Teoría de circuitos

Primer parcial

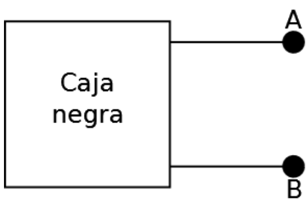
2^o semestre 2018

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**

Problema 1 (8 puntos)

Se considera la caja negra de la figura, funcionando en régimen sinusoidal.

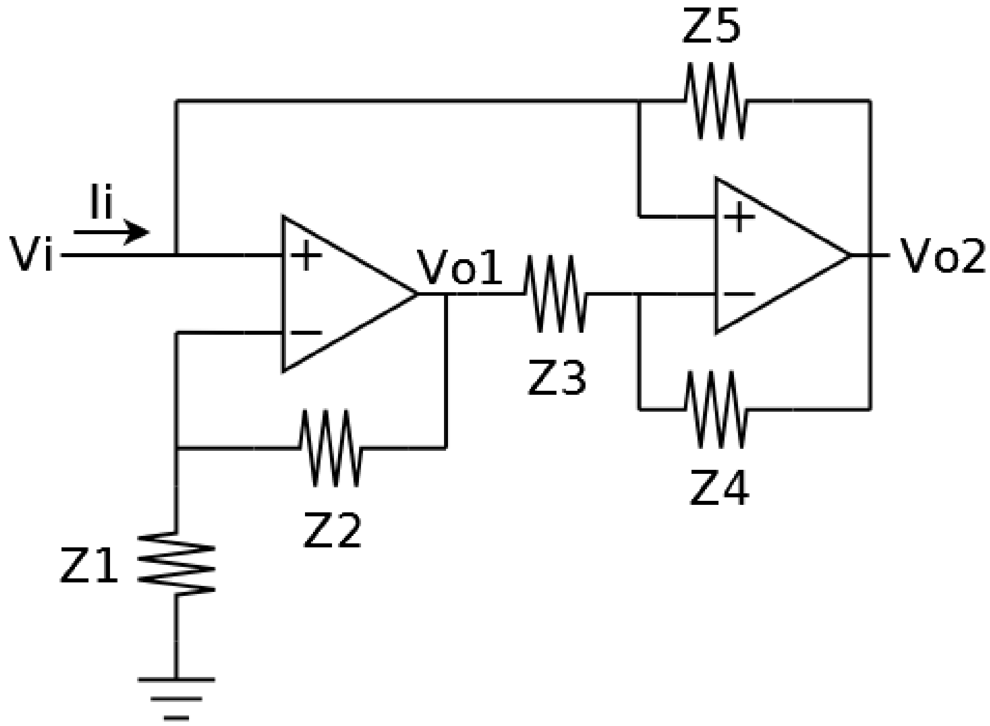


Hallar los equivalentes de **Thévenin** y **Norton** de la caja negra en régimen, sabiendo que

- si se le conecta una resistencia de $5k\Omega$, el fasor de la tensión en bornes, medida desde A a B es $\tilde{V}_1 = (5 - j15)V$;
- si se le conecta un condensador de impedancia $-j3k\Omega$, le consume a la caja negra una corriente de fasor asociado $\tilde{I}_2 = (4.5 - j6)mA$.

Problema 2 (13 puntos)

Sea el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal. La frecuencia de trabajo ω es conocida, así como las impedancias $Z_i(j\omega)$, $i = 1, \ldots, 5$.



a) I. Hallar la relación entre los fasores $V_i(j\omega)$ y $V_{o1}(j\omega)$. Mostrar en particular que

$$V_{01} - V_i = \frac{Z_2}{Z_1}.V_i$$

II. Hallar la relación entre los fasores $V_i(j\omega)$ y $V_{o2}(j\omega)$.

III. Mostrar que la impedancia vista entre la pata + del primer operacional y tierra, $Z_i(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{I_i(j\omega)}$, vale:

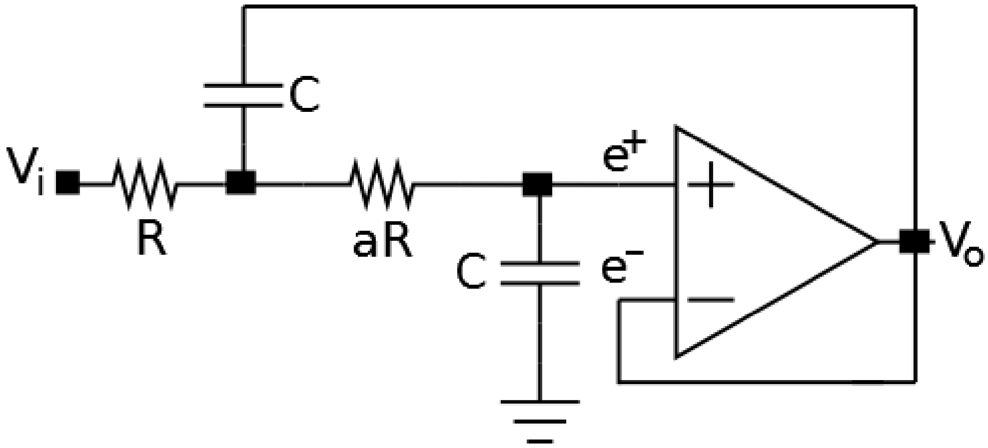
$$Z_i(j\omega) = \frac{Z_1.Z_3.Z_5}{Z_2.Z_4}$$

b) I. Para el caso en que $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_5 = R$ y Z_4 es la impedancia asociada a un condensador de capacidad C, hallar $Z_i(j\omega)$, indicando si es capacitiva o inductiva.

II. Dibujar un diagrama fasorial que incluya V_i, V_{o1}, V_{o2} e I_i.

Problema 3 (15 puntos)

En el circuito de la figura, el operacional es ideal.



a) Explicando claramente cómo analiza el circuito, hallar la transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

Verificar que el circuito implementa un **filtro pasabajos** de segundo orden, de la forma:

$$H(j\omega) = K.\frac{\omega_1.\omega_2}{(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_2)}$$

b) Hallar un posible valor de a para implementar un filtro de segundo orden con dos singularidades reales separadas una década.

El valor de a hallado se mantendrá para el resto del ejercicio.

c) Realizando un análisis por bandas, bosquejar los diagramas de Bode asintóticos. Explicar bien cómo lo hace.

d) ¿Existe una frecuencia de trabajo ω_0 a la cual la salida en régimen presente un retraso de 120^o respecto de la entrada? Justificar la respuesta y si es afirmativa, ubicar ω_0 aproximadamente en el diagrama de Bode.

Problema 4 (14 puntos)

La figura muestra un modelo simplificado de un motor de inducción monofásico (sistema electromecánico) operando en régimen sinusoidal, conectado a una fuente de alimentación a través de un transformador ideal. El primario tiene n_1 vueltas y el secundario n_2. La potencia disipada en R representa la potencia mecánica entregada a la carga más pérdidas rotacionales de vacío (fricción en rodamientos, histéresis, etc.). El campo inducido por la inductancia L es el que magnetiza el circuito magnético del motor, y se mantiene constante. Se pide:

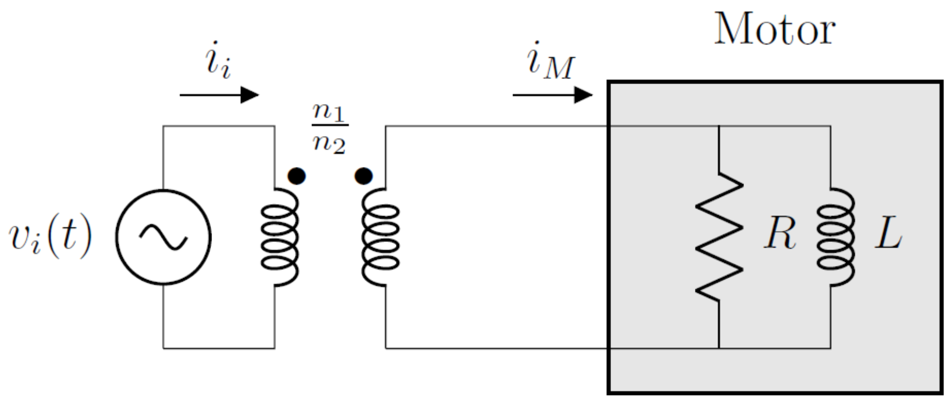
a) Hallar la impedancia equivalente vista por la fuente, mostrando que tiene el mismo argumento que la impedancia equivalente del motor.

