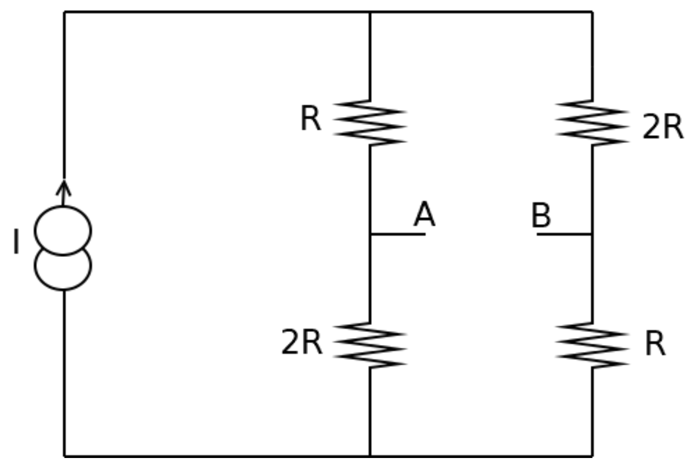
Teoría de Circuitos: examen del 2 de marzo de 2021.

Problema 1



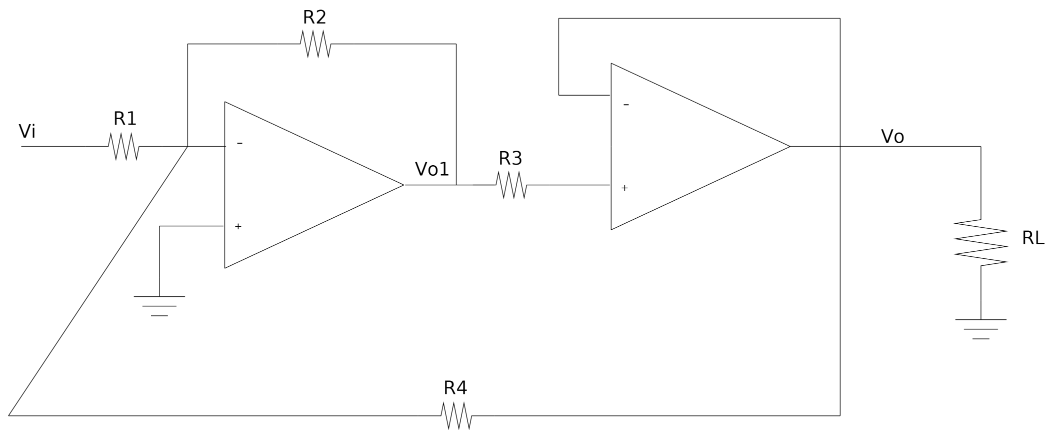
Se considera el circuito de la figura, donde la fuente es de continua.

(a) Hallar el equivalente de Thévenin entre los puntos A y B.

(b) Hallar la potencia que disiparía una resistencia de valor $2R$ conectada entre A y B.

Problema 2

Se pide analizar el circuito de la figura, **explicando claramente cómo enfrenta los operacionales**, que son ideales.



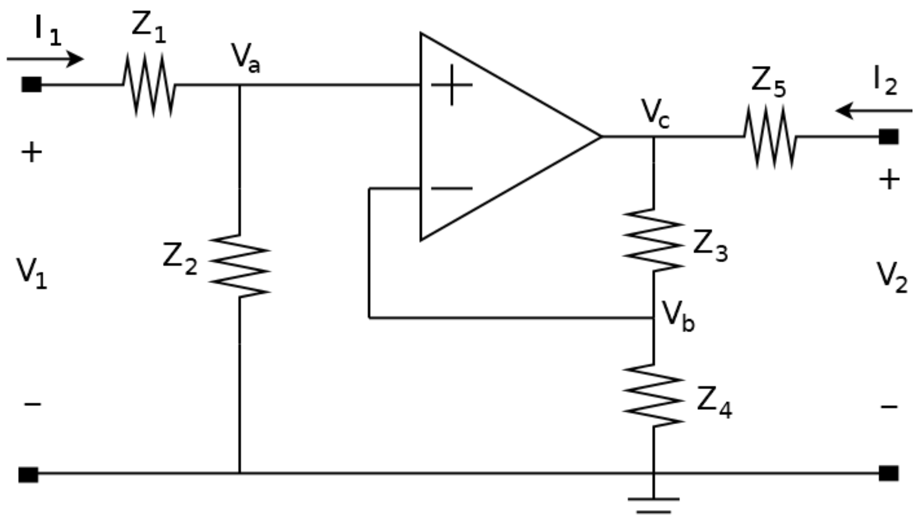
(a) Hallar la relación entre la tensión V_{o1} y las tensiones V_i y V_o.

(b) A partir de lo anterior, hallar la relación entre la entrada V_i y la salida V_o.

Problema 3

(a) En un cuadripolo genérico, del cual se conocen los parámetros (A, B, C, D), calcular la impedancia vista desde el lado 1 cuando el lado 2 se carga con una impedancia Z_L.

(b) Se considera el cuadripolo de la figura



Hallar los parámetros (A, B, C, D) y verificar que:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{Z_4}{Z_2(Z_3 + Z_4)} \times \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_5(Z_1 + Z_2) \\ 1 & Z_5 \end{bmatrix}$$

Problema 4

Se tiene una carga trifásica, formada por tres impedancias idénticas Z conectadas en triángulo, alimentada por un sistema trifásico de fuentes equilibrado y perfecto, de $380V$ eficaces de tensión compuesta y $50Hz$.

(a) Hallar un modelo **paralelo** para la carga ($Z = R_P || jX_P$), sabiendo que si se miden las potencias activas y reactivas totales consumidas, se obtiene $P = 7504W$ y $Q = 4332VAR$, con factor de potencia inductivo.

(b) Compensar la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes, sin modificar la potencia activa que entrega. Para ello indicar qué componentes colocaría, sus valores y cómo los conectaría.

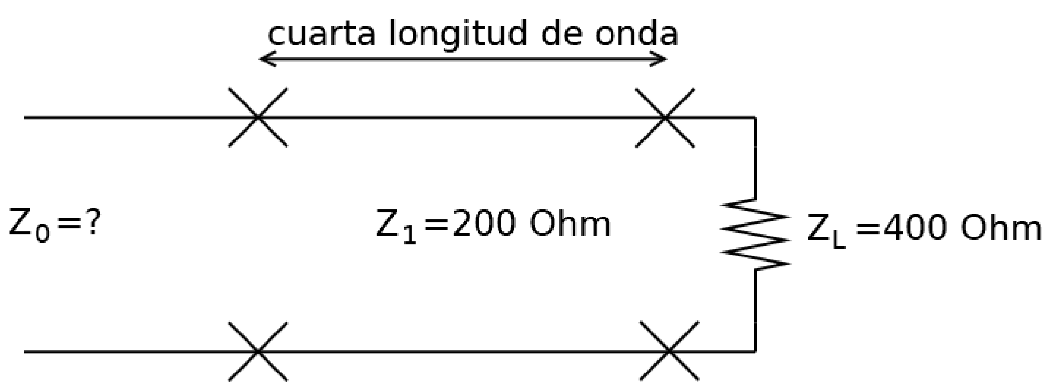
Problema 5

(a) Esta primera parte es general. Se considera una línea de transmisión sin pérdidas, de impedancia característica Z_{linea}, terminada con una impedancia Z_{carga}. La siguiente expresión representa la impedancia vista a una distancia d de la carga:

$$Z(d) = Z_{linea} \cdot \frac{Z_{carga} + jZ_{linea}. \tan \beta d}{Z_{linea} + jZ_{carga}. \tan \beta d}$$

Hallar la expresión de la impedancia vista a la entrada de un transformador de 1/4 longitud de onda, de impedancia característica Z_{transf} cuando se lo termina con una impedancia Z_{carga}.

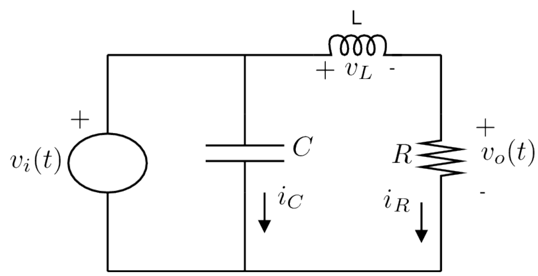
(b) Esta parte refiere a la figura. Se conecta una impedancia Z_L a una línea de transmisión de impedancia característica Z_0 a través de un transformador de cuarta longitud de onda, de impedancia característica Z_1. ¿Cuál es el valor de la impedancia característica Z_0 si se sabe que al realizar la conexión de la figura, no hay onda reflejada hacia la fuente?



Problema 6

El circuito de la figura se alimenta con una fuente sinusoidal $v_i(t) = E\cos(\omega_o t)$. Se cumple que

$$E = 100V \quad , \quad R = 5\Omega \quad , \quad L = 0,866Hy \quad , \quad C = 5000\mu F$$



(a) Indicar para qué valor positivo de frecuencia la amplitud de la corriente i_R (corriente en régimen por la resistencia R) vale 10 A. Ésta será la frecuencia de trabajo en adelante.

(b) Calcular los fasores asociados a las corrientes i_R e i_C y a las tensiones v_R y v_L e incluirlos en un diagrama fasorial.

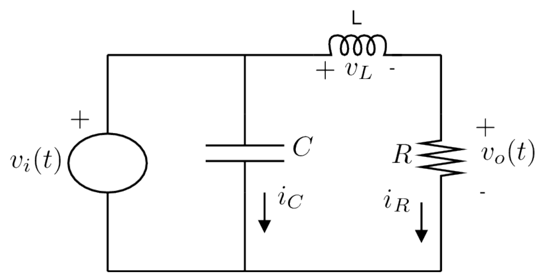
(c) Dar la expresión temporal de la tensión en régimen en bornes de la resistencia.

(d) Calcular la potencia activa y reactiva entregadas por la fuente.

Problema 7

El circuito de la figura se alimenta con una fuente sinusoidal $v_i(t) = E\cos(\omega_o t)$. Se cumple que

$$E = 100V \quad , \quad R = 100\Omega \quad , \quad L = 0,866Hy \quad , \quad C = 5\mu F \quad , \quad f_o = 50Hz$$



(a) Calcular los fasores asociados a las corrientes i_R e i_C y a las tensiones v_R y v_L e incluirlos en un diagrama fasorial.

