Teoría de Circuitos

Examen de julio de 2023

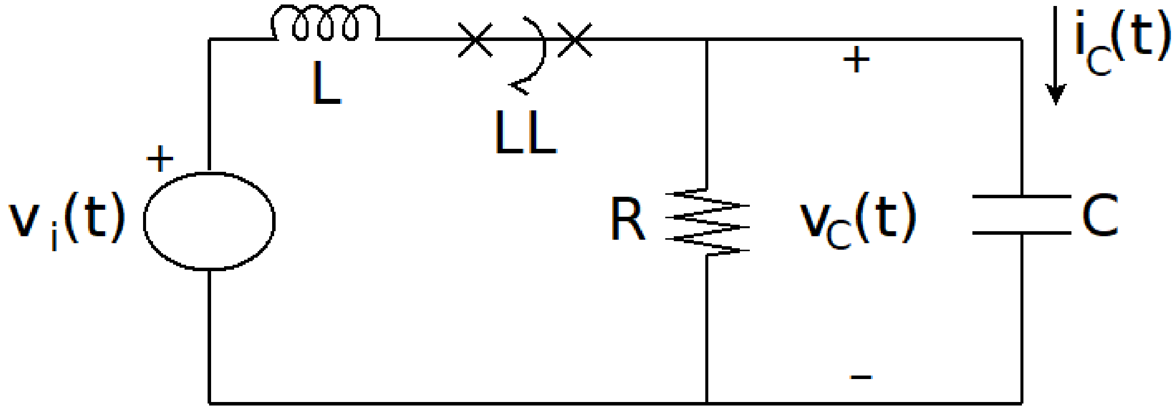
Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito en régimen sinusoidal de la figura de la izquierda, con los siguientes datos:

$$v_i(t) = 230V\sqrt{2}.sen(100\pi t) \quad , \quad R = 220\Omega \quad , \quad L = 120mHy \quad , \quad C = 1\mu F$$

La llave LL permanecerá cerrada hasta la última parte del ejercicio.



(a) Hallar la impedancia $Z_v = R_v + jX_v$ vista por la fuente, indicando si es capacitiva o inductiva.

(b) Hallar las potencias activa, reacctiva y aparente consumidas a la fuente.

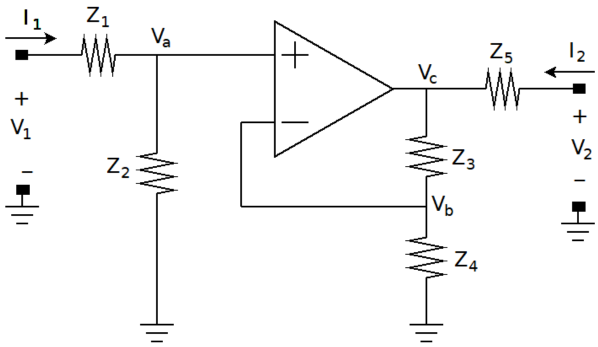
(c) Hallar la expresión temporal de la tensión en bornes del condensandor ($v_C(t)$) y la corriente que circula por él ($i_C(t)$).

(d) Diseñar una compesación de la potencia reactiva consumida a la fuente, indicando qué elemento colocaría, de qué valor, y el correspondiente esquema de conexión.

(e) Consideramos el sistema sin compensación de reactiva. En un instante que llamaremos $t = t_0$, en el que la tensión periódica $v_C(t)$ hallada es máxima, se abre la llave. Hallar y graficar la tensión en bornes del condensador y la corriente por él a partir de $t' = 0$ ($t' = t - t_0$), para todo t' positivo. Observar que no es necesario hallar algún t_0 específico.

Problema 2

(a) Se considera el cuadripolo de la figura, funcionando en régimen sinusoidal. Se sabe que los parámetros generales son $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{Z_4}{Z_2(Z_3+Z_4)} \begin{bmatrix} Z_1+Z_2 & Z_5(Z_1+Z_2) \\ 1 & Z_5 \end{bmatrix}$.



i) Hallar, en función de (A, B, C, D), la ganancia en régimen del circuito $H(j\omega) = \frac{V_1(j\omega)}{I_2(j\omega)}$, cuando se carga el lado 2 del cuadripolo con una impedancia de valor R. Observar las dimensiones de dicha ganancia.

ii) Simplificar la expresión de H para el caso:

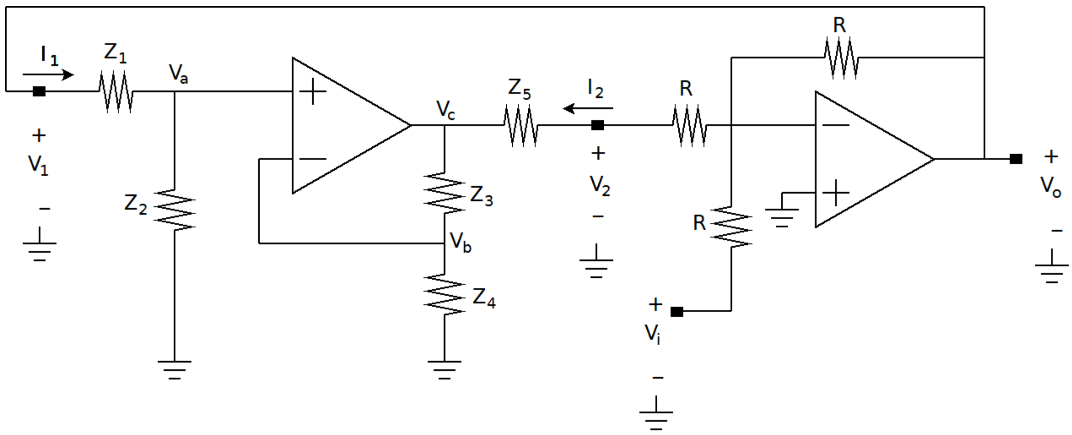
$$Z_1 = R \quad , \quad Z_2 = Lj\omega \quad , \quad Z_3 = R \quad , \quad Z_4 = R \quad , \quad Z_5 = R$$

(b) Se considera ahora este nuevo circuito, basado en el anterior, con los valores de la parte (a)-iii).

i) Indicar la configuración en la que se encuentra el operacional de la derecha.

ii) Hallar la transferencia en régimen $G(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

iii) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de $G(j\omega)$, explicando claramente su deducción.



Teoría de Circuitos

Examen de julio de 2023

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Enunciar el Teorema de Blondell.

(b) Demostrarlo para el caso de cargas en estrella.

(c) Describir el método de los dos vatímetros.

Pregunta 2

Se considera una componente con tensión en bornes $v(t)$ y corriente $i(t)$, medidas con la convención estándar de la ley de Ohm.

(a) Definir potencia instantánea $p(t)$ y la potencia media en régimen sinusoidal P.

(b) A partir de la definición anterior, probar la expresión $P = re(V\bar{I})$, siendo V e I los fasores asociados a la tensión y la corriente involucrados, en valores eficaces.

Pregunta 3

(a) Enunciar los Teoremas de valor inicial y valor final para la Transformada de Laplace.

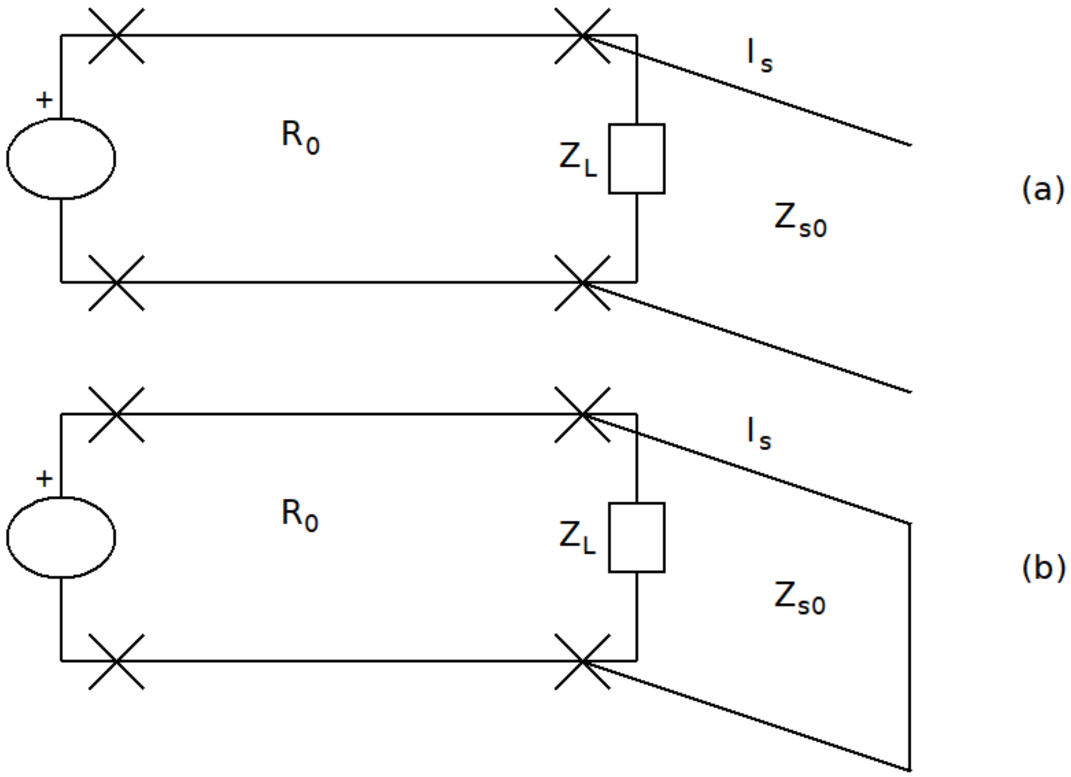
(b) Describir los modelos en Laplace de las componentes básicas: resistencia, inductancia y capacitor.