b) Tomando como referencia el fasor de tensión de la fuente, realizar un diagrama fasorial que incluya las tensiones y corrientes de la resistencia, de la inductancia, del primario y secundario del transformador y la corriente de la fuente.

c) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente.

d)
   I. Si se coloca un condensador C en bornes del motor, calcular analíticamente, ayudándose con el diagrama fasorial, el valor del condensador que anule la potencia reactiva consumida por el motor a la fuente.
   II. ¿Si se prefiriera colocarlo en bornes de la fuente, el condensador necesario sería mayor o menor que el calculado antes?

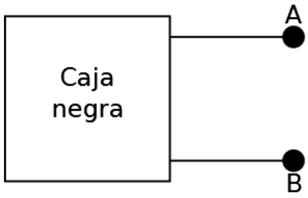
Los datos del modelo son: $v(t) = 3110V \sin(\omega t)$, $R = 33\Omega$, $L = 0.4Hy$ y $f = 50Hz$, $n_1 = 10$, $n_2 = 1$. Se sugiere sustituir por los valores numéricos recién al final de los planteos.



Solución

Problema 1

Se considera la caja negra de la figura, funcionando en régimen sinusoidal.



Hallar los equivalentes de Thévenin y Norton de la caja negra en régimen, sabiendo que

- si se le conecta una resistencia de $5k\Omega$, el fasor de la tensión en bornes, medida desde A a B es $\tilde{V}_1 = (5 - j15)V$;
- si se le conecta un condensador de impedancia $-j3k\Omega$, le consume a la caja negra una corriente de fasor asociado $\tilde{I}_2 = (4.5 - j6)mA$.

Representamos la caja negra por su eqivalente Thévenin en régimen sinusoidal, de tensión V_{Th} e impedancia Z_{Th}. Entonces, al conectarle una impedancia entre los puntos A y B, nos queda una malla que define la corriente que circula y un divisor de tensión para determinar la tensión en la impedancia conectada. Con los resultados de los dos experimentos que nos dan, podemos determinar las dos incógnitas del modelo Thévenin.

Para una impedancia $Z_1 = 5k\Omega$, la tensión resultante es $V_1 = (5 - j15)V$. Como sabemos que

$$V_1 = V_{Th}.\frac{Z_1}{Z_{Th} + Z_1}$$

obtenemos

$$V_{Th} = V_1.\frac{Z_{Th} + Z_1}{Z_1}$$

Por otro lado, al conectar una impedancia $Z_2 = j3k\Omega$, medimos una corriente $I_2 = (4.5-j6)mA$. Planteando la malla, nos queda

$$I_2 = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_2} \Rightarrow V_{Th} = (Z_{Th} + Z_2).I_2$$

Igualando las dos expresiones de V_{Th}, obtenemos una ecuación para Z_{Th}:

$$V_1.\frac{Z_{Th} + Z_1}{Z_1} = (Z_{Th} + Z_2).I_2 \Rightarrow Z_{Th}\left(\frac{V_1}{Z_1} - I_2\right) = Z_2.I_2 - V_1$$

De donde

$$\boxed{Z_{Th} = \frac{Z_1(Z_2.I_2 - V_1)}{V_1 - Z_1.I_2}}$$

De aquí en más podemos sustituir por los valores numéricos y luego calcular también V_{TH} de algunas de las primeras expresiones.

