

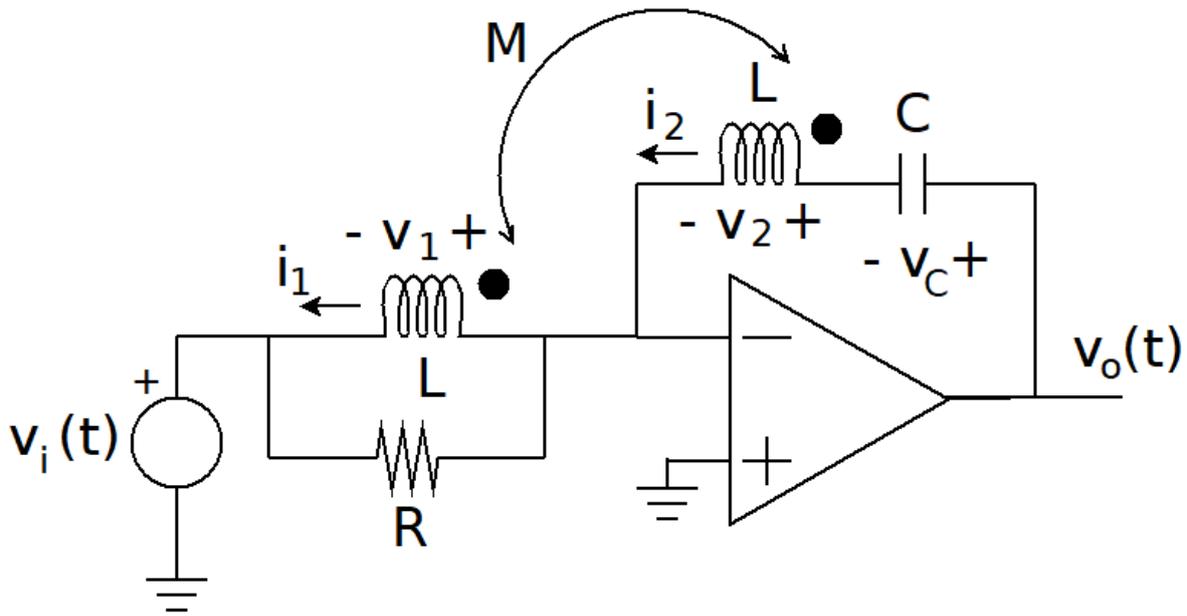
# Teoría de Circuitos

## Examen de julio de 2024

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

### Problema 1

Se considera el circuito de la figura. Las inductancias son idénticas y forman un transformador perfecto ( $M = L$ ).



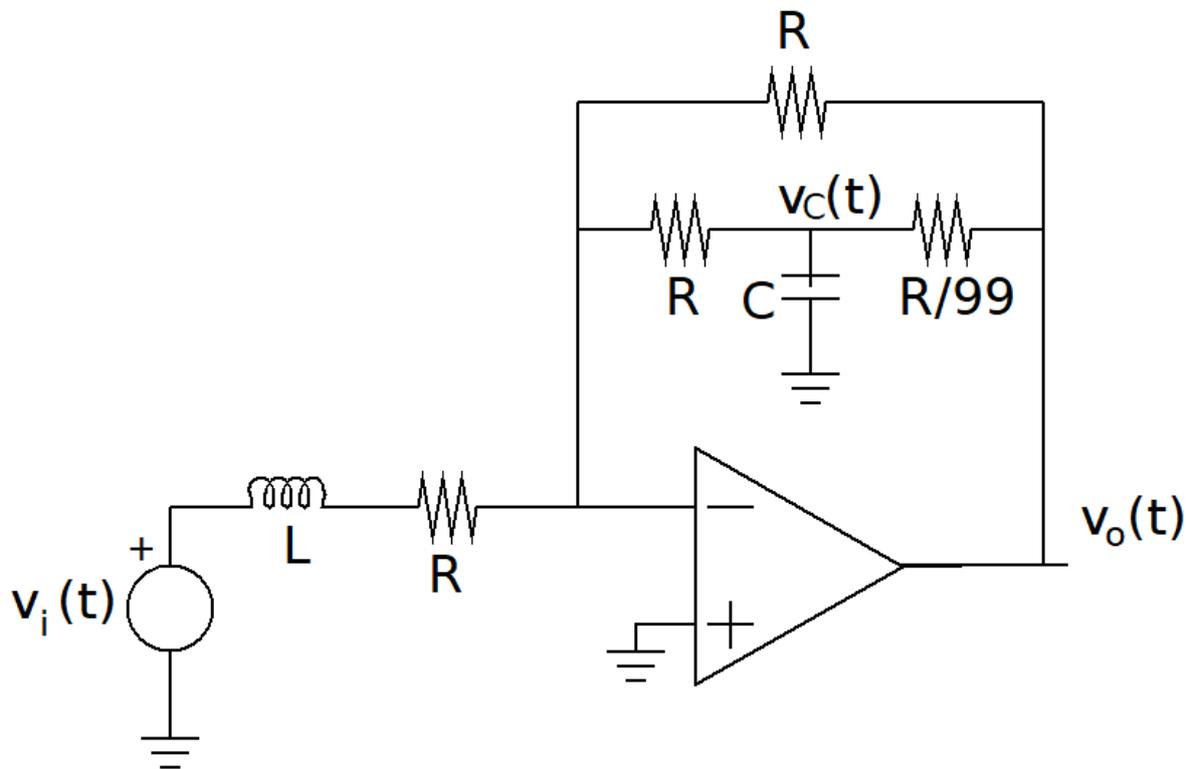
- (a) Asumiendo condiciones iniciales nulas, hallar la transferencia

