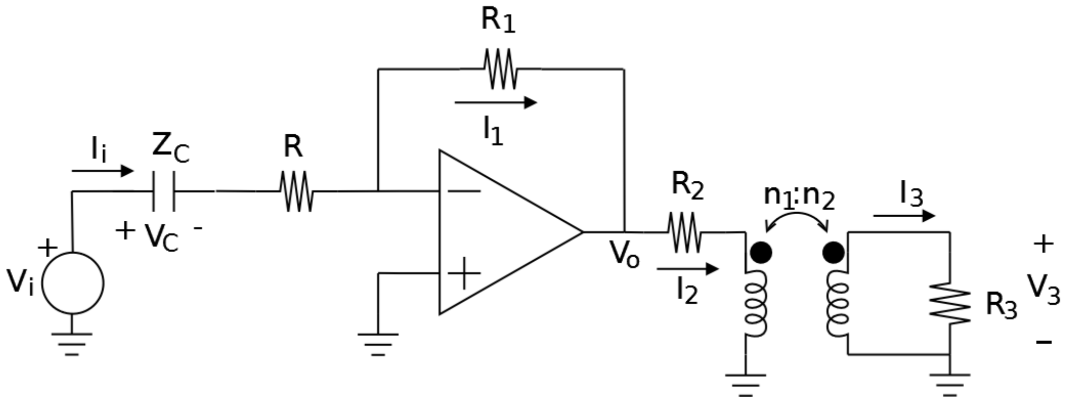
De acuerdo a lo ya visto, tendremos

$$v_o = \frac{V_4}{8} + \frac{V_3}{4} + \frac{V_2}{2} + V_1$$

y

$$v_o^{max} = E(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{15}{8}E \quad \text{y} \quad v_o^{min} = \frac{1}{8}E$$

Problema 4



Para cada diagrama fasorial, indicar si representa o no al circuito en fasores de la figura y por qué.

I. En el circuito en régimen sinusoidal, observamos que tenemos una configuración inversora. Debido al cortocircuito virtual, tenemos una tierra virtual en la pata -. como no entra corriente al operacional por sus patas de entrada, entonces $I_i = I_1$. Además, como $V_o = -R_1 I_1 = -R_1 I_i$, entonces V_o es colineal con I_i, y de sentido opuesto.

II. A la salida del operacional, tenemos la serie de la resistencia R_2 con un transformador ideal cargado con R_3 en su secundario. R_3 puede pasarse al primario como $\frac{n_1^2}{n_2^2}R_3$, por lo que la corriente I_2 circula por una impedancia equivalente resistiva pura!!. Entonces, V_o e I_2 con colineales, con el mismo sentido.

III. Por ser un transformador ideal, sabemos que $n_1 I_2 - n_2 I_3 = 0$, por lo que I_2 e I_3 son colineales y del mismo sentido.

IV. Observemos que las corrientes I_1 e I_2 son de sentido opuesto y colineales con V_o.

V. Sabemos que V_C e I_i son ortogonales, con la corriente adelantando la tensión.

VI. Finalmente, la fuente V_i ve la impedancia $R + Z_C$, que es capacitiva, por lo que I_i adelanta a V_i.

Veamos entonces cada uno de los diagramas.

a) En este diagrama, V_C adelanta a I_i, por lo que no corresponde.

b) En este diagrama, I_2 e I_3 no tienen el mismo sentido. Además, V_C adelanta a I_i. No corresponde.

c) En este diagrama, I_2 e I_3 no tienen el mismo sentido, I_i e I_1 no tienen el mismo sentido y V_o e I_2 no tienen el mismo sentido. No corresponde.

d) En este diagrama, I_i atrasa a V_i, lo que correspondería a una carga inductiva. Además, I_i atrasa a V_C. No corresponde.

e) Este diagrama cumple con todos los requisitos vistos antes, así que corresponde.

f) I_i atrasa a V_i, lo que correspondería a una carga inductiva. No corresponde.