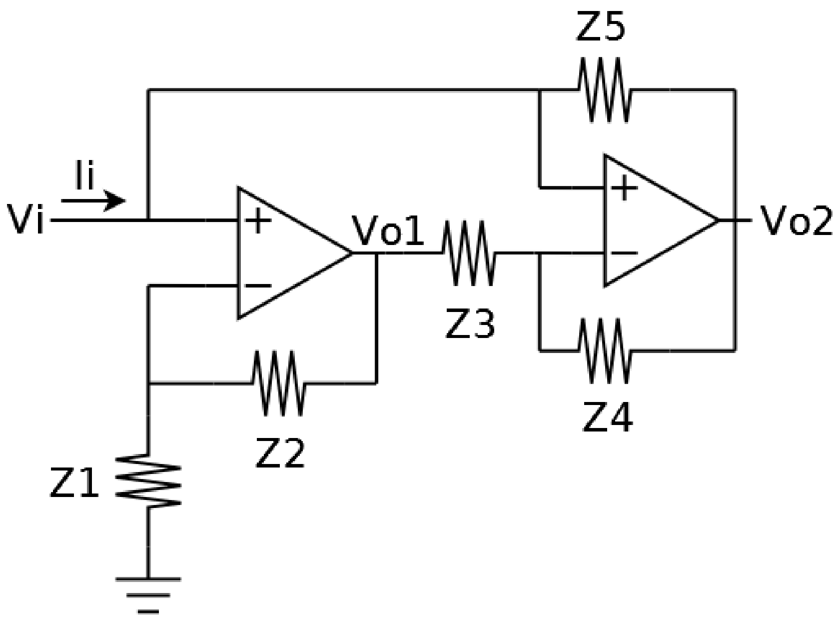
Para obtener el equivalente Norton, nos falta obtener el valor de

$$I_{CC} = \frac{V_{Th}}{Z_{TH}}$$

Para concluir el ejercicio, faltan realizar las cuentas y dibujar los respectivos equivalentes. En el caso del Norton, se utiliza la admitancia $Y_{CC} = 1/Z_{Th}$.

Problema 2

Sea el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal. La frecuencia de trabajo ω es conocida, así como las impedancias $Z_i(j\omega)$, $i = 1, \ldots, 5$.



a) I. Hallar la relación entre los fasores $V_i(j\omega)$ y $V_{o1}(j\omega)$. Mostrar en particular que

$$V_{01} - V_i = \frac{Z_2}{Z_1}.V_i$$

Observemos en primer lugar que la tensión de entrada V_i está presente en todas las entradas de los operacionales, debido al cortocircuito virtual que impone la idealidad de la ganancia infinita. El primer operacional implementa una configuración non inversora. Planteando el divisor de tensión en la pata $-$ del primer operacional (no entra corriente al operacional), obtenemos

$$V_i = V_{o1}.\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow \boxed{V_{o1} = V_i\left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)} \Rightarrow \boxed{V_{o1} - V_i = \frac{Z_2}{Z_1}V_i}$$

II. Hallar la relación entre los fasores $V_i(j\omega)$ y $V_{o2}(j\omega)$.

Planteamos el nudo en la pata $-$ del segundo operacional, (no entra corriente al operacional):

$$\frac{V_{o1}-V_i}{Z_3}=\frac{V_i-V_{o2}}{Z_4}$$

Usando la parte anterior

$$\frac{Z_2}{Z_1Z_3}.V_i=\frac{V_i-V_{o2}}{Z_4}\Rightarrow V_{o2}=\left(1-\frac{Z_2Z_4}{Z_1Z_3}\right).V_i\Rightarrow\boxed{V_{o2}=\frac{Z_1Z_3-Z_2Z_4}{Z_1Z_3}.V_i}$$

Observemos que $V_{o2}-V_i=-\frac{Z_2Z_4}{Z_1Z_3}.V_i$.

III. Mostrar que la impedancia vista entre la pata + del primer operacional y tierra, $Z_i(j\omega)=\frac{V_i(j\omega)}{I_i(j\omega)}$, vale:

$$Z_i(j\omega)=\frac{Z_1.Z_3.Z_5}{Z_2.Z_4}$$

La impedancia vista la podemos calcular así. Primero observemos que la corriente de entrada I_i circula toda por Z_5. Entonces

$$I_i=\frac{V_i-V_{o2}}{Z_5}=\frac{Z_2Z_4}{Z_1Z_3Z_5}.V_i\Rightarrow\boxed{Z_i=\frac{Z_1Z_3Z_5}{Z_2Z_4}}$$

b) I. Para el caso en que $Z_1=Z_2=Z_3=Z_5=R$ y Z_4 es la impedancia asociada a un condensador de capacidad C, hallar $Z(j\omega)$, indicando si es capacitiva o inductiva.