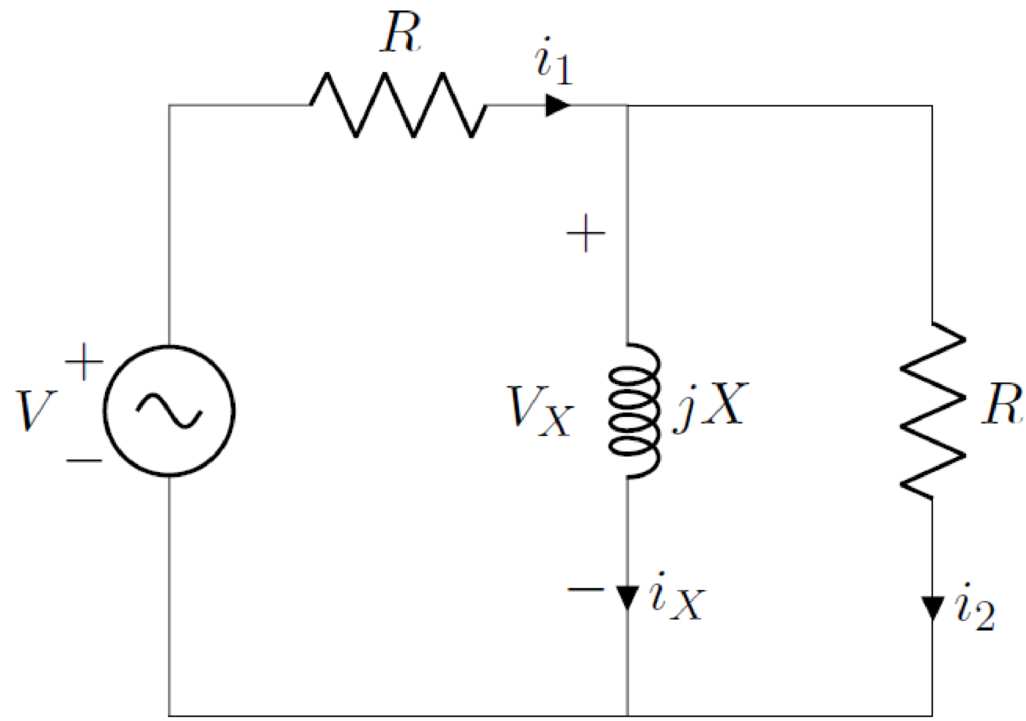
(b) Dar la expresión temporal de la tensión en régimen en bornes de la inductancia.

(c) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente.

(d) Se desea compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, sin alterar la potencia activa que entrega la misma. Indicar qué elemento colocaría, de qué valor y cómo lo conectaría.

Problema 8

El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal, alimentado por una fuente de fasor de amplitud asociado V. Se sabe además que $X > 0$.



(a) Hallar V_X en función de V, R y X.

(b) Hallar X en función de R para que el fasor V_X adelante $\pi/4$ a V. **Usar este valor de X para las partes que siguen.**

(c) Realizar un diagrama fasorial que contenga a V, V_X, I_1, I_X, I_2 (¡no se pide calcular los fasores!).

(d) Si $|V| = 100V$ y $R = 100\Omega$, hallar la potencia reactiva entregada por la fuente.

Problema 9

Se considera la siguiente transferencia en régimen, de primer orden

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + ka}{j\omega + a}$$

con $k > 1$ y a positivo.

(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

(b) Bosquejar los diagramas reales.

(c) Se considera una entrada sinusoidal de la forma $v_i(t) = A\cos(\omega t)$. Hallar la pulsación ω_1 positiva para la cual se da el máximo desfasaje posible entre la entrada y la respectiva salida en régimen.

Problema 10

Se considera la siguiente transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n.(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

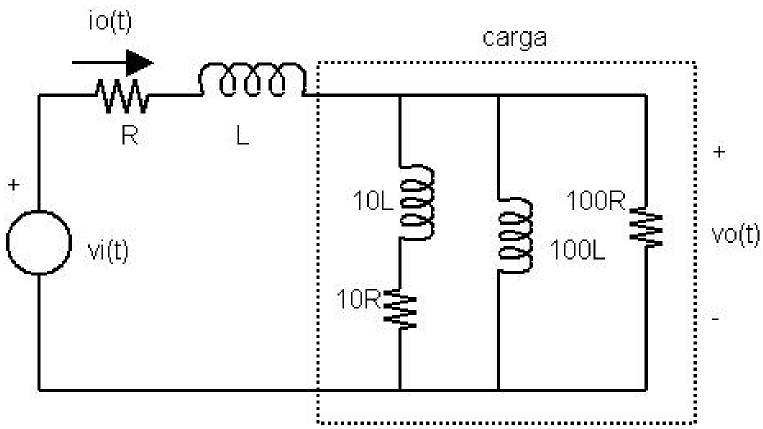
siendo $0 < \zeta < 1$ y $\omega_n > 0$.

(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando su construcción.

(b) A los diagramas anteriores, incorporarle el valor exacto de la transferencia en la frecuencia de trabajo ω_n, explicando claramente el rol del parámetro ζ. Bosquejar los diagramas reales

(c) Hallar $\zeta \geq 0$ tal que $|H(j\omega_n)| = -2db$.

Problema 11



(a) En el circuito de la figura, hallar la transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

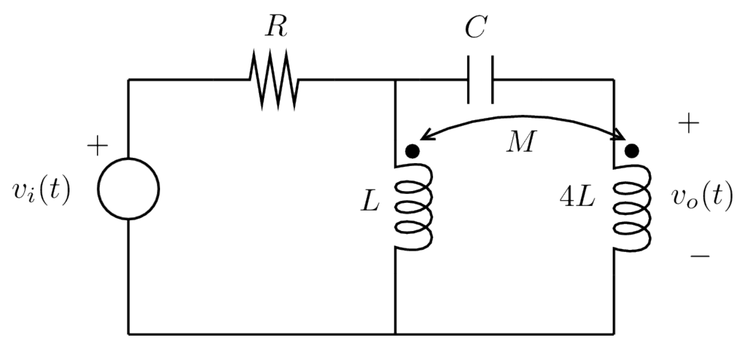
(b) Mostrar que es posible elegir un parámetro ω_0 que permite escribir H de la siguiente forma:

$$H(j\omega) = \frac{100\omega_o j\omega}{(j\omega)^2 + 112\omega_o j\omega + \omega_o^2}$$

(c) Hallar la respuesta en régimen del sistema para la entrada $v_i(t) = E\cos(\omega_o t + \pi/4)$.

Problema 12

Se considera el circuito de la figura , en el que el transformador es perfecto.

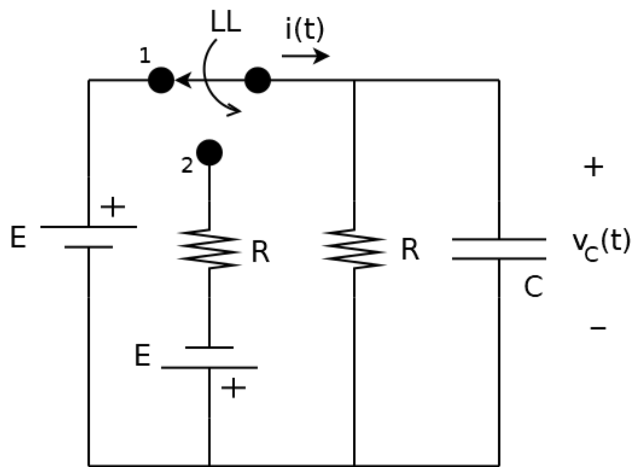


(a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, expresándola en función de $\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{1}{RC}$.

(b) Hallar $H(j\omega_0)$.

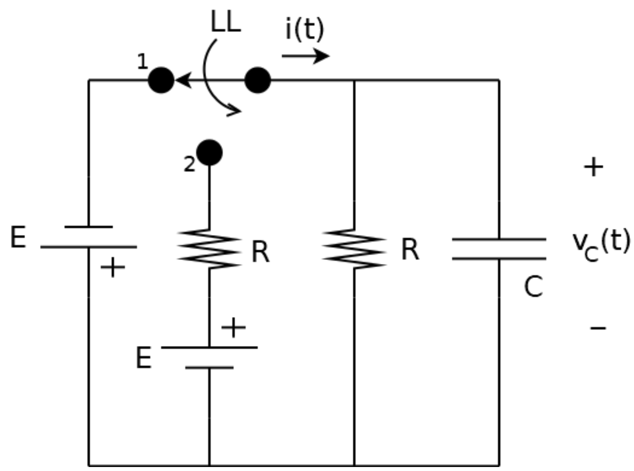
(c) Hallar, si existe, una frecuencia que debe tener una entrada sinusoidal pura para que la respectiva respuesta en régimen del sistema esté en fase con la entrada.

Problema 13



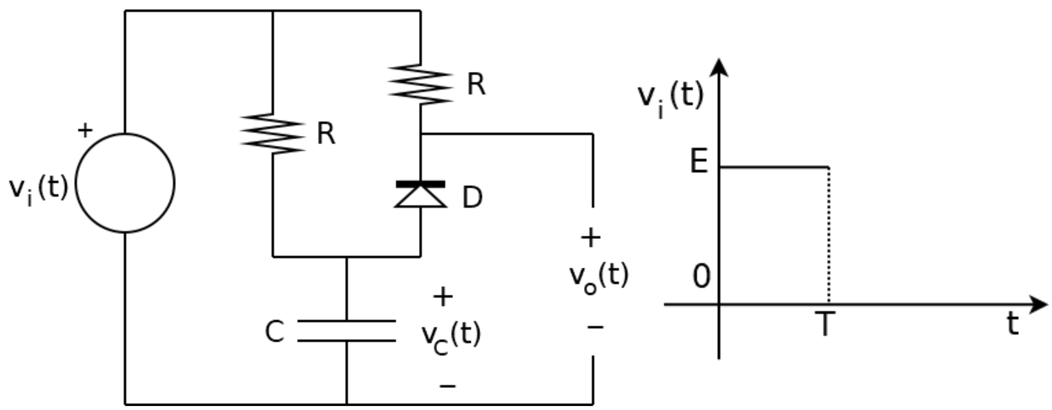
El circuito de la figura se encuentra en régimen de continua cuando conmuta la llave LL, en el instante que denotaremos por $t = 0$. Modelando el circuito en Laplace, hallar $v_C(t)$ e $i(t)$ para todo instante positivo.

Problema 14



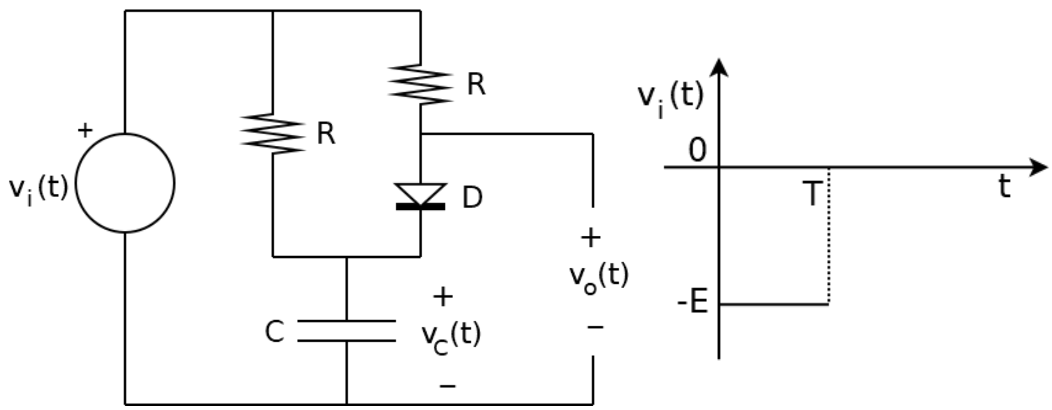
El circuito de la figura se encuentra en régimen de continua cuando conmuta la llave LL, en el instante que denotaremos por $t = 0$. Modelando el circuito en Laplace, hallar $v_C(t)$ e $i(t)$ para todo instante positivo.

Problema 15



El circuito de la figura, con el condensador inicialmente descargado, se inyecta la señal de la gráfica. Se sabe que $T = RC$. Analizando por tramos, hallar las tensiones $v_C(t)$ y $v_o(t)$ para todo instante positivo.