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

- (b) Simplificar la expresión anterior para el caso  $\frac{1}{RC} = 2\omega_0$  y  $\frac{1}{LC} = 2\omega_0^2$ .
- (c) Se aplica a la entrada un escalón de amplitud  $E$ .
- i) Hallar  $v_o(t)$ .
  - ii) Si el operacional se alimenta con fuentes de valor  $\pm V_{CC}$  ( $V_{CC} > E$ ), determinar si el operacional saturará y, si lo hace, hallar el instante en que eso sucederá.
- (d) Hallar  $v_o(t)$  cuando se aplica una entrada nula, pero se considera una condición inicial no nula  $v_{C0}$  en el condensador.

## Problema 2

Se considera el circuito de la figura, con el operacional ideal.



- (a) Hallar la transferencia en régimen

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

- (b) Verificar que se llega a algo del estilo

$$H(j\omega) = K \cdot \frac{\omega_0 \cdot (j\omega + \omega_1)}{(j\omega + \omega_0) \cdot (j\omega + \omega_2)}$$

- (c) Sabiendo que se cumple  $\omega_1 = 100\omega_0$  y  $\omega_2 = 199\omega_0$ :

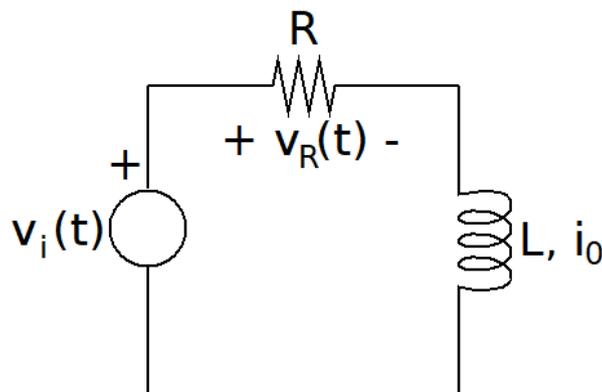
- i) deducir los diagramas de Bode asintóticos de  $H(j\omega)$  (asumir que las singularidades están muy separadas entre sí).
  - ii) hallar los valores exactos de la transferencia para las tres singularidades y ubicarlos en los diagramas anteriores.
  - iii) bosquejar los diagramas reales.
  - iv) hallar la distancia exacta entre el diagrama real de módulo y el asintótico, para la frecuencia  $\omega_2$ .
- (d) Hallar la respuesta en régimen exacta del circuito ante una entrada sinusoidal de pulsación  $\omega_2$  y amplitud  $A$ .

# Teoría de Circuitos

## Examen de julio de 2024

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

### Pregunta 1



Se considera el circuito de la figura.

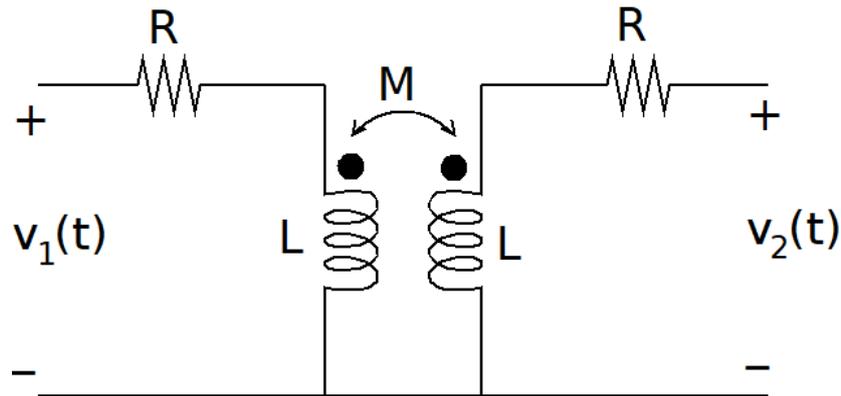
- Dibujar, explicando, el circuito equivalente en Laplace.
- Hallar la expresión temporal de la tensión en bornes de la resistencia cuando se considera a la entrada un escalón de amplitud  $E$  y una condición inicial no nula  $i_0$  en la inductancia.