Con los datos, resulta

$$Z_i(j\omega)=\frac{RRR}{R\frac{1}{Cj\omega}}=R^2Cj\omega$$

por lo que $Z_i(j\omega)$ equivale a una inductancia de valor $L=R^2C$ (y por lo tanto es inductiva!!!).

II. Dibujar un diagrama fasorial que incluya V_i, V_{o1}, V_{o2} e I_i.

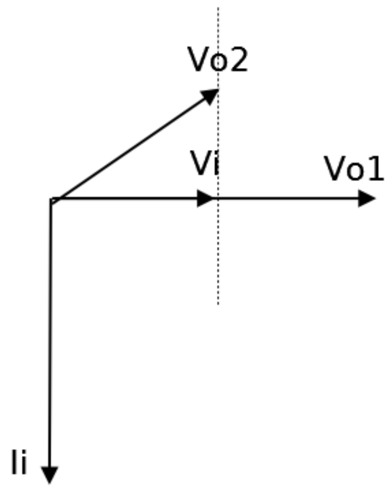
Obtengamos las expresiones concretas de los fasores de interés:

$$V_{o1}=V_i\left(1+\frac{Z_2}{Z_1}\right)=V_i\left(1+\frac{R}{R}\right)=2V_i$$

$$V_{o2}=\frac{Z_1Z_3-Z_2Z_4}{Z_1Z_3}.V_i=\frac{RR-R\frac{1}{Cj\omega}}{RR}.V_i=\left(1-\frac{1}{RCj\omega}\right).V_i=\left(\frac{RCj\omega-1}{RCj\omega}\right).V_i$$

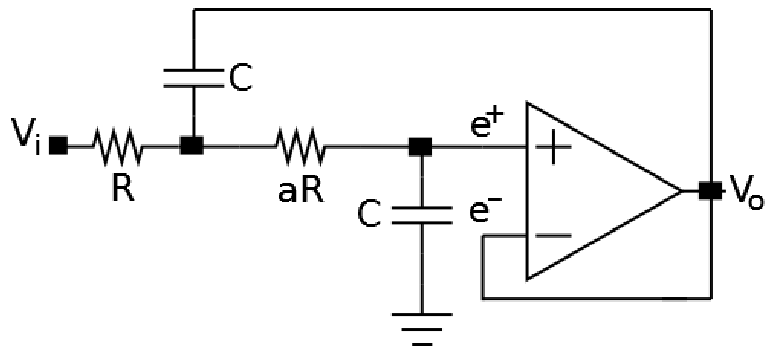
$$I_i=\frac{V_i}{Z_i}=\frac{V_i}{Lj\omega}$$

Construimos el diagrama fasorial:



Problema 3

Sabiendo cómo se comporta un condensador en alta y baja frecuencia, notar que para alta frecuencia,



la salida es nula, en tanto que en baja frecuencia, la salida es proporcional a la entrada, con cierta ganancia K.

a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal. Verificar que el circuito implementa un **filtro pasabajos** de segundo orden, de la forma:

$$H(j\omega) = K.\frac{\omega_1.\omega_2}{(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_2)}$$

Pasamos al circuito equivalente en fasores. Observemos que el operacional configura un sguidor, por lo que la para menos es igual a la tensión de salida V_o. Denotemos por V_1 el nodo intermedio. Planteando la Ley de Kirchoff para dicho nodo, nos queda:

$$\frac{V_i - V_1}{R} = (V_1 - V_o)\left[Cj\omega + \frac{1}{aR}\right] = (V_1 - V_o)\left[\frac{1 + aRCj\omega}{aR}\right]$$

Operando, obtenemos

$$\frac{V_i}{R} = V_1\left[\frac{1}{R} + \frac{1 + aRCj\omega}{aR}\right] - V_o\left[\frac{1 + aRCj\omega}{aR}\right]$$