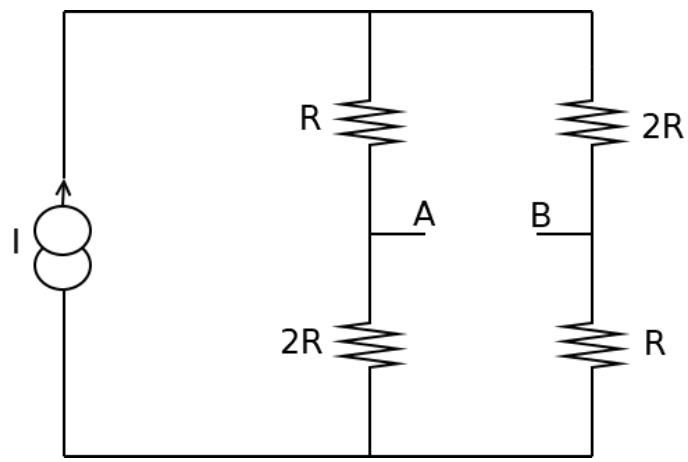
Problema 16



El circuito de la figura, con el condensador inicialmente descargado, se inyecta la señal de la gráfica. Se sabe que $T = RC$. Analizando por tramos, hallar las tensiones $v_C(t)$ y $v_o(t)$ para todo instante positivo.

SOLUCIONES

Problema 1



Se considera el circuito de la figura, donde la fuente es de continua.

(a) Hallar el equivalente de Thévenin entre los puntos A y B.

Primero hallamos la tensión de vacío V_{Th}, definida como la tensión entre A y B cuando no se conecta nada entre ellos (no circula corriente entre ellos).

Tomemos como referencia la línea inferior del circuito y denotemos por V_A y V_B las tensiones entre los puntos A y B y dicha referencia. Primero hallemos las corrientes por cada rama, I_A e I_B, que cumplen $I_A + I_B = I$. Podemos aplicar divisor de corriente (si lo recordamos) o igualando las caídas en cada rama. :

$$\left.\begin{array}{rcl} I_A.(3R) & = & I_B(3R) \\ I_A + I_B & = & I \end{array}\right\} \Rightarrow I_A = I_B = \frac{I}{2}$$

Notemos que como las dos ramas presentan la misma resistencia total, la corriente I se divide en partes iguales en cada rama.

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} V_A = 2R.I_A = 2R.\frac{I}{2} = R.I \\ \\ V_B = R.I_A = R.\frac{I}{2} = \frac{R.I}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{Th} = V_A - B_B = \frac{R.I}{2}$$

Hallemos ahora la resistencia vista entre A y B, R_{Th}, que calculamos anulando la fuente de corriente independiente. Al anular la fuente, la sustituímos por una fuente del mismo tip oy de valor 0, lo que equivale a abrir la rama del circuito que contiene la fuente. DEsde el punto de vista de A y B, vemos la siguiente resistencia:

$$R_{Th} = (R+2R)||(2R+R) = 3R||3R = \frac{3R}{2}$$

(se sugiere redibujar el circuito para ver bien la expresión anterior).

Tenemos ya el equivalente de Thévenin, formado por la fuente de tensión de valor V_{th}, con resistencia en serie R_{Th}.

(b) Hallar la potencia que disiparía una resistencia de valor $2R$ conectada entre A y B.

La potencia que disiparía una resistencia de carga $R_L = 2R$ conectada al circuito entre A y B va a sería la misma que si la conetrámos al equivalente de Thévenin. La tensión en la resistencia de carga podemos obtemerla a través de un divisor de tensión (se sugiere dibujar el circuito equivalente):

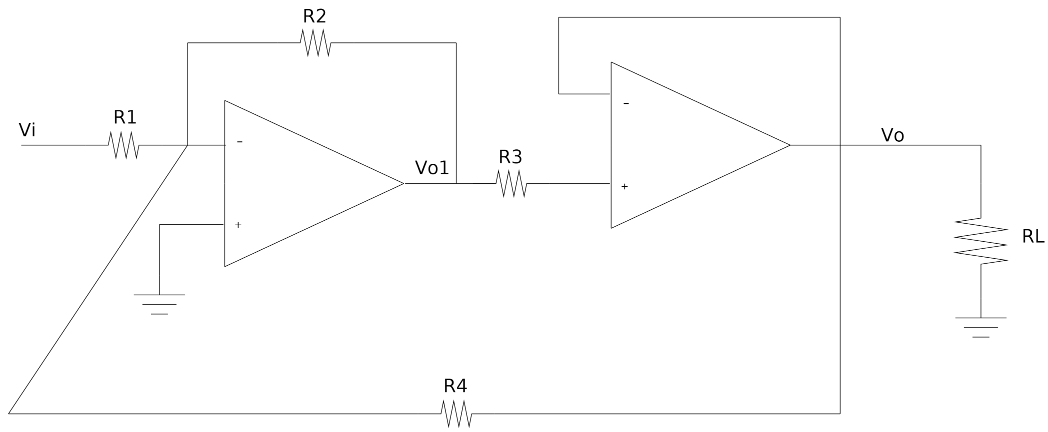
$$V_{R_L} = V_{Th}.\frac{R_L}{R_{Th}+R_L} = \frac{R.I}{2}.\frac{2R}{\frac{3R}{2}+2R} = \frac{R.I}{2}.\frac{2R}{\frac{3R}{2}+\frac{4R}{2}} = \frac{2}{7}R.I$$

La potencia disipada será

$$P_{R_L} = \frac{V_{R_L}^2}{R_L} = \frac{\left(\frac{2}{7}R.I\right)^2}{2R} = \frac{4R^2.I^2}{49\,2R} = \frac{2R.I^2}{49}$$

Problema 2

Se pide analizar el circuito de la figura, **explicando claramente cómo enfrenta los operacionales**, que son ideales.



(a) Hallar la relación entre las tensiones V_i, V_{o1} y V_o.

En el circuito podemos identificar dos configuraciones lineales básicas de operacionales: un *sumador inversor*, con entradas V_i y V_o, y un seguidor, con salida V_o. Recordemos que al ser operacionales ideales, no entra corriente por las patas + y - (por la resistencia de entrada infinita) y tenemos el cortocircuito virtual entre dichas patas (por la ganancia infinita). Planteando el nudo en la pata - del operacional de más a la izquierda, obtenemos

$$\frac{V_i}{R_1} + \frac{V_o}{R_4} = -\frac{V_{o1}}{R_2} \Rightarrow \boxed{V_{o1} = -\left(\frac{R_2}{R_1}.V_i + \frac{R_2}{R_4}.V_o\right)}$$

(b) A partir de lo anterior, hallar la relación entre la entrada V_i y la salida V_o.

Observemos el seguidor. Por el cortocircuito virtual, la pata + iguala la pata - y ésta es igual a la salida V_o. ¿Cuánto vale la pata +? Como no circula corriente por la resistencia R_3 (¿por qué?), la pata - tiene directamente la tensión V_{o1}. Entonces

$$V_o = V_{o1} = -\left(\frac{R_2}{R_1}.V_i + \frac{R_2}{R_4}.V_o\right) \Rightarrow \left(1 + \frac{R_2}{R_4}\right).V_o = -\frac{R_2}{R_1}.V_i$$

De donde

$$\boxed{V_o = -\left(\frac{R_2}{R_1}.\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right).V_i}$$

Problema 3

(a) En un cuadripolo genérico, del cual se conocen los parámetros (A, B, C, D), calcular la impedancia vista desde el lado 1 cuando el lado 2 se carga con una impedancia Z_L.

Sabemos que

$$\begin{aligned} V_1 &= A.V_2 - B.I_2 \\ I_1 &= C.V_2 - D.I_2 \end{aligned}$$

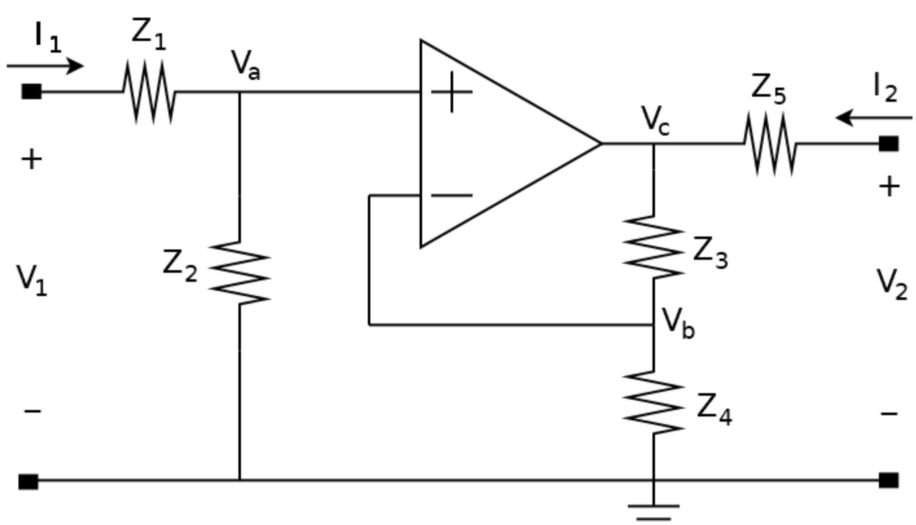
Cuando conectamos una impedancia de carga Z_L del lado 2, por la convención de signos usada (I_2 entrante al cuadripolo), tenemos que se cumple la relación

$$V_2 = V_L = -Z_L.I_2$$

Por otro lado, la impedancia vista del lado 1 vale

$$Z_{v1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{A.V_2 - B.I_2}{C.V_2 - D.I_2} = \frac{-A.Z_L.I_2 - B.I_2}{-C.Z_L.I_2 - D.I_2} = \frac{A.Z_L + B}{C.Z_L + D}$$

(b) Se considera el cuadripolo de la figura



Hallar los parámetros (A, B, C, D) y verificar que:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{Z_4}{Z_2(Z_3 + Z_4)} \times \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_5(Z_1 + Z_2) \\ 1 & Z_5 \end{bmatrix}$$

Recordemos la expresión

$$\begin{aligned} V_1 &= A.V_2 - B.I_2 \\ I_1 &= C.V_2 - D.I_2 \end{aligned}$$

Podemos obtener los parámetros aplicando *wuperposición* y considerando primero $I_2 = 0$ y luego $V_2 = 0$. Miremos el caso $I_2 = 0$. Entonces

$$V_2 = V_c = V_b.\frac{Z_3 + Z_4}{Z_4}$$

Por otro lado, por el cortocircuito virtual, y porque no entra corriente al opercional por las patas de entrada,

$$V_a = V_b = V_1.\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

De donde

$$V_2 = V_1.\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.\frac{Z_3 + Z_4}{Z_4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}.\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}}$$

Además,

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{A.V_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{A}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{Z_2}.\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}}$$

Pongamos ahora $V_2 = 0$. Entonces $V_c = -Z_5.I_2$ y nuevamente propagamos esta tensión hacia la entrada:

$$V_a = V_b = V_c.\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \Rightarrow V_1.\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = V_a = -Z_5.I_2.\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

$$\Rightarrow V_1 = \left[Z_5.\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}.\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}\right].(-I_2) \Rightarrow \boxed{C = Z_5.\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}.\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}}$$

Finalmente,

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1 + Z_2}\frac{-C.I_2}{Z_1 + Z_2} \Longrightarrow \boxed{D = \frac{C}{Z_1 + Z_2} = Z_5.\frac{1}{Z_2}.\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}}$$

Problema 4

Se tiene una carga trifásica, formada por tres impedancias idénticas Z conectadas en triángulo, alimentada por un sistema trifásico de fuentes equilibrado y perfecto, de $380V$ eficaces de tensión compuesta y $50Hz$.