### Pregunta 2

Se considera una componente con tensión en bornes  $v(t)$  y corriente  $i(t)$ , medidas con la convención estándar de la ley de Ohm.

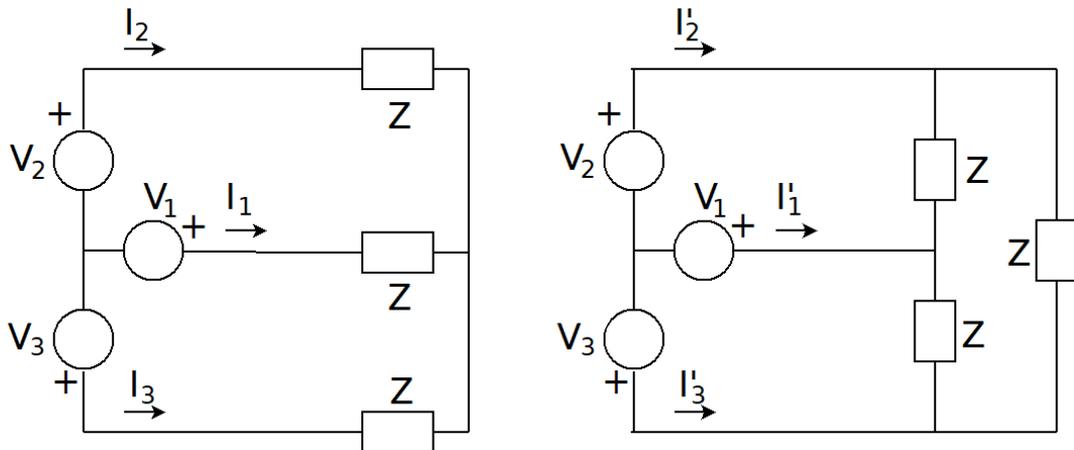
- Definir potencia instantánea  $p(t)$  y la potencia media en régimen sinusoidal  $P$ .
- A partir de la definición anterior, probar la expresión  $P = re(V\bar{I})$ , siendo  $V$  e  $I$  los fasores asociados a la tensión y la corriente involucrados, en valores eficaces.

### Pregunta 3



- (a) Trabajando en el dominio de Laplace, hallar las impedancias de vacío del cuadripolo de la figura.
- (b) Deducir el equivalente T del circuito.