Haciendo común denominador:

$$aV_i = V_1\left[a+1+aRCj\omega\right] - V_o\left[1+aRCj\omega\right]$$

Planteamos ahora el divisor de tensión que relaciona la tensión V_1 con la pata + del operacional (que es igual a la salida por el cortocircuito virtual):

$$V_o = V_1 \frac{\frac{1}{Cj\omega}}{aR+\frac{1}{Cj\omega}} \Rightarrow V_1 = V_o\left[1+aRCj\omega\right]$$

Sustituyendo arriba, nos queda

$$aV_i = V_o\left[1+aRCj\omega\right]\left[a+1+aRCj\omega\right] - V_o\left[1+aRCj\omega\right] =$$

$$= V_o\left[1+aRCj\omega\right]\left[a+1+aRCj\omega-1\right] = aV_o\left[1+aRCj\omega\right]\left[1+RCj\omega\right]$$

De donde la transferencia en régimen sinusoidal es:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\left[1+aRCj\omega\right]\left[1+RCj\omega\right]}}$$

Verificamos que tiene la forma pedida, con $K=1$, $\omega_1 = \frac{1}{RC}$ y $\omega_2 = \frac{1}{aRC}$.

b) Hallar un posible valor de a para implementar un filtro de segundo orden con dos singularidades reales separadas una década.

Observemos que se cumple: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{a}$, por lo que eligiendo $a=10$ ó $a=\frac{1}{10}$, las frecuencias críticas distan una década.

c) Bosquejar los diagramas de Bode asintóticos.

Partimos de la expresión genérica

$$H(j\omega) = \frac{\omega_1.\omega_2}{(j\omega+\omega_1)(j\omega+\omega_2)}$$

Realizamos un análisis por bandas, esencialmente despreciando la parte real o la imgainaria de cada término de primer orden. En función de las frecuencias críticas, tenemos tres bandas:

$$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_1.\omega_2}{(\omega_1)(\omega_2)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 0\,db \\ arg(H) & \approx & 0 \end{cases}$$

$$\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_1.\omega_2}{(j\omega)(\omega_2)} = \frac{\omega_1}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(\omega_1) - 20\log(\omega)\,db \\ arg(H) & \approx & -\frac{\pi}{2}\text{ (ó }+\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\omega_2 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_1.\omega_2}{(j\omega)(j\omega)} = \frac{\omega_1\omega_2}{(j\omega)^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(\omega_1\omega_2) - 40\log(\omega)\,db \\ arg(H) & \approx & \pi\text{ (ó }-\pi) \end{cases}$$

Al ser singularidades de primer orden, que solo pueden aportar variaciones de fase de $\pm\frac{\pi}{2}$, la fase de la transferencia decrece de manera monónota y continua desde 0 hasta $-\pi$ radianes. La figura 1 muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de $H(j\omega)$.