Pregunta 4

Se tiene una línea de transmisión sin pérdidas, de impedancia R_0. Se conecta una carga de impedancia Z_L, que puede modelarse como el paralelo de una resistencia de valor R_0 y una reactancia X_L ($Z_L = R_0 || jX_L$). Se conecta un stub de impedancia característica Z_{s0} (puramente real) y largo l_s. Se cumple que

$$X_L = -Z_{s0} \tan(\beta . l_s)$$

¿Alguno de estos dos circuitos no tiene onda reflejada? **Justificar!!**



Se recuerda la expresión general de la impedancia vista a una distancia d del extremo de una línea de transmisión sin pérdidas:

$$Z(d) = Z_0 . \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta d)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta d)}$$

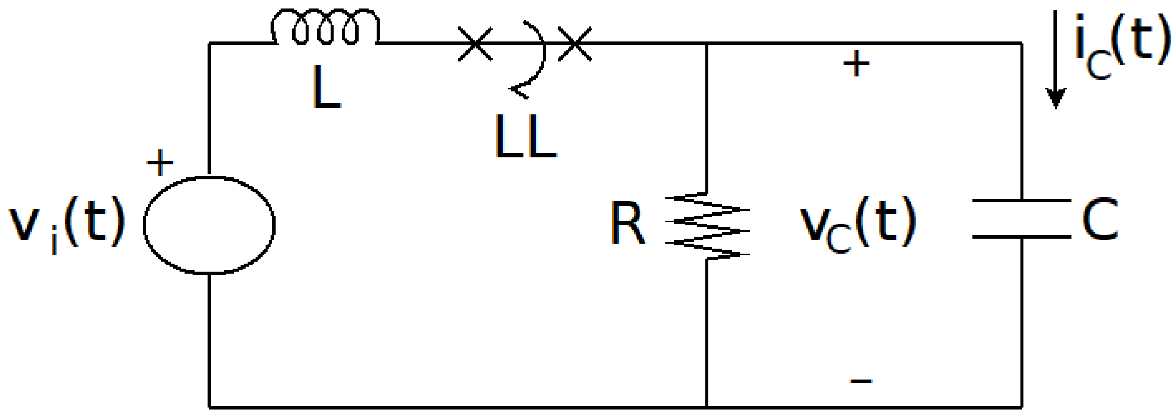
Solución

Problema 1

Se considera el circuito en régimen sinusoidal de la figura de la izquierda, con los siguientes datos:

$$v_i(t) = 230V\sqrt{2}.sen(100\pi) \quad , \quad R = 220\Omega \quad , \quad L = 120mHy \quad , \quad C = 1\mu F$$

La llave LL permanecerá cerrada hasta la última parte del ejercicio.



(a) Hallar la impedancia $Z_v = R_v + jX_v$ vista por la fuente, indicando si es capacitiva o inductiva.

Se tiene que

$$Z_v = Lj\omega + \left(R\middle|\middle|\frac{1}{Cj\omega}\right) = Lj\omega + \frac{R.\frac{1}{Cj\omega}}{R+\frac{1}{Cj\omega}} = Lj\omega + \frac{R}{1+RCj\omega}$$

Sustituyendo por lo valores dados, con $\omega = 100\pi\, rad/s$:

$$Z_v \approx 220\Omega\angle 6^o \approx \underbrace{219\Omega}_{R_v} + j\,\underbrace{22{,}5\Omega}_{X_v}$$

Al tener reactancia positiva, la carga es inductiva.

(b) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas a la fuente.