### Pregunta 4

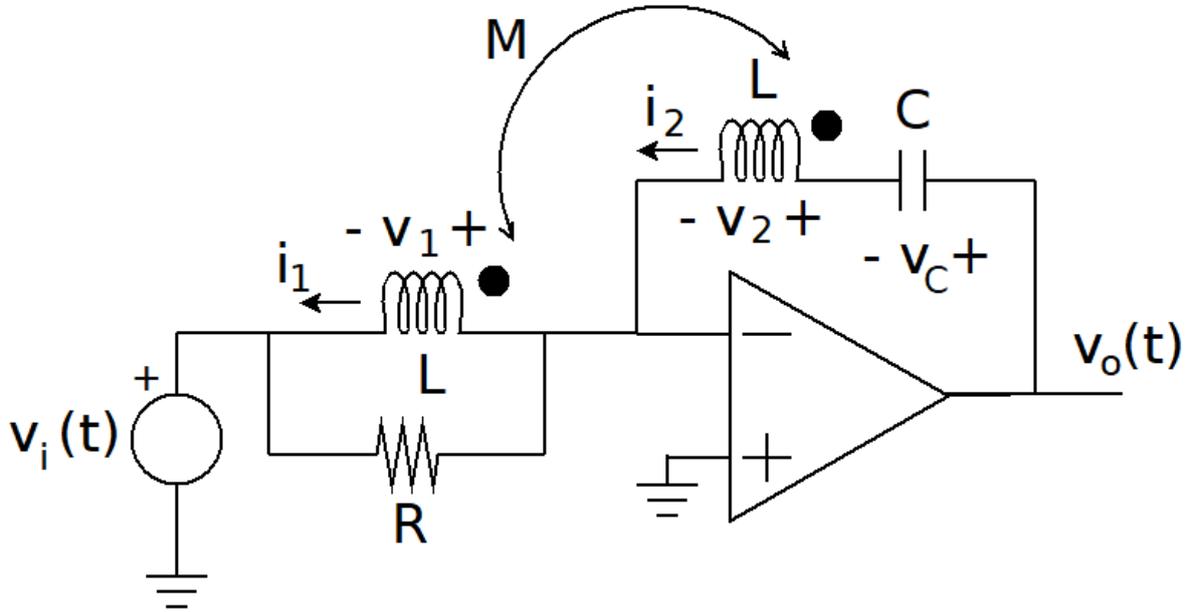


En las figuras de arriba, se usa el mismo sistema de fuentes para alimentar dos cargas trifásicas, conformadas por tres impedancias idénticas de valor  $Z$ , en un caso conectadas en estrella y en el otro conectadas en triángulo. Se pide hallar la relación exacta entre el módulo del fasor  $I_1$  y el módulo del fasor  $I'_1$ . Es importante explicar bien los pasos seguidos para hallar dicha relación.

## Solución

### Problema 1

Se considera el circuito de la figura. Las inductancias son idénticas y forman un transformador perfecto ( $M = L$ ).



- (a) Asumiendo condiciones iniciales nulas, hallar la transferencia

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Primeramente miramos el transformador. En Laplace, tenemos que:

$$\begin{cases} V_1(s) = LsI_1(s) + MsI_2(s) \\ V_2(s) = LsI_2(s) + MsI_1(s) \end{cases}$$

Al ser perfecto ( $M = \sqrt{L_1L_2} = L$ ), tenemos la igualdad de  $V_1$  y  $V_2$ :

$$\left. \begin{cases} V_1(s) = LsI_1(s) + LsI_2(s) = Ls[I_1(s) + I_2(s)] \\ V_2(s) = LsI_2(s) + LsI_1(s) = Ls[I_1(s) + I_2(s)] \end{cases} \right\} \Rightarrow V_1 = V_2 = Ls \cdot [I_1 + I_2]$$

(Prescindimos del uso de  $s$  por comodidad).

Teniendo claro qué hace el transformador, pasamos a analizar el operacional. Observemos que está en una especie de configuración inversora, aunque la mutua entre las inductancias rompe el análisis tradicional. Notemos que  $V_1(s)$  es a tensión entre la pata  $-$  y el borne positivo de la fuente de entrada. Con las hipótesis de idealidad, en una configuración lineal, la ganancia infinita implica el cortocircuito virtual y, por lo tanto,

$$V_i(s) = -V_1(s) = -V_2(s)$$

Además, la corriente que sale de la fuente vale

$$I_i(s) = \frac{V_i(s)}{R} - I_1(s)$$

Dada la resistencia de entrada infinita, toda la corriente que sale de la fuente termina circulando por la rama de realimentación del opamp, que es  $I_2(s)$ , a menos del sentido:

$$I_i(s) = \frac{V_i(s)}{R} - I_1(s) = -I_2(s)$$

Entonces, tenemos dos ecuaciones que vinculan  $V_i$  con la corrientes: la del transformador y la del nudo en la pata  $-$ :

$$\begin{cases} V_i(s) &= -Ls[I_1(s) + I_2(s)] \\ V_i(s) &= R[I_1(s) - I_2(s)] \end{cases}$$

De acá podemos despejar tanto  $I_1$  como  $I_2$  en función de  $V_i$ :

$$I_1(s) = \frac{-R + Ls}{2RLs} \cdot V_i(s) \quad , \quad I_2(s) = -\frac{R + Ls}{2RLs} \cdot V_i(s)$$

Por otro lado, mirando la rama de realimentación del opamp, tenemos que

$$V_o(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{Cs} + V_2(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{Cs} - V_i(s) = -\frac{R + Ls}{2RLCs^2} \cdot V_i(s) - V_i(s)$$

$$V_o(s) = -\left[ \frac{R + Ls}{2RLCs^2} + 1 \right] V_i(s) = -\left[ \frac{R + Ls + 2RLCs^2}{2RLCs^2} \right] V_i(s)$$

De donde

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R}{2RLCs^2} - \frac{Ls}{2RLCs^2} - \frac{2RLCs^2}{2RLCs^2}$$

$$H(s) = -\frac{1}{2LC} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2RC} \frac{1}{s} - 1$$

- (b) Simplificar la expresión anterior para el caso  $\frac{1}{RC} = 2\omega_0$  y  $\frac{1}{LC} = 2\omega_0^2$ .

$$H(s) = -\frac{1}{2LC} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2RC} \frac{1}{s} - 1 = -\frac{\omega_0^2}{s^2} - \frac{\omega_0}{s} - 1$$

- (c) Se aplica a la entrada un escalón de amplitud  $E$ .

- i) Hallar  $v_o(t)$ .