(a) Hallar un modelo **paralelo** para la carga ($Z = R_P||jX_P$), sabiendo que si se miden las potencias activas y reactivas totales consumidas, se obtiene $P = 7500W$ y $Q = 4332VAR$, con factor de potencia inductivo.

Al ser tres impedancias idénticas, las potencias en cada fase valen

$$P_{fase} = P/3 = 2500W \quad , \quad Q_{fase} = Q/3 = 1444VAR$$

Como las cargas están conectadas en triángulo, cada impedancia ve en bornes la tensión compuesta. Además, en un modelo paralelo, tanto R_P como jX_P ven esa tensión en bornes. Observemos que la activa sólo la consume R_P, en tanto que la activa sólo la consume jX_P (inductiva). Entonces, en valores eficaces,

$$P_{fase} = \frac{|V_{comp}|^2}{R_P} \Rightarrow \boxed{R_P = \frac{|V_{comp}|^2}{P_{fase}} = \frac{380^2}{2500}\Omega}$$

$$Q_{fase} = \frac{|V_{comp}|^2}{X_P} \Rightarrow \boxed{X_P = \frac{|V_{comp}|^2}{Q_{fase}} = \frac{380^2}{1444}\Omega}$$

(b) Compensar la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes, sin modificar la potencia activa que entrega. Para ello indicar qué componentes colocaría, sus valores y cómo los conectaría.

Como la reactiva consumida es positiva, podemos compensarla colocando un elemento capacitivo que entregue reactiva. Para no alterar la potencia activa, este condensador tiene que estar en paralelo con la carga. El cálculo de la capacidad necesaria lo hacemos en el cirtuico monofásico equivalente. El valor solución corresponde a la capacidad que hay que colocar por fase, conectando tres condensadores idénticos en estrella. Si transfiguramos esta estrella a un triángulo equivalente, obtenemos condensadores tres veces más chicos que aportan la misma reactiva trifásica total. Volviendo al equivalente monofásico, la capacidad debe ser tal que:

$$Q_{cond} = -|V_{comp}|^2.C\omega = -Q_{fase} \Rightarrow C = \frac{Q_{fase}}{|V_{comp}|^2.\omega} = \frac{1444}{380^2 \times 2\pi \times 50}F$$

Problema 5

(a) Esta primera parte es general. Se considera una línea de transmisión sin pérdidas, de impedancia característica Z_{linea}, terminada con una impedancia Z_{carga}. La siguiente expresión representa la impedancia vista a una distancia d de la carga:

$$Z(d) = Z_{linea}.\frac{Z_{carga} + jZ_{linea}.\tan\beta d}{Z_{linea} + jZ_{carga}.\tan\beta d}$$

Hallar la expresión de la impedancia vista a la entrada de un transformador de 1/4 longitud de onda, de impedancia característica Z_{transf} cuando se lo termina con una impedancia Z_{carga}.

Para el caso de un transformador de cuarta longitud de onda, de impedancia característica Z_{transf}, terminado con Z_L, la expresión anterior resulta ser

$$Z(l) = Z_{transf}.\frac{Z_L + jZ_{transf}.\tan\beta l}{Z_{transf} + jZ_L.\tan\beta l}$$

con l de la forma $(2n+1)\lambda/4$. Entonces

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}.(2n+1)\frac{\lambda}{4} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\beta l = +\infty$$

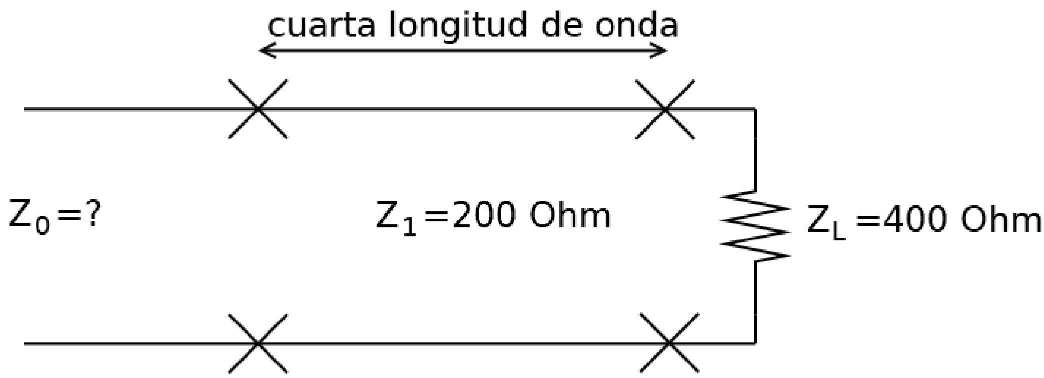
Entonces, la impedancia vista a la entrada del transformador es

$$Z(l) = \frac{Z_{transf}^2}{Z_L}$$

(b) Esta parte refiere a la figura. Se conecta una impedancia Z_L a una línea de transmisión de impedancia característica Z_0 a través de un transformador de cuarta longitud de onda, de impedancia característica Z_1. ¿Cuál es el valor de la impedancia característica Z_0 si se sabe que al realizar la conexión de la figura, no hay onda reflejada hacia la fuente?

Para lograr la adaptación, se debe cumplir que la impedancia vista a la entrada del transformador sea Z_0, así la línea queda bien terminada y no hay onda reflejada. De donde

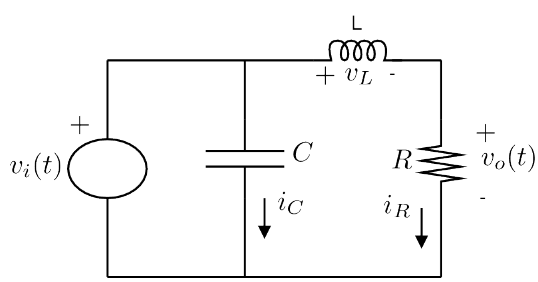
$$Z_0 = \frac{Z_1^2}{Z_L} = \frac{200^2}{400}\Omega \Rightarrow Z_0 = 100\Omega$$



Problema 6

El circuito de la figura se alimenta con una fuente sinusoidal $v_i(t) = E\cos(\omega_o t)$. Se cumple que

$$E = 100V \quad , \quad R = 5\Omega \quad , \quad L = 0,866Hy \quad , \quad C = 5000\mu F$$



(a) Indicar para qué valor positivo de frecuencia la amplitud de la corriente i_R (corriente en régimen por la resistencia R) vale 10 A. Ésta será la frecuencia de trabajo en adelante.

Trabajamos con fasores de amplitud. Denotemos por I_0 la corriente umbral dada. En fasores

$$I_R = \frac{V_i}{R + Lj\omega_0}$$

por lo que, en el tiempo

$$i_R(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - atan(L\omega_0/R))$$

Entonces, se debe cumplir que

$$\frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_0^2}} = I_0 \Rightarrow \frac{E^2}{R^2 + L^2\omega_0^2} = I_0^2 \Rightarrow \omega_o^2 = \frac{E^2 - R^2 I_0^2}{L^2 I_0^2}$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{E^2 - R^2 I_0^2}}{L I_0} = \frac{\sqrt{100^2 - 5^2 10^2}}{0,866 \times 10} rad/s \approx 10 rad/s$$

(b) Calcular los fasores asociados a las corrientes i_R e i_C y a las tensiones v_R y v_L e incluirlos en un diagrama fasorial.

Ya vimos que

$$I_R = \frac{V_i}{R + Lj\omega_o}$$

Por otro lado,

$$I_C = V_i.Cj\omega_o$$

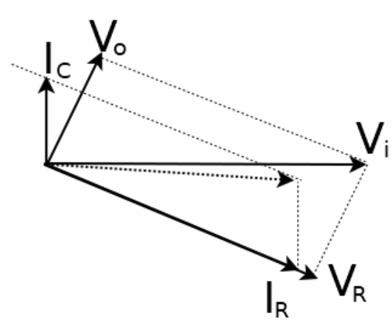
Además

$$V_R = R.I_R = \frac{R}{R + Lj\omega_o}.V_i$$

y

$$V_L = Lj\omega_o.I_R = \frac{Lj\omega_o}{R + Lj\omega_o}.V_i$$

El siguiente diagrama fasorial muestra la posición relativa de los fasores anteriores



(c) Dar la expresión temporal de la tensión en régimen en bornes de la resistencia.

Vimos que

$$V_R = R.I_R = \frac{R}{R + Lj\omega_o}.V_i$$

de donde

$$v_R(t) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_o^2}}.E\cos\left(\omega_o t - atan(L\omega_o/R)\right)$$

(d) Calcular la potencia activa y reactiva entregadas por la fuente.

Trabajamos en valores eficaces. La potencia activa es la consumida por la resistencia, y vale

$$P = P_R = R|I_R|^2 = \frac{RE^2}{2(R^2 + L^2\omega_0^2)} \approx 250W$$

La potencia reactiva es la suma de la que consume la inductancia y la que entrega el condensador.

$$Q_L = L\omega_0|I_R|^2 = \frac{L\omega_0 E^2}{2(R^2 + L^2\omega_0^2)} \approx 433VAR$$

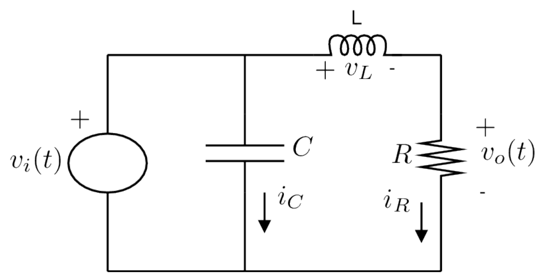
$$Q_C = -C\omega_0.|V_i|^2 = -\frac{E^2 C\omega_0}{2} \approx -250VAR$$

$$\Rightarrow Q = Q_L + Q_C \approx 183VAR \quad (inductiva!!)$$

Problema 7

El circuito de la figura se alimenta con una fuente sinusoidal $v_i(t) = E\cos(\omega_o t)$. Se cumple que

$$E = 100V \quad , \quad R = 100\Omega \quad , \quad L = 0,866Hy \quad , \quad C = 5\mu F \quad , \quad f_o = 50Hz$$



(a) Calcular los fasores asociados a las corrientes i_R e i_C y a las tensiones v_R y v_L e incluirlos en un diagrama fasorial.

Pasando al circuito en fasores, con $\omega_o = 2\pi\ f_o = 100\pi\ rad/s$, observamos que

$$I_R = \frac{V_i}{R + Lj\omega_o}$$

Por otro lado,

$$I_C = V_i.Cj\omega_o$$

Además

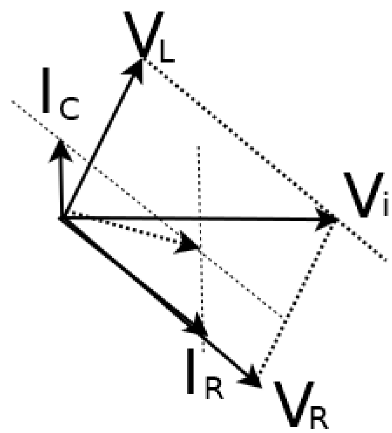
$$V_R = R.I_R = \frac{R}{R + Lj\omega_o}.V_i$$

y

$$V_L = Lj\omega_o.I_R = \frac{Lj\omega_o}{R + Lj\omega_o}.V_i$$

El siguiente diagrama fasorial muestra la posición relativa de los fasores anteriores

(b) Dar la expresión temporal de la tensión en régimen en bornes de la inductancia.