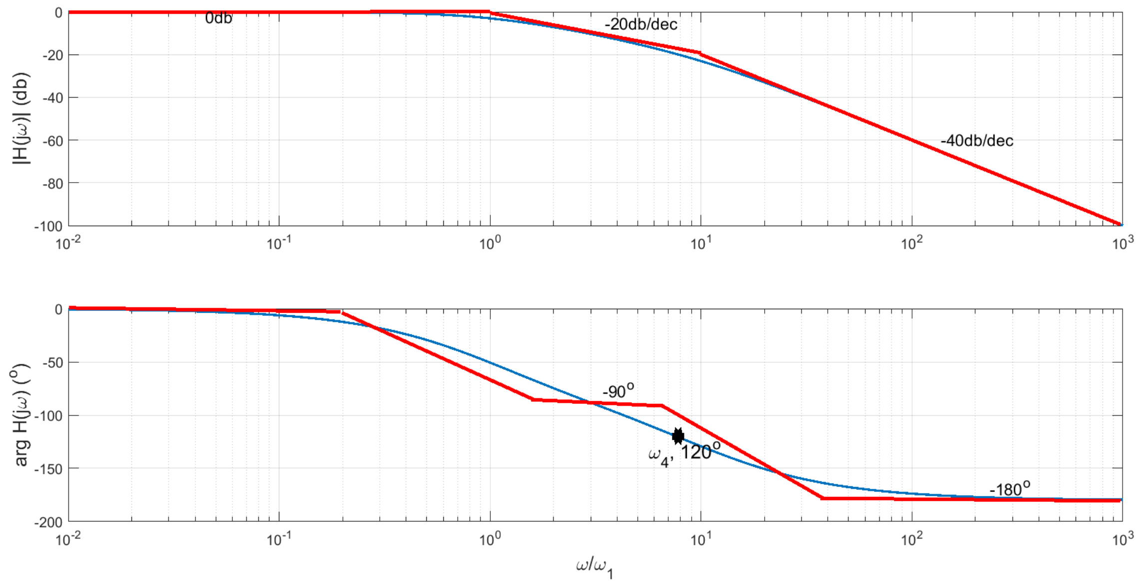


Figura 1: Diagramas de Bode real y asintótico del Problema 3.

d) ¿Existe una frecuencia de trabajo ω_0 a la cual la salida en régimen presente un retraso de 120^o respecto de la entrada? Justificar la respuesta y si es afirmativa, ubicarla aproximadamente en el diagrama de Bode.

La respuesta en régimen a una entrada sinusoidal pura del tipo

$$v_i(t) = A.\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

es de la forma

$$v_o(t) = A.|H(j\omega_0)|.\cos\left(\omega_0 t + \varphi + argH(j\omega_0)\right)$$

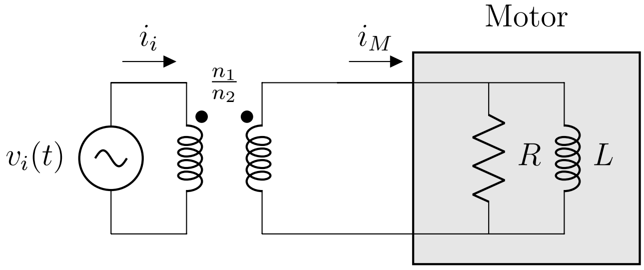
Del diagrama asintótico, y de la continuidad del argumento de H para este caso, sabemos que la fase varía continuamente desde 0 a $-\pi$ radianes, por lo que existirá una pulsación ω_1 a la que el sistema introduce en régimen un retraso de 120 grados. Como las singularidades están espaciadas una década, podemos afirmar que se cumple lo siguiente:

$$argH(j\omega_1) \approx -45^o \quad , \quad argH(j\omega_2) \approx -135^o$$

Por lo tanto, se cumplirá $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$.

Problema 4

La figura muestra un modelo simplificado de un motor de inducción monofásico (sistema electromecánico) operando en régimen sinusoidal, conectado a una fuente de alimentación a través de un transformador ideal. El primario tiene n_1 vueltas y el secundario n_2. La potencia disipada en R representa la potencia mecánica entregada a la carga más pérdidas rotacionales de vacío (fricción en rodamientos, histéresis, etc.). El campo inducido por la inductancia L es el que magnetiza el circuito magnético del motor, y se mantiene constante.
Los datos del modelo son: $v(t) = 3110V \sin(\omega t)$, $R = 33\Omega$, $L = 0.4Hy$ y $f = 50Hz$, $n_1 = 10$, $n_2 = 1$.
Se pide:



a) Hallar la impedancia equivalente vista por la fuente, mostrando que tiene el mismo argumento que la impedancia equivalente del motor.

La impedancia conectada en el secundario del transformador ideal es

$$Z_M(j\omega) = R||Lj\omega = \frac{RLj\omega}{R + Lj\omega}$$

Denotemos por V_1, V_2, I_1 e I_2 los fasores de las corrientes y tensiones de primario y secundario del transformador (medidas con la la convención estándar: tensiones medidas desde los puntos y corrientes entrando por los puntos). Entonces las ecuaciones del transformador ideal son

$$\begin{cases} \frac{V_1(j\omega)}{n_1} & = & \frac{V_2(j\omega)}{n_2} \\ n_1 I_1(j\omega) & + & n_2 I_2(j\omega) = 0 \end{cases}$$

Observemos que las tensiones y corrientes son, respectivamente, colineales. La malla del secundario nos dice que $V_2(j\omega) = -Z_M(j\omega).I_2(j\omega)$, donde el signo de $-$ viene por la convención con que se definió $I_2(j\omega)$.