Asumiendo condiciones iniciales nulas<sup>a</sup>, sabemos que  $V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$ . En este caso,  $V_i(s) = \frac{E}{s}$ , de donde

$$V_o(s) = \left[ -\frac{\omega_0^2}{s^2} - \frac{\omega_0}{s} - 1 \right] \cdot \frac{E}{s} = -\left[ E\omega_0^2 \cdot \frac{1}{s^3} + E\omega_0 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{E}{s} \right]$$

Pasando al tiempo:

$$v_o(t) = -Y(t) \cdot E \cdot \left[ \omega_0^2 \cdot \frac{t^2}{2} + \omega_0 \cdot t + 1 \right]$$

- ii) Si el operacional se alimenta con fuentes de valor  $\pm V_{CC}$  ( $V_{CC} > E$ ), decidir si el operacional saturará y, si lo hace, hallar el instante en que eso sucede.

<sup>a</sup>Si no hiciéramos esta hipótesis, no podríamos hallar  $v_o(t)$ , ya que depende no solo de la entrada, sino también de las condiciones iniciales.

Para definir si satura tenemos que ver si la salida alcanza en algún momento a alguna de las fuentes. Entonces, tenemos que ver si existe un instante  $t_S$  tal que

$$|v_o(t_S)| = \left| -E \cdot \left[ \omega_0^2 \cdot \frac{t_S^2}{2} + \omega_0 \cdot t_S + 1 \right] \right| = V_{CC}$$

$$\omega_0^2 \cdot \frac{t_S^2}{2} + \omega_0 \cdot t_S + 1 = \frac{V_{CC}}{E}$$

Planteamos  $x = \omega_0 t$  y  $c = V_{CC}/E - 1 > 0$  y nos queda:

$$x^2 + x - c = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

Es decir, hay una solución positiva posible, que vale

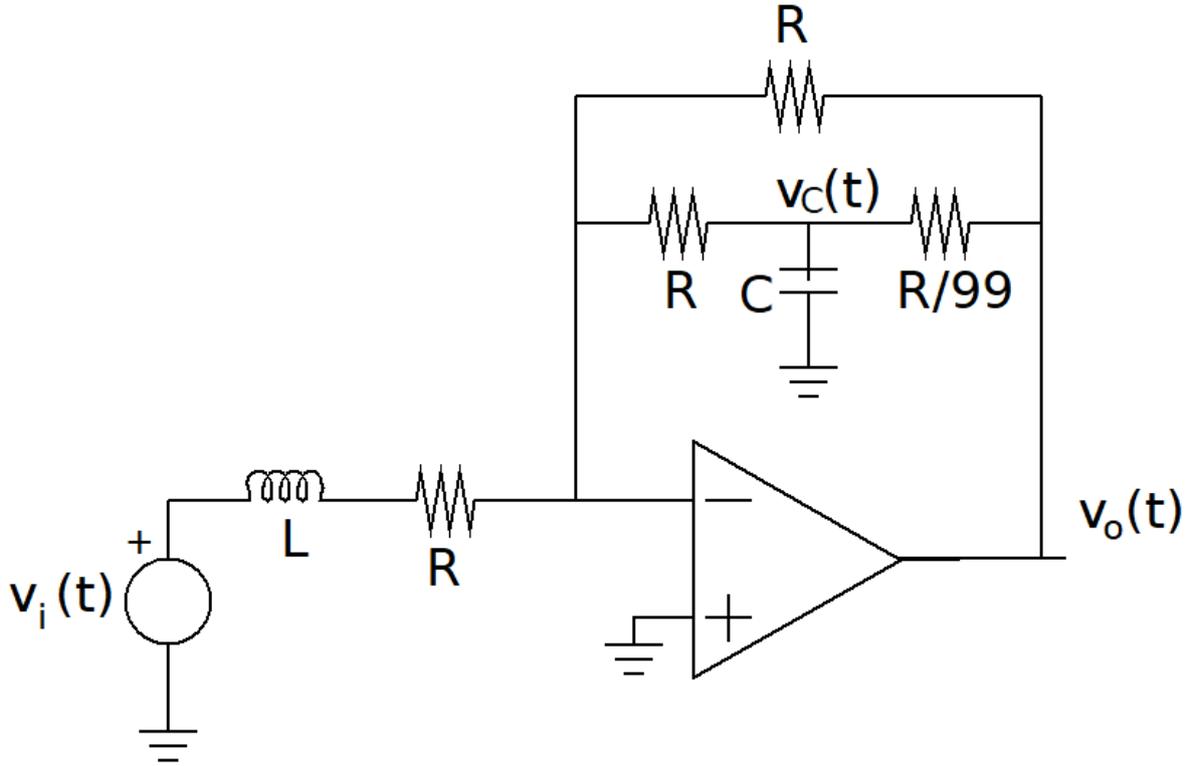
$$x_S = \omega_0 t_S = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \Rightarrow t_S = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{V_{CC}}{E}}}{2\omega_0} = \frac{-\sqrt{E} + \sqrt{E + 4V_{CC}}}{2\omega_0 \sqrt{E}}$$

- (d) Hallar  $v_o(t)$  cuando se aplica una entrada nula, pero se considera una condición inicial no nula  $v_{C0}$  en el condensador.