Vimos que

$$V_L = Lj\omega_o.I_R = \frac{Lj\omega_o}{R + Lj\omega_o}.V_i$$

de donde

$$v_L(t) = \frac{L\omega_o}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_o^2}}.E\cos\Big(\omega_o t + \frac{\pi}{2} - atan(L\omega_o/R)\Big)$$

(c) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente.

La potencia activa es la consumida por la resistencia, y vale

$$P = P_R = \frac{1}{2}.R|I_R|^2 \approx 0,33W$$

La potencia reactiva es la suma de la que consume la inductancia y la que entrega el condensador.

$$Q_L = \frac{1}{2}.L\omega_o|I_R|^2 \approx 18,4VAR$$

$$Q_C = -\frac{1}{2}.C\omega_o.|V_i|^2 = -E^2C\omega_o \approx -7,8VAR$$

$$\Rightarrow Q = Q_L + Q_C \approx 10,5VAR \quad (inductiva!!)$$

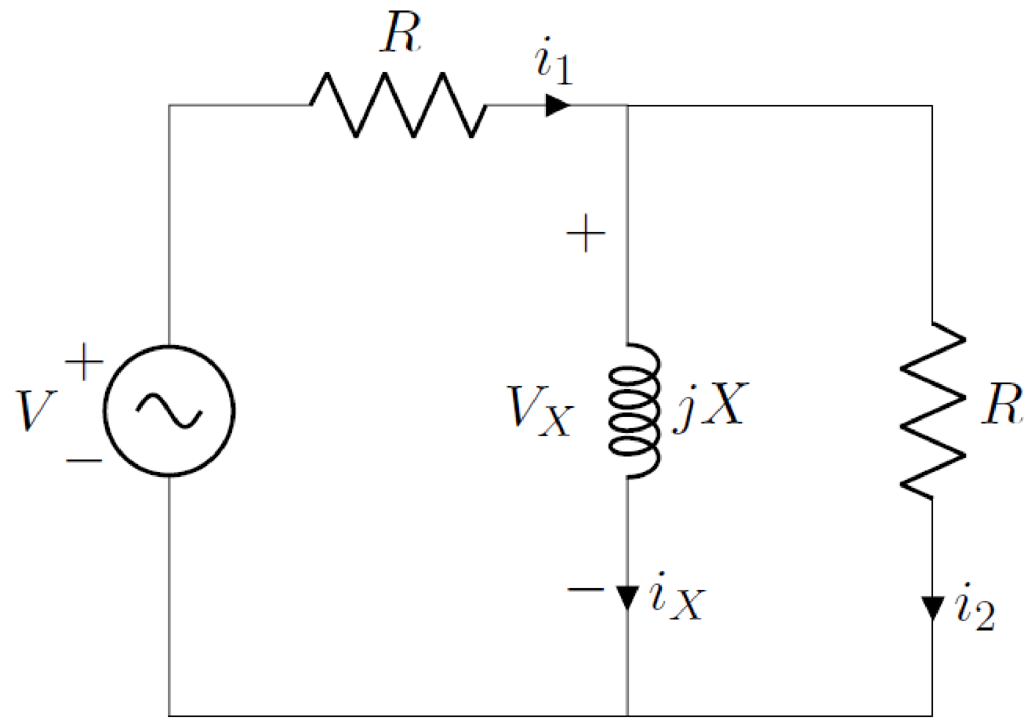
(d) Se desea compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, sin alterar la potencia activa que entrega la misma. Indicar qué elemento colocaría, de qué valor y cómo lo conectaría.

Como la reactiva consumida es positiva, podemos compensarla colocando un elemento capacitivo que entregue reactiva. Para no alterar la potencia activa, este condensador tiene que estar en paralelo con la carga. El valor de la capacidad debe ser tal que:

$$Q_{comp} = -\frac{1}{2}.E^2.C_{comp}\omega_o = -Q \Rightarrow C_{comp} = \frac{2Q}{E^2.\omega_o} \approx 0,5\mu F$$

Problema 8

El circuito de la figura funciona en régimen sinusoidal, alimentado por una fuente de fasor de amplitud asociado V. Se sabe además que $X > 0$.



(a) Hallar V_X en función de V, R y X.

Pasando al circuito equivalente en fasores, y aplicando divisor de tensión, tenemos:

$$V_X = \frac{R||jX}{R + (R||jX)}.V = \frac{\frac{RjX}{R+jX}}{R + \frac{RjX}{R+jX}}.V = \frac{jX}{R + 2jX}.V$$

(b) Hallar X en función de R para que el fasor V_X adelante $\pi/4$ a V. **Usar este valor de X para las partes que siguen.**

La diferencia de fase entre V_X y V está dada por el argumento del número complejo $\frac{RXj}{R^2+2jRX}$, que vale

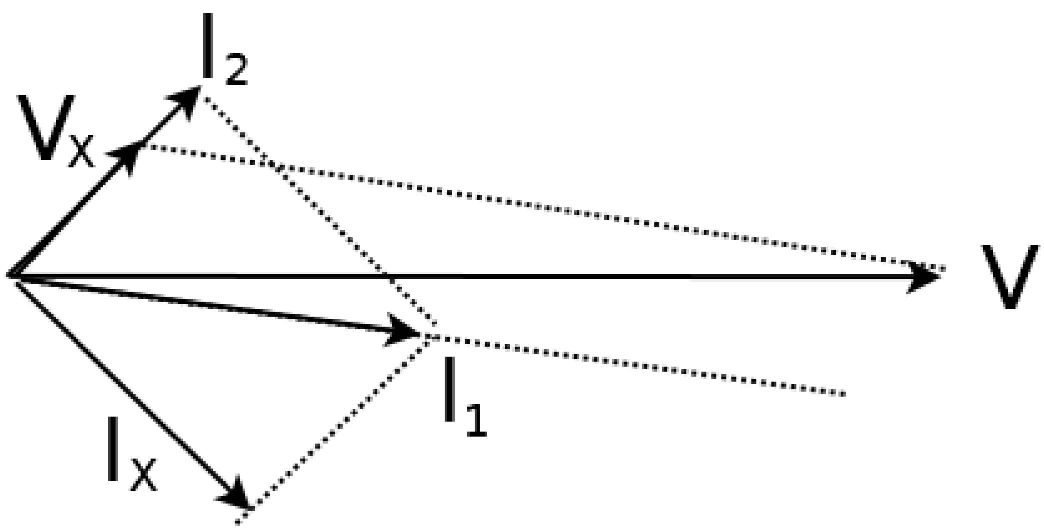
$$\frac{\pi}{2} - atan\left(\frac{2X}{R}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow X = \frac{R}{2}$$

Notemos que

$$V_X = \frac{j}{1+j} . \frac{V}{2}$$

(c) Realizar un diagrama fasorial que contenga a V, V_X, I_1, I_X, I_2 (¡no se pide calcular los fasores!).

Ya sabemos que V_X adelanta 45^o a V. Además, I_2 está en fase con V_X e I_X está retrasada 90^o respecto de V_X. Finalmente, I_1 está retrasada respecto de V.



(d) Si $|V| = 100V$ y $R = 100\Omega$, hallar la potencia reactiva entregada por la fuente.

La potencia reactiva entregada por la fuente es la consumida por la impedancia jX y vale

$$Q = \frac{|V_X|^2}{X} = \frac{\left|\frac{j}{1+j} \cdot \frac{V}{2}\right|^2}{X} = \frac{\left(\frac{|V|}{2\sqrt{2}}\right)^2}{X} = \frac{|V|^2}{8X} = 12,5VAR$$

Problema 9

Se considera la siguiente transferencia en régimen, de primer orden

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + ka}{j\omega + a}$$

con $k > 1$ y a positivo.

(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

Para obtener los diagramas de Bode asintóticos, hacemos un análisis por banda. Identificamos las frecuencias críticas. En el denominador, tenemos una raíz en $-a$, en tanto en el denomiador tenemos una raíz en $-ka$. Entonces

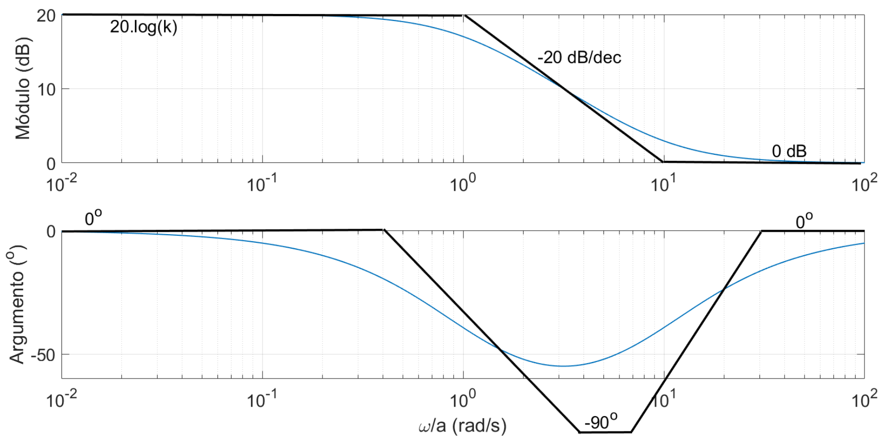
$$\omega \ll a < ka \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{ka}{a} = k \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} & \approx & 20.log(k) \\ arg(H(j\omega)) & \approx & 0 \end{cases}$$

$$a \ll \omega \ll ak \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{ka}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} & \approx & 20.log(ka) - 20.log(\omega) \\ arg(H(j\omega)) & \approx & -\frac{\pi}{2} \pm 2\pi \end{cases}$$

$$\omega \gg ka \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{j\omega} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} & \approx & 0dB \\ arg(H(j\omega)) & \approx & 0 \end{cases}$$

Al ser términos de primer orden, cada uno solamente puede aportar $\pm\pi/2$. Entonces, la fase en baja y alta frecuencia es prácticamente nula, en tanto en frecuencias medias desciende hacia -90^o. No va a llegar a este valor, ya que el cero en el numerador compensa el efecto del cero en el denominador. La figura siguiente resume lo anterior. Se tomó un valor de $k = 10$ y ya se incluyeron los diagramas reales.

(b) Bosquejar los diagramas reales.



(c) Se considera una entrada sinusoidal de la forma $v_i(t) = A\cos(\omega t)$. Hallar la pulsación ω_1 positiva para la cual se da el máximo desfasaje posible entre la entrada y la respectiva salida en régimen.