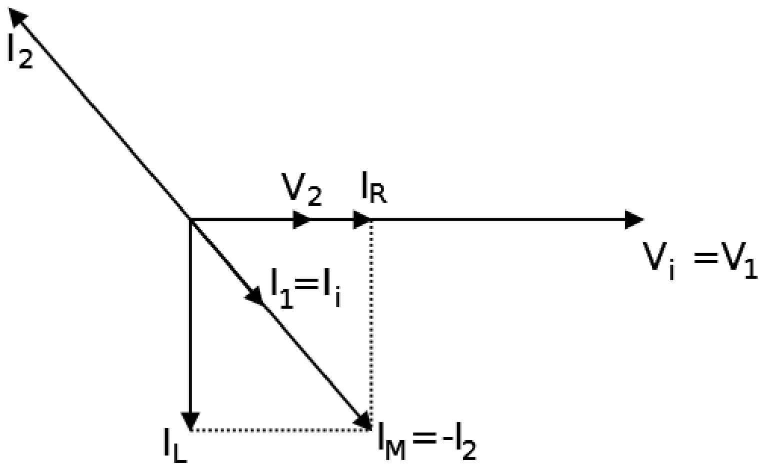
La impedancia vista desde el primario, la que ve la fuente, vale $Z_v(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{I_1(j\omega)}$, con $V_i = V_1$. De las ecuaciones del transformador, obtenemos

$$Z_v(j\omega) = \frac{\frac{n_1}{n_2} V_2(j\omega)}{-\frac{n_2}{n_1} I_2(j\omega)} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(-\frac{V_2}{I_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 .Z_M(j\omega)$$

Obsevemos que las impedancias Z_M y Z_v tienen módulos proporcionales de razón igual a la relación de transformación al cuadrado, en tanto sus argumentos son iguales.

b) Realizar un diagrama fasorial de las tensiones y corrientes de todos los elementos del circuito.

Las tensiones de primario y secundario son colineales, con igual fase, difiriendo sólo en su magnitud. La tensión del secundario se aplica a la resistencia y a la inductancia, por lo que, respectivamente, la corriente por R será colineal con la tensión y la corriente por L será perpendicular, retrasada un ángulo recto. La impedancia vista por la fuente es de tipo inductiva, por lo que la corriente del primario estará retrasada un ángulo menor a 90^o especto de la tensión de la fuente.



(Las amplitudes y fases exactas se obtienen sustituyendo por los valores numéricos).

c) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente.

Podemos trabajar del lado del primario con la impedancia vista por la fuente o del lado del secundario con la tensión del secundario. Al ser ideal, el transformador no consume potencia. Al tener un modelo paralelo de la impedancia del motor, tenemos que

$$P = \frac{|V_2(j\omega)|^2}{R} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 . \frac{|V_1(j\omega)|^2}{R} \quad , \quad Q = \frac{|V_2(j\omega)|^2}{Lw} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 . \frac{|V_1(j\omega)|^2}{Lw}$$

y $S = P + jQ$.

d) I. Si se coloca un condensador C en bornes del motor, calcular analíticamente, ayudándose con el diagrama fasorial, el valor del condensador que anule la potencia reactiva consumida por el motor a la fuente.

Del diagrama fasorial, vemos que tenemos que colocar un elemento que aporte la corriente necesaria para alinear la corriente y la tensión de la fuente. Otra forma de verlo es que el elemento tiene que aportar la reactiva que consume el motor. Por cualquiera de los enfoques, y colocando un condensador de valor C en bornes del motor, llegamos la expresión:

$$C_M = \frac{1}{L\omega^2}$$

II. ¿Si se prefiriera colocarlo en bornes de la fuente, el condensador necesario sería mayor o menor que el calculado antes?

Colocar el condensador del lado del primario es equivalente a pasar al primario el condensador calculado anteriormente. Como ya vimos, del lado del primario, la impedancia pasa multiplicada por la relación de transformación al cuadrado, por lo que en el primario tendremos un condensador cuya impedancia vale

$$\frac{1}{C_p j\omega} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 . \frac{1}{C_M j\omega} = \frac{1}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 . C_M j\omega} \Rightarrow C_p = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 . C_M = \frac{C_M}{100}$$