Al anular la entrada, la salida dependerá solamente de la condición inicial no nula que estamos considerando. En primer término, dado que anulamos la entrada y considerando la tierra virtual, tenemos que  $v_1(t) = 0$ , de donde  $i_1(t) + i_2(t) = 0$ . Por otro lado, como por la resistencia no puede circular corriente, ya que sus dos extremos están al mismo potencial (tierra física y tierra virtual), tenemos que  $i_1(t) = i_2(t)$ . Entonces concluimos que ambas corrientes son nulas y también lo son las caídas  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ . Entonces, la tensión  $v_o(t)$ , medida respecto de tierra, vale directamente la tensión en el condensador, y se mantiene constante a lo largo del tiempo.

## Problema 2

Se considera el circuito de la figura, con el operacional ideal.



(a) Hallar la transferencia en régimen

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

Con las hipótesis de idealidad del operacional, y en funcionamiento lineal, toda la corriente que viene de la fuente de tensión de entrada se va por la rama superior y, además, la pata  $-$  está en cortocircuito virtual a tierra. Entonces, pasando al circuito equivalente en Laplace, con datos previos nulos:

$$\frac{V_i(s)}{R + Ls} = -\frac{V_o(s)}{R} - \frac{V_C(s)}{R}$$

Por otro lado, tenemos que

$$-\frac{V_C(s)}{R} = V_C(s) \cdot Cs + \frac{V_C(s) - V_o(s)}{R/99} \Rightarrow -V_C(s) \cdot \left[ \frac{1}{R} + Cs + \frac{99}{R} \right] = -99 \frac{V_o(s)}{R}$$

$$-V_C(s) \cdot \left[ \frac{100 + RCs}{R} \right] = -99 \frac{V_o(s)}{R}$$

Podemos despejar  $V_C(s)$  en función de  $V_o(s)$ :

$$V_C(s) = V_o(s) \cdot \frac{99}{100 + RCs}$$

Volviendo a la ecuación del nudo en la pata  $-$ , obtenemos que

$$\frac{V_i(s)}{R + Ls} = -\frac{V_o(s)}{R} - V_o(s) \cdot \frac{99}{R(100 + RCs)} = -V_o(s) \cdot \left[ \frac{1}{R} + \frac{99}{R(100 + RCs)} \right]$$

$$\frac{V_i(s)}{R + Ls} = -V_o(s) \cdot \left[ \frac{100 + RCs + 99}{R(100 + RCs)} \right] = -V_o(s) \cdot \left[ \frac{199 + RCs}{R(100 + RCs)} \right]$$

Ya podemos hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ :

$$H(s) = -\frac{R(100 + RCs)}{(R + Ls) \cdot (199 + RCs)} = -\frac{R^2C(\frac{100}{RC} + s)}{LRC(\frac{R}{L} + s) \cdot (\frac{199}{RC} + s)}$$

$$H(s) = -\frac{\frac{R}{L}(\frac{100}{RC} + s)}{(\frac{R}{L} + s) \cdot (\frac{199}{RC} + s)}$$

(b) Verificar que se llega a algo del estilo

$$H(j\omega) = K \cdot \frac{\omega_0 \cdot (j\omega + \omega_1)}{(j\omega + \omega_0) \cdot (j\omega + \omega_2)}$$

Basta con definir  $K = -1$  y :

$$\omega_0 = \frac{R}{L} \quad , \quad \omega_1 = \frac{100}{RC} \quad \omega_2 = \frac{199}{RC} (\approx 2\omega_1)$$

(c) Sabiendo que se cumple  $\omega_1 = 100\omega_0$  y  $\omega_2 = 199\omega_0$ :

i) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de  $H(j\omega)$  (asumir que las singularidades están muy separadas entre sí).

Partimos de la expresión genérica:

$$H(j\omega) = -\frac{\omega_0 \cdot (j\omega + 100\omega_0)}{(j\omega + \omega_0) \cdot (j\omega + 199\omega_0)}$$

Veamos primero las frecuencias críticas. En el numerador, tenemos la raíz  $-100\omega_0$ , en tanto en el denominador, tenemos las raíces  $-\omega_0$  y  $-199\omega_0$ .