Observando los diagramas de Bode, el máximo desfasaje se va a dar en una frecuencia intermedia entre a y ak, en donde se da el mínimo del argumento de la transferencia. Hallemos ese mínimo:

$$g(\omega) = arg(H(j\omega)) = arg((j\omega + ka)) - arg((j\omega) + a) =$$
$$\arctan\left(\frac{\omega}{ka}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

donde hemos introducido la función auxiliar $g(\omega)$. Para hallar el mínimo, derivamos e igualamos a 0.

$$g'(\omega) = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2} \times \frac{1}{ka} - \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \times \frac{1}{a} = \frac{ka}{k^2a^2+\omega^2} - \frac{a}{a^2+\omega^2}$$
$$= \frac{ka(a^2+\omega^2) - a(k^2a^2+\omega^2)}{(k^2a^2+\omega^2).(a^2+\omega^2)} = \frac{ka^3 + ka\omega^2 - k^2a^3 - a\omega^2}{(k^2a^2+\omega^2).(a^2+\omega^2)}$$
$$= \frac{ka^3(1-k) + a\omega^2(k-1)}{(k^2a^2+\omega^2).(a^2+\omega^2)} = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = a.\sqrt{k}$$

El desfasaje máximo vale

$$g(\omega_1) = \arctan\left(\frac{a\sqrt{k}}{ka}\right) - \arctan\left(\frac{a\sqrt{k}}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \arctan\left(\sqrt{k}\right)$$

Problema 10

Se considera la siguiente transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n.(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

siendo $0 < \zeta < 1$ y $\omega_n > 0$.

(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando su construcción.

Vamos a hacer un análisis por bandas. Para ello, identificamos las frecuencias críticas de la transferencia. Tenemos una raíz nula en el denominador y, como $|\zeta|$ es menor que 1, dos raíces complejas conjugadas en el denominador, de módulo ω_n. Entonces, para la obtención de los diagramas de Bode asintóticos, tenemos dos bandas de interés, de frecuencias mayores o menores a ω_n.

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n.(j\omega)}{\omega_n^2} = \frac{j\omega}{\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} & \approx & 20.log(\omega) - 20.log(\omega_n) \\ arg(H(j\omega)) & \approx & \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

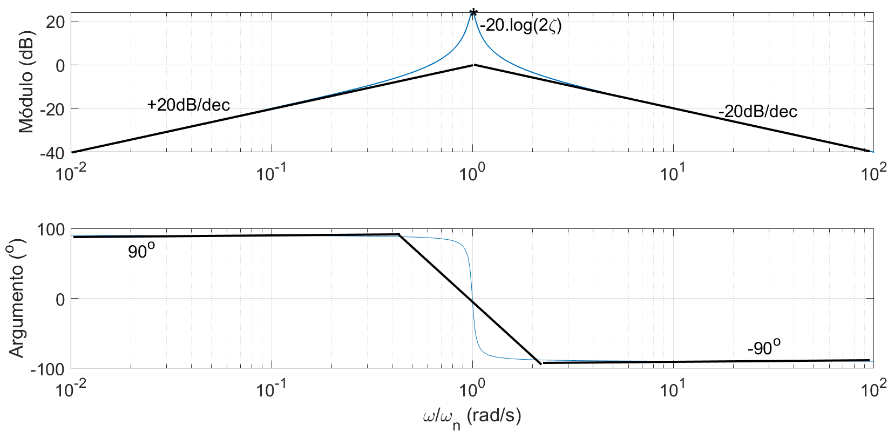
$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n.(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{\omega_n}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} & \approx & 20.log(\omega_n) - 20.log(\omega) \\ arg(H(j\omega)) & \approx & -\frac{\pi}{2} \quad \left(ó\ \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Como estamos analizando un sistema de segundo orden (es decir, con raíces complejas conjugadas), sabemos que la variación total de fase admisible es de $\pm\pi$, por lo que tenemos que definir si la fase *aumenta* desde $\frac{\pi}{2}$ hacia $\frac{3\pi}{2}$ o *disminuye* desde $\frac{\pi}{2}$ hacia $-\frac{\pi}{2}$. Para resolver esto, evaluamos en una frecuencia intermedia. Por simplicidad, elegimos ω_n. Entonces

$$H(j\omega_n) = \frac{\omega_n.(j\omega_n)}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{j}{2j\zeta} = \frac{1}{2\zeta}$$

Para ζ positivo, vemos que la fase es nula, por lo que el argumento de H *disminuye* desde $\frac{\pi}{2}$ hacia $-\frac{\pi}{2}$.

(b) A los diagramas anteriores, incorporarle el valor exacto de la transferencia en la frecuencia de trabajo ω_n, explicando claramente el rol del parámetro ζ. Bosquejar los diagramas reales

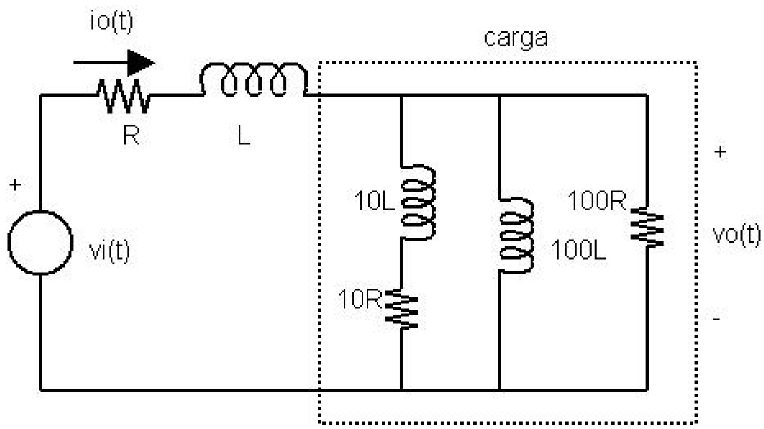


(c) Hallar $\zeta \geq 0$ tal que $|H(j\omega_n)| = -2dB$.

Para que $|H(j\omega_n)| = 20.log(|H(j\omega_n)|) = -2dB$ se debe cumplir que

$$|H(j\omega_n)| = \frac{1}{2\zeta} = 10^{\frac{-2}{20}} = 10^{-\frac{1}{10}} \Rightarrow 2\zeta = 10^{\frac{1}{10}} \Rightarrow \boxed{\zeta = \frac{10^{\frac{1}{10}}}{2} \approx 0,63}$$

Problema 11



(a) En el circuito de la figura, hallar la transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

Pasamos al circuito equivalente en fasores. La transferencia sale directamente de aplicar divisor de tensión.

$$V_o(j\omega) = V_i(j\omega).\left[\frac{Z_L}{Z_1 + Z_L}\right]$$

con $Z_1 = R + Lj\omega$ y

$$Z_L = (10R{+}10Lj\omega)||100Lj\omega||100R = \left[\frac{1}{10R + 10Lj\omega} + \frac{1}{100Lj\omega} + \frac{1}{100R}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{100^2.RLj\omega + 10(R + Lj\omega).(100R + 100Lj\omega)}{(10R + 10Lj\omega)100Lj\omega 100R}\right]^{-1} =$$

$$= \frac{(10R + 10Lj\omega)100Lj\omega 100R}{100^2.RLj\omega + 10(R + Lj\omega).(100R + 100Lj\omega)}$$

$$= \frac{100(R + Lj\omega)Lj\omega R}{10.RLj\omega + (R + Lj\omega).(R + Lj\omega)} = \frac{100(R + Lj\omega)Lj\omega R}{10.RLj\omega + (R + Lj\omega).(R + Lj\omega)}$$

$$= \frac{100(R + Lj\omega)RLj\omega}{10RLj\omega + R^2 + 2RLj\omega + L^2(j\omega)^2} = \frac{100(R + Lj\omega)RLj\omega}{R^2 + 12RLj\omega + L^2(j\omega)^2}$$

Entonces

$$H(j\omega) = \frac{\frac{100(R+Lj\omega)RLj\omega}{R^2+12RLj\omega+L^2(j\omega)^2}}{R+Lj\omega+\frac{100(R+Lj\omega)RLj\omega}{R^2+12RLj\omega+L^2(j\omega)^2}} = \frac{\frac{100RLj\omega}{R^2+12RLj\omega+L^2(j\omega)^2}}{1+\frac{100RLj\omega}{R^2+12RLj\omega+L^2(j\omega)^2}}$$

$$= \frac{100RLj\omega}{R^2+12RLj\omega+L^2(j\omega)^2+100RLj\omega}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{100RLj\omega}{R^2+112RLj\omega+L^2(j\omega)^2}$$

(b) Mostrar que es posible elegir un parámetro ω_0 que permite escribir H de la siguiente forma:

$$H(j\omega) = \frac{100\omega_o j\omega}{(j\omega)^2+112\omega_o j\omega+\omega_o^2}$$

Retomemos la expresión de la transferencia en régimen y trabajémosla un poco:

$$H(j\omega) = \frac{100RLj\omega}{R^2+112RLj\omega+L^2(j\omega)^2} = \frac{100RLj\omega}{L^2\left[\frac{R^2}{L^2}+112\frac{R}{L}j\omega+(j\omega)^2\right]} =$$

$$= \frac{100\frac{R}{L}j\omega}{L^2\left[\frac{R^2}{L^2}+112\frac{R}{L}j\omega+(j\omega)^2\right]}$$

Poniendo $\omega_o = \frac{R}{L}$ se obtiene la expresión deseada.

(c) Hallar la respuesta en régimen del sistema para la entrada $v_i(t) = E\cos(\omega_o t + \pi/4)$.

Sabemos que la respuesta en régimen será de la forma

$$v_o(t) = E.|H(j\omega_o)|.\cos\left(\omega_o t + \frac{\pi}{4} + arg(H(j\omega_o))\right)$$

Hallemos la transferencia en la frecuencia de trabajo:

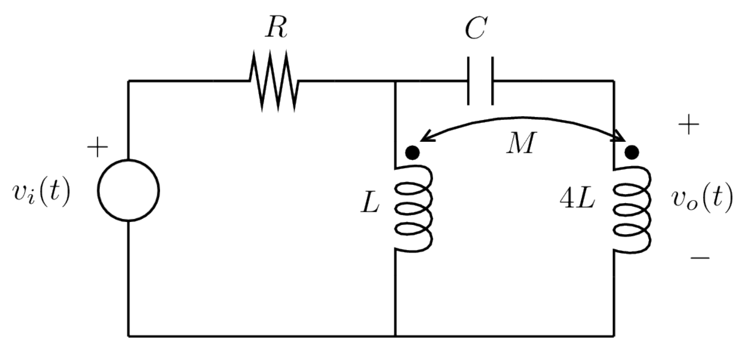
$$H(j\omega_o) = \frac{100\omega_o j\omega_o}{(j\omega_o)^2+112\omega_o j\omega_o+\omega_o^2} = \frac{100j}{112j}$$

Entonces

$$v_o(t) = E.\frac{100}{112}.\cos\left(\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Problema 12

Se considera el circuito de la figura , en el que el transformador es perfecto.



(a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, expresándola en función de $\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{1}{RC}$.

Denotemos por V_1 la tensión en el nudo intermedio, que coincide con la del primario. La tensión de salida coincide con la del secundario.Sabemos que, en fasores, las ecuaciones del transformador son las siguientes

$$\begin{cases} V_1 &= Lj\omega.I_1 + Mj\omega.I_2 \\ V_2 &= Mj\omega.I_1 + 4Lj\omega.I_2 \end{cases}$$

donde hemos considerado la convención de signos estándar (tensiones medidas desde los puntos y corrientes entrando por los puntos). Como el transformador es perfecto, $M = \sqrt{L,4L} = 2L$ y podemos ver que

$$\begin{cases} V_1 &= Lj\omega.I_1 + 2Lj\omega.I_2 \\ V_2 &= 2Lj\omega.I_1 + 4Lj\omega.I_2 \end{cases}$$

de donde $V_o = V_2 = 2V_1$.