Realizamos un análisis por bandas, esencialmente despreciando la parte real o la imaginaria de los factores de primer orden. En función de las frecuencias críticas, tenemos cuatro bandas:  $(0, \omega_0]$ ,  $[\omega_0, 100\omega_0]$ ,  $[100\omega_0, 199\omega_0]$  y  $[199\omega_0, +\infty)$ . Observemos que las dos frecuencias críticas mayores solamente distan una prácticamente una octava entre sí. Vamos a hacer el análisis asintótico, que se basa en asumir que las frecuencias críticas están muy separadas, lo que en esa banda no es el caso. Eso significa que los diagramas asintóticos no serán buenos en la banda  $[100\omega_0, 199\omega_0]$ . Hagamos el análisis de cada banda:

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{\omega_0 \cdot (100\omega_0)}{(\omega_0) \cdot (199\omega_0)} = -\frac{100}{199} \approx -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx -20 \log(2) \approx -3 \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx -\pi(\acute{o} + \pi) \end{cases}$$

$$\omega_0 \ll \omega \ll 100\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{\omega_0 \cdot (100\omega_0)}{(j\omega) \cdot (199\omega_0)} = -\frac{100\omega_0}{199(j\omega)} \Rightarrow$$

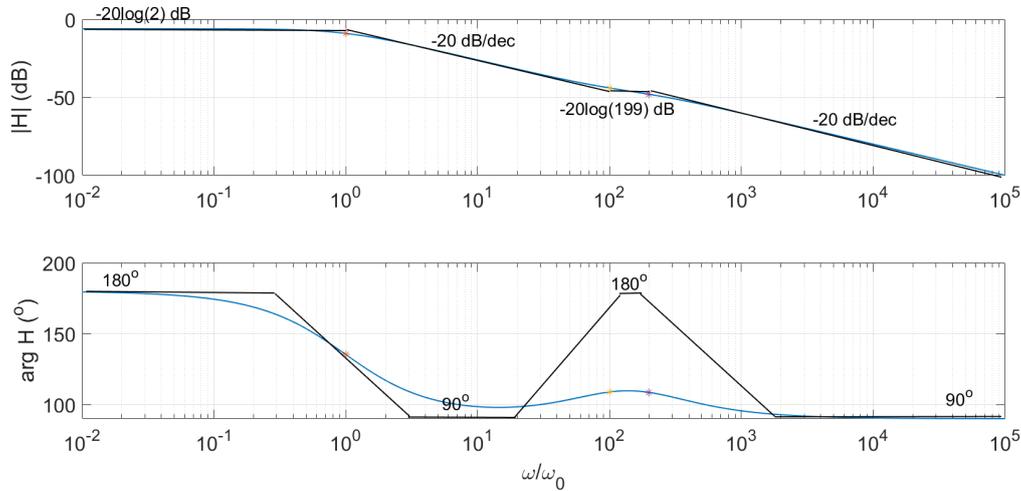
$$\begin{cases} |H| & \approx 20 \log\left(\frac{100\omega_0}{199}\right) - 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx -\frac{3\pi}{2}(\acute{o} + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$100\omega_0 \ll \omega \ll 199\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{\omega_0 \cdot (j\omega)}{(j\omega) \cdot (199\omega_0)} = -\frac{1}{199} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx -20 \log(199) \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx -\pi(\acute{o} + \pi) \end{cases}$$

$$199\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{\omega_0 \cdot (j\omega)}{(j\omega) \cdot (j\omega)} = -\frac{\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx 20 \log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx -\frac{3\pi}{2} \left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Tenemos que tener cuidado al momento de *empalmar* las fases. Las frecuencias críticas son todas de primer orden, por lo que solamente pueden sumar o restar 90 grados.

Con las consideraciones anteriores, ya podemos definir bien qué hace la fase. Elegimos arrancar desde  $-\pi$  en baja frecuencia. Eso nos fijará el resto del diagrama. Entonces, para las siguientes bandas, en orden creciente, tenemos:  $-\frac{3\pi}{2}$ ,  $-\pi$  y  $-\frac{3\pi}{2}$ . La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de  $H(j\omega)$ . En negro se muestran los diagramas asintóticos, en tanto en azul se muestran los diagramas reales.<sup>b</sup>



ii) Hallar los valores exactos del diagrama de módulo y fase para las tres singularidades.

El valor exacto en el primer polo vale

$$\begin{aligned} H_{re}(j\omega_0) &= -\frac{\omega_0(j\omega_0 + 100\omega_0)}{(j\omega_0 + \omega_0)(j\omega_0 + 199\omega_0)} = -\frac{j + 100}{(j + 1)(j + 199)} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + 10^4}}{\sqrt{2} \times \sqrt{1 + 199^2}} \angle \pi + \text{atan}\left(\frac{1}{100}\right) - \frac{\pi}{4} - \text{atan}\left(\frac{1}{199}\right) \\ H_{re}(j\omega_0) &\approx 0,35 \angle 135^\circ \approx 0,35 \angle 2,36 \text{ rad} \approx 0,35 \angle -225^\circ \end{aligned}$$

con  $20 \log(|H(j\omega_0)|) \approx -9 \text{ dB}$ .

El valor exacto en el cero vale:

$$\begin{aligned} H_{re}(j100\omega_0) &= -\frac{\omega_0(j100\omega_0 + 100\omega_0)}{(j100\omega_0 + \omega_0)(j100\omega_0 + 199\omega_0)} = -\frac{j100 + 100}{(j100 + 1)(j100 + 199)} = \\ &= \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{100^2 + 1} \times \sqrt{100^2 + 199^2}} \angle \pi + \frac{\pi}{4} - \text{atan}(100) - \text{atan}\left(\frac{1}{100}\right) \end{aligned}$$

<sup>b</sup>Se indican con asterisco los valores reales para las frecuencias críticas. Los cálculos se detallan luego. Es clara la pobre aproximación en la zona entre las dos frecuencias críticas ( $100\omega_0$  y  $199\omega_0$ ), especialmente en la fase.

$$H_{re}(j100\omega_0) \approx 0,006 \angle 109^\circ = 0,006 \angle 1,9 \text{rad} = 0,006 \angle -251^\circ$$

$$\text{con } 20 \log(|H(j199\omega_0)|) \approx -44 \text{dB}.$$

El valor exacto en el segundo polo vale:

$$\begin{aligned} H_{re}(j199\omega_0) &= -\frac{\omega_0(j199\omega_0 + 100\omega_0)}{(j199\omega_0 + \omega_0)(j199\omega_0 + 199\omega_0)} = -\frac{j199 + 100}{(j199 + 1)(j199 + 199)} = \\ &= \frac{\sqrt{199^2 + 10^4}}{\sqrt{199^2 + 1} \times 199\sqrt{2}} \angle \pi + \text{atan}\left(\frac{199}{100}\right) - \text{atan}(199) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$H_{re}(j199\omega_0) \approx 0,004 \angle 108^\circ = 0,004 \angle 1,89 \text{rad} = 0,004 \angle -252^\circ$$

$$\text{con } 20 \log(|H(j199\omega_0)|) \approx -48 \text{dB}.$$

- iii) Hallar la distancia exacta entre el diagrama real de módulo y el asintótico, para la frecuencia  $\omega_2 = 199\omega_0$ .

El valor asintótico podemos tomarlo de la banda  $[100\omega_0, 199\omega_0]$ , obteniendo

$$H_{as}(j199\omega_0) = -\frac{1}{199}$$

cuyo módulo es aproximadamente 0,05 y su valor en  $\text{dB}$  es  $-20 \log(199) = -45,9 \text{dB}$ . La distancia exacta, expresada en decibeles, vale:

$$\begin{aligned} d_{199\omega_0} &= 20 \log(|H_{re}(j199\omega_0)|) - 20 \log(|H_{as}(j199\omega_0)|) = 20 \log\left(\frac{|H_{re}(j199\omega_0)|}{|H_{as}(j199\omega_0)|}\right) \\ &= 20 \log\left(\frac{|j199 + 100| \times 199}{|j199 + 1| \times 199\sqrt{2}}\right) = -2,03 \text{dB} \end{aligned}$$

En lugar de hacer la cuenta exacta (con una calculadora), podemos hacer una cuenta aproximada, del estilo,

$$\begin{aligned} d_{199\omega_0} &\approx 20 \log\left(\frac{100|j2 + 1| \times 199}{|j199| \times 199\sqrt{2}}\right) = 20 \log\left(\frac{100\sqrt{5}}{199\sqrt{2}}\right) \approx 20 \log\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right) = 20 \log\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right) \\ &= 10 \log\left(\frac{5}{8}\right) \approx -2 \text{dB} \end{aligned}$$

- (d) Hallar la respuesta en régimen exacta del circuito ante una entrada sinusoidal de pulsación  $\omega_2$ .

Sabemos que ante una entrada sinusoidal de pulsación  $\tilde{\omega}$ , amplitud  $A$  y fase  $\varphi$ , de la forma

$$v_i(t) = A \cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

el sistema responde en régimen con una salida también sinusoidal, con la misma frecuencia, de la forma

$$v_{o,reg}(t) = A |H(j\tilde{\omega})| \cos(\tilde{\omega}t + \varphi + \arg H(j\tilde{\omega}))$$

En este caso, dado los cálculos anteriores, para la frecuencia  $199\omega_0$ , la respuesta en régimen es:

$$v_{o,reg}(t) = A \times 0,004 \cdot \cos(\tilde{\omega}t + \varphi + 1,89)$$