Hallemos V_1. Consideremos las corrientes del primario y del secundario, entrando por los puntos. Por Ley de Ohm fasorial,

$$I_2 = (V_1 - V_o)Cj\omega = (V_1 - 2V_1)Cj\omega = -V_1Cj\omega$$

De la ecuación de tensión del primario obtenemos:

$$V_1 = Lj\omega I_1 + 2Lj\omega I_2 = Lj\omega I_1 - 2Lj\omega V_1 Cj\omega \Rightarrow V_1\left(1 + 2LC(j\omega)^2\right) = I_1 Lj\omega$$

Entonces

$$I_1 = V_1\left[\frac{1 + 2LC(j\omega)^2}{Lj\omega}\right]$$

Escribamos el nudo de tensión V_1:

$$\frac{V_i - V_1}{R} = I_1 + I_2 = V_1\left[\frac{1 + 2LC(j\omega)^2}{Lj\omega}\right] - V_1 Cj\omega$$

Entonces

$$\frac{V_i}{R} = V_1\left[\frac{1}{R} + \frac{1 + 2LC(j\omega)^2}{Lj\omega} - Cj\omega\right]$$

Operando, resulta

$$V_i Lj\omega = V_1(RLC(j\omega)^2 + Lj\omega + R) \Rightarrow V_1 = V_i\frac{Lj\omega}{R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2}$$

Luego de multiplicar por 2 para obtener V_o, tenemos que la transferencia del circuito en régimen sinusoidal es

$$H(j\omega) = \frac{2Lj\omega}{R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2} = \frac{2Lj\omega}{RLC\left[\frac{R}{RLC} + \frac{L}{RLC}j\omega + (j\omega)^2\right]}$$

Recordemos que $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0$, por lo que $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$. Entonces

$$H(j\omega) = \frac{2\frac{1}{RC}j\omega}{\frac{1}{LC} + \frac{1}{RC}j\omega + (j\omega)^2} = \frac{2\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$$

(b) Hallar $H(j\omega_0)$.

$$H(j\omega_0) = \frac{2\omega_0(j\omega_0)}{(j\omega_0)^2 + \omega_0(j\omega_0) + \omega_0^2} = \frac{2j}{j} = 2$$

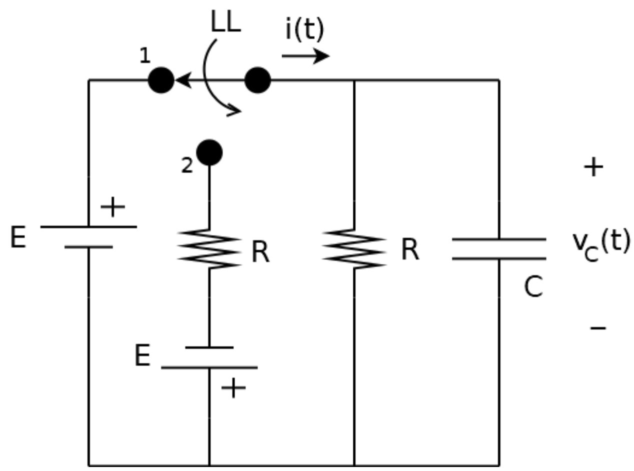
(c) Hallar, si existe, una frecuencia que debe tener una entrada sinusoidal pura para que la respectiva respuesta en régimen del sistema esté en fase con la entrada.

Sabemos que ante una entrada del tipo $v_i(t) = A\cos(\tilde{\omega}t)$, el sistema responde en régimen con una señal sinusoidal pura de la forma

$$v_o(t) = A.|H(j\tilde{\omega})|.\cos\left(\tilde{\omega}t + arg(H(j\tilde{\omega}))\right)$$

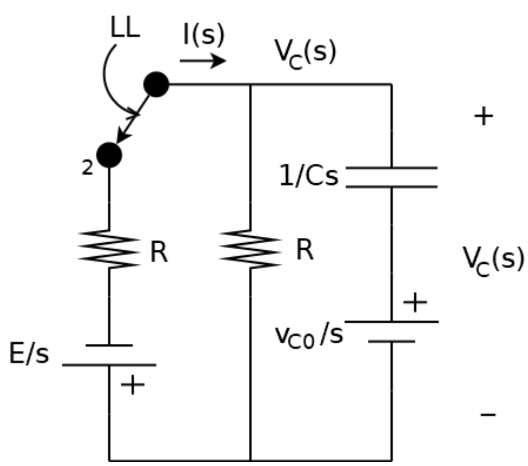
Vimos que si se trabaja a ω_0, entonces la respectiva salida está en fase con la entrada.

Problema 13



El circuito de la figura se encuentra en régimen de continua cuando conmuta la llave LL, en el instante que denotaremos por $t = 0$. Modelando el circuito en Laplace, hallar $v_C(t)$ e $i(t)$ para todo instante positivo.

Con la llave en 1, el condensador queda cargado a la tensión de la fuente de la izquierda, por lo que, cuando la llave conmuta dle punto 1 al punto 2, el dato previo del condensador es $v_{C0} = E$. Para analizar qué pasa a partir



de $t = 0$, pasamos al circuito equivalente en Laplace. Planteando el nudo superior, tenemos que

$$I(s) = \frac{-\frac{E}{s} - V_C}{R} = \frac{V_C}{R} + \left(V_C - \frac{v_{C0}}{s}\right) Cs$$

Operando,

$$\frac{-E}{Rs} + Cv_{C0} = V_C. \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + Cs\right] = V_C. \left[\frac{2 + RCs}{R}\right] \Rightarrow -\frac{E}{s} + RCv_{C0} = (2+RCs)V_C$$

De donde

$$V_C(s) = \frac{-\frac{E}{s} + RCv_{C0}}{2 + RCs} = \frac{-E + RCsv_{C0}}{s(2 + RCs)} = \frac{-\frac{E}{RC} + sv_{C0}}{s\left(s + \frac{2}{RC}\right)} = \frac{-\frac{E}{RC}}{s\left(s + \frac{2}{RC}\right)} + \frac{v_{C0}}{\left(s + \frac{2}{RC}\right)}$$

El segundo término ya está pronto para ser antitransformado. Para el primero, hacemos fracciones simples.

$$V_C(s) = -\frac{E}{RC}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{\left(s + \frac{2}{RC}\right)}\right] + \frac{v_{C0}}{\left(s + \frac{2}{RC}\right)}$$

Las constantes A y B salen por *tapadita* o haciendo común denominador.

$$A = \frac{RC}{2} = -B$$

Entonces

$$V_C(s) = -\frac{E}{RC}\left[\frac{RC/2}{s} - \frac{RC/2}{\left(s + \frac{2}{RC}\right)}\right] + \frac{v_{C0}}{\left(s + \frac{2}{RC}\right)} = -\frac{E}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{\left(s + \frac{2}{RC}\right)}\right] + \frac{v_{C0}}{\left(s + \frac{2}{RC}\right)}$$

y

$$v_C(t) = Y(t)\left[-\frac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right) + v_{C0}e^{-\frac{2t}{RC}}\right] = Y(t)\left[-\frac{E}{2} + \left(\frac{E}{2} + v_{C0}\right)e^{-\frac{2t}{RC}}\right]$$

Recordando que $v_{C0} = E$, queda

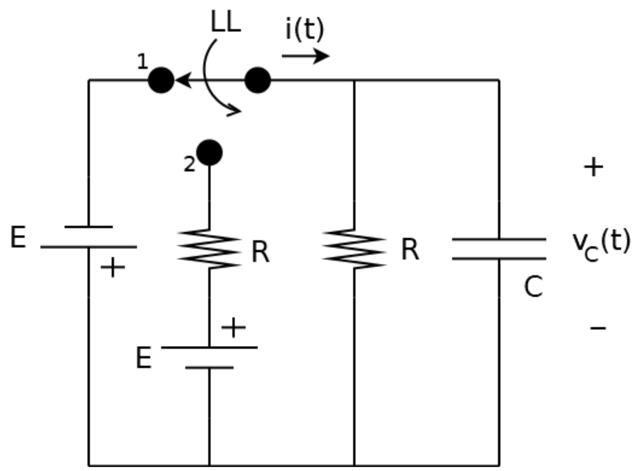
$$v_C(t) = Y(t)\left[-\frac{E}{2} + \frac{3E}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right] = Y(t).\frac{E}{2}.\left[-1 + 3e^{-\frac{2t}{RC}}\right]$$

Observemos que el valor asintótico de la tensión $(-E/2)$ coincide con el análisis en régimen de continua del circuito.

La corriente vale

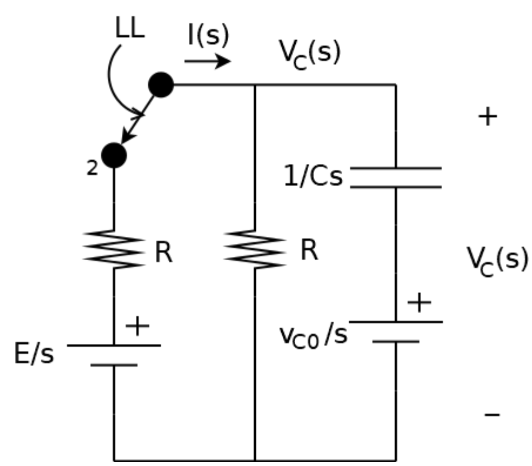
$$i(t) = Y(t).\frac{-E - v_C(t)}{R} = -Y(t)\frac{E}{R} - Y(t).\frac{E}{2R}.\left[-1 + 3e^{-\frac{2t}{RC}}\right] = -Y(t).\frac{E}{2R}.\left[1 + 3e^{-\frac{2t}{RC}}\right]$$

Problema 14



El circuito de la figura se encuentra en régimen de continua cuando conmuta la llave LL, en el instante que denotaremos por $t = 0$. Modelando el circuito en Laplace, hallar $v_C(t)$ e $i(t)$ para todo instante positivo.

Con la llave en 1, el condensador queda cargado a la tensión de la fuente de la izquierda, por lo que, cuando la llave conmuta dle punto 1 al punto 2, el dato previo del condensador es $v_{C0} = -E$. Para analizar qué pasa a partir



de $t = 0$, pasamos al circuito equivalente en Laplace. Planteando el nudo superior, tenemos que

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s} - V_C}{R} = \frac{V_C}{R} + \left(V_C - \frac{v_{C0}}{s}\right) Cs$$

Operando,

$$\frac{E}{Rs} + Cv_{C0} = V_C.\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + Cs\right] = V_C.\left[\frac{2+RCs}{R}\right] \Rightarrow \frac{E}{s} + RCv_{C0} = (2+RCs)V_C$$

De donde

$$V_C(s) = \frac{\frac{E}{s} + RCv_{C0}}{2+RCs} = \frac{E + RCsv_{C0}}{s(2+RCs)} = \frac{\frac{E}{RC} + sv_{C0}}{s\left(s+\frac{2}{RC}\right)} = \frac{\frac{E}{RC}}{s\left(s+\frac{2}{RC}\right)} + \frac{v_{C0}}{\left(s+\frac{2}{RC}\right)}$$

El segundo término ya está pronto para ser antitransformado. Para el primero, hacemos fracciones simples.

$$V_C(s) = \frac{E}{RC}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{\left(s+\frac{2}{RC}\right)}\right] + \frac{v_{C0}}{\left(s+\frac{2}{RC}\right)}$$

Las constantes A y B salen por *tapadita* o haciendo común denominador.

$$A = \frac{RC}{2} = -B$$

Entonces

$$V_C(s) = \frac{E}{RC}\left[\frac{RC/2}{s} - \frac{RC/2}{\left(s+\frac{2}{RC}\right)}\right] + \frac{v_{C0}}{\left(s+\frac{2}{RC}\right)} = \frac{E}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{\left(s+\frac{2}{RC}\right)}\right] + \frac{v_{C0}}{\left(s+\frac{2}{RC}\right)}$$

y

$$v_C(t) = Y(t)\left[\frac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right) + v_{C0}e^{-\frac{2t}{RC}}\right] = Y(t)\left[\frac{E}{2} + \left(-\frac{E}{2} + v_{C0}\right)e^{-\frac{2t}{RC}}\right]$$

Recordando que $v_{C0} = -E$, queda

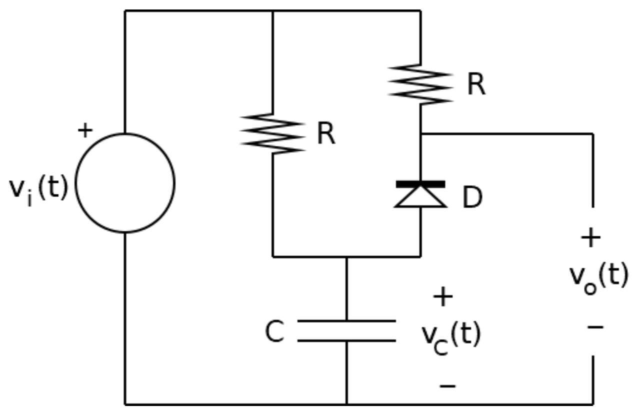
$$v_C(t) = Y(t)\left[\frac{E}{2} - \frac{3E}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right] = Y(t).\frac{E}{2}.\left[1 - 3e^{-\frac{2t}{RC}}\right]$$

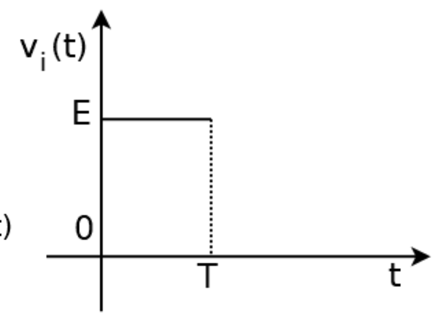
Observemos que el valor asintótico de la tensión $(E/2)$ coincide con el análisis en régimen de continua del circuito.

La corriente vale

$$i(t) = Y(t).\frac{E - v_C(t)}{R} = Y(t)\frac{E}{R} - Y(t).\frac{E}{2R}.\left[1 - 3e^{-\frac{2t}{RC}}\right] = Y(t).\frac{E}{2R}.\left[1 + 3e^{-\frac{2t}{RC}}\right]$$

Problema 15





El circuito de la figura, con el condensador inicialmente descargado, se inyecta la señal de la gráfica. Se sabe que $T = RC$. Analizando por tramos, hallar las tensiones $v_C(t)$ y $v_o(t)$ para todo instante positivo.

Hacemos un análisis por tramos, dado que la entrada se puede pensar en dos tramos: el primero en el que la entrada es un escalón y el segundo en el que es nula. A estos tramos se les pueden agregar otros debido a la presencia del diodo. Estos potenciales tramos adicionales dependerán del funcionamiento del circuito, por lo que hay que monitorear el estado del diodo.

Comencemos con el primer tramo. La fuente está en su valor máximo (E) y el condensador tiene dato previo nulo. ¿Qué pasa con el diodo? Observemos que el borne inferior del diodo está a la tensión del condensador, por lo que inicialmente está a tierra, ya que no hay carga en el condensador. Si no hay corriente por el diodo, el borne superior está a la tensión de la fuente. Con estas observaciones, si suponemos que el diodo está OFF, podemos verificarlo en seguida ya que

$$v_D(t) = v_C(t) - v_i(t) = -E < 0$$

y esta condición se va a mantener mientras la fuente no conmute o la tensión del condensador no alcance la de la fuente. En estas condiciones,

$$\boxed{v_o(t) = Y(t).E}$$

Veamos cómo evoluciona la tensión en bornes del condensador. Al estar el diodo cortado, el circuito resultante es un circuito de carga de un condensador a través de una resistencia R alimentado por una fuente constante de valor E. Ya sea por Laplace o recordando la ecuación de carga/descarga de un condensador, obtenemos

$$v_C(t) = Y(t).E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Esta expresión vale hasta que se corte el diodo (no va a pasar si no hay cambios en la fuente) o hasta que lleguemos al segundo tramo de la fuente. En ese instante, la tensión del condensador vale

$$v_C(T) = E\left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right) = E\left(1 - e^{-1}\right) = v_{C0}$$

v_{C0} será el dato previo para el siguiente tramo.

Analicemos el segundo tramo. Para ello, definimos un nuevo origen de tiempo $t' = 0$, con $t' = t - T$. En este nuevo tramo la entrada es nula y el condensador tiene dato previo no nulo y positivo. Veamos nuevamente qué pasa con el diodo. Es fácil descartar que el diodo está OFF, ya que la tensión superior del diodo sería nula y la inferior positiva. Verifiquemos entonces que está ON, calculando la corriente que circula por él de abajo hacia arriba:

$$i_D(t) = \frac{v_C(t)}{R}$$

Esta corriente es inicialmente positiva, ya que tiene el mismo signo que la tensión en el condensador. Más aún, el diodo conducirá en tanto el condensador tenga tensión positiva en sus bornes. Observemos que al estar el diodo ON, la tensión de interés v_o coincide con al tensión en el condensador v_C. Para calcular esta tensión, notemos que tenemos un circuito de descarga del condensador, con constante de tiempo $\frac{RC}{2}$, ya que al conducir el diodo, las dos resistencias quedan en paralelo (puede verse también por Laplace). Entonces

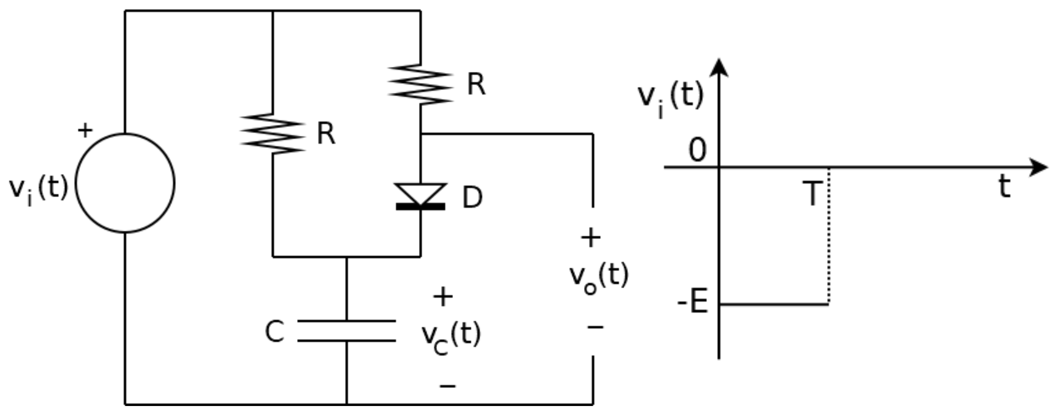
$$v_o(t') = v_C(t') = Y(t').v_{C0}e^{-\frac{2t'}{RC}}$$

Este valor es siempre positivo, por lo que el diodo no va a conmutar.

Resumiendo

$$v_o(t) = \begin{cases} E & , \quad t < T \\ E\left(1 - e^{-1}\right).e^{-\frac{2(t-T)}{RC}} & , \quad t > T \end{cases} \quad , \quad v_C(t) = \begin{cases} E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) & , \quad t < T \\ E\left(1 - e^{-1}\right).e^{-\frac{2(t-T)}{RC}} & , \quad t > T \end{cases}$$

Problema 16



El circuito de la figura, con el condensador inicialmente descargado, se inyecta la señal de la gráfica. Se sabe que $T = RC$. Analizando por tramos, hallar las tensiones $v_C(t)$ y $v_o(t)$ para todo instante positivo.

Hacemos un análisis por tramos, dado que la entrada se puede pensar en dos tramos: el primero en el que la entrada es un escalón y el segundo en el que es nula. A estos tramos se les pueden agregar otros debido a la presencia del diodo. Estos potenciales tramos adicionales dependerán del funcionamiento del circuito, por lo que hay que monitorear el estado del diodo.

Comencemos con el primer tramo. La fuente está en su valor mínimo ($-E$) y el condensador tiene dato previo nulo. ¿Qué pasa con el diodo? Observemos que el borne inferior del diodo está a la tensión del condensador, por lo que inicialmente está a tierra, ya que no hay carga en el condensador. Si no hay corriente por el diodo, el borne superior está a la tensión de la fuente. Con estas observaciones, si suponemos que el diodo está OFF, podemos verificarlo en seguida ya que

$$v_D(t) = v_i(t) - v_C(t) = -E < 0$$

y esta condición se va a mantener mientras la fuente no conmute o la tensión del condensador no alcance la de la fuente. En estas condiciones,

$$\boxed{v_o(t) = Y(t).E}$$

Veamos cómo evoluciona la tensión en bornes del condensador. Al estar el diodo cortado, el circuito resultante es un circuito de carga de un condensador a través de una resistencia R alimentado por una fuente constante de valor $-E$. Ya sea por Laplace o recordando la ecuación de carga/descarga de un condensador, obtenemos

$$v_C(t) = -Y(t).E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Esta expresión vale hasta que se corte el diodo (no va a pasar si no hay cambios en la fuente) o hasta que lleguemos al segundo tramo de la fuente. En ese instante, la tensión del condensador vale

$$v_C(T) = -E\left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right) = -E\left(1 - e^{-1}\right) = v_{C0}$$

v_{C0} será el dato previo para el siguiente tramo.

Analicemos el segundo tramo. Para ello, definimos un nuevo origen de tiempo $t' = 0$, con $t' = t - T$. En este nuevo tramo la entrada es nula y el condensador tiene dato previo no nulo y negativo. Veamos nuevamente qué pasa con el diodo. Es fácil descartar que el diodo está OFF, ya que la tensión superior del diodo sería nula y la inferior negativa. Verifiquemos entonces que está ON, calculando la corriente que circula por él de arriba hacia abajo:

$$i_D(t) = \frac{-v_C(t)}{R}$$

Esta corriente es inicialmente positiva, ya que tiene signo opuesto al de la tensión en el condensador. Más aún, el diodo conducirá en tanto el condensador tenga tensión negativa en sus bornes. Observemos que al estar el diodo ON, la tensión de interés v_o coincide con al tensión en el condensador v_C. Para calcular esta tensión, notemos que tenemos un circuito de descarga del condensador, con constante de tiempo $\frac{RC}{2}$, ya que al conducir el diodo, las dos resistencias quedan en paralelo (puede verse también por Laplace). Entonces

$$v_o(t') = v_C(t') = Y(t').v_{C0}e^{-\frac{2t'}{RC}}$$

Este valor es siempre negativo, por lo que el diodo no va a conmutar.

Resumiendo

$$v_o(t) = \begin{cases} -E & , \quad t < T \\ -E\left(1 - e^{-1}\right).e^{-\frac{2(t-T)}{RC}} & , \quad t > T \end{cases} \quad , \quad v_C(t) = \begin{cases} -E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) & , \quad t < T \\ -E\left(1 - e^{-1}\right).e^{-\frac{2(t-T)}{RC}} & , \quad t > T \end{cases}$$