Hay varios caminos posibles para hallar las potencias pedidas. La forma más sencilla es usando la impedancia vista hallada. Trabajamos en valores eficaces:

$$P = re(V_i\bar{I}) = re\left(V_i\frac{\overline{V_i}}{\overline{Z_v}}\right) = |V_i|^2 re\left(\frac{1}{\overline{Z_v}}\right) = |V_i|^2 re\left(\frac{Z_v}{|Z_v|^2}\right) = |V_i|^2.\frac{R_v}{|Z_v|^2} \approx 234W$$

$$P = im(V_i\bar{I}) = im\left(V_i\frac{\overline{V_i}}{\overline{Z_v}}\right) = |V_i|^2.\frac{X_v}{|Z_v|^2} \approx 24{,}6VAR$$

(c) Hallar las expresiones temporales de la tensión en bornes del condensador ($v_C(t)$) y la corriente que circula por él ($i_C(t)$).

Aplicamos un divisor de tensión:

$$V_C = V_i.\frac{\frac{R}{1+RCj\omega}}{Z_v} \approx 229V\angle{-10^o} = 229V\angle{-0{,}17rad}$$

$$I_C = V_C.Cj\omega \approx 0{,}07A\angle 80^o = 0{,}07A\angle{+1{,}4}rad$$

Pasamos a las expresiones temporales:

$$v_C(t) = re\left\{\sqrt{2}\times V_C.e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}\times|V_C|.\sin\left(\omega t + arg(V_C)\right) = \sqrt{2}\times 229V.\sin\left(\omega t - 0{,}17\right)$$

$$i_C(t) = re\left\{\sqrt{2}\times I_C.e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}\times 0{,}07A.\sin\left(\omega t + 1{,}4\right)$$

(d) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, indicando qué elemento colocaría, de qué valor, y el correspondiente esquema de conexión.

Dado que la carga es inductiva, consume reactiva, por lo que colocamos un condensador de valor C^* que entregue dicha reactiva. Lo conectamos en paralelo con la carga Z_v, es decir, a la misma tensión que la impedancia de carga. Esto implica, entre otras cosas, que no se altera la activa consumida por la carga. Por lo tanto, la reactiva que entrega el condensador vale

$$Q_C = -|V_i|^2.C^*\omega$$

Esta reactiva entregada por el condensador debe ser opuesta a la consumida por la carga, de donde

$$Q = 24{,}6VAR = |V_i|^2.C^*\omega \Rightarrow C^* = \frac{24{,}6VAR}{|V_i|^2.\omega} \approx 1{,}5\mu F$$

(e) Consideramos el sistema sin compensación. En un instante que llamaremos $t = t_0$, en el que la tensión $v_C(t)$ hallada es máxima, se abre la llave. Hallar y graficar la tensión en bornes del condesador y la corriente por él a partir de $t' = 0$ ($t' = t - t_0$), para todo t' positivo. Observar que no es necesario hallar algún t_0.

La función *seno* se maximiza cuando su argumento vale un múltiplo entero impar $\pi/2$, es decir, que para algún n positivo[a]:

$$\omega t_0 - 0{,}17 = (2n+1).\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{(2n+1).\frac{\pi}{2} + 0{,}17}{\omega}$$

Definimos un nuevo origen de tiempos $t' = t - t_0$ y analizamos el circuito resultante de abrir la llave LL. Lo único que corresponde analizar es la malla que forman la resistencia y el condesador, que está con una carga inicial asociada a la tensión previa a la apertura de la llave, que vale $v_{C0} = \sqrt{2}\times 229V$.

Podemos hacerlo por Laplace, con dato previo, o directamente viendo que es un circuito de desacrga de un condensador a través de una resistencia:

$$v_C(t') = Y(t').v_{C0}.e^{-t'/RC}$$

La corriente se obtiene derivando y multiplicando por C, teniendo presente que la tensión en el condensador es continua en $t' = 0$:

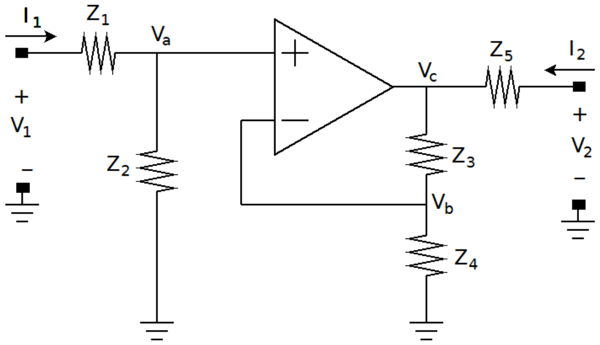
$$i_C(t') = -Y(t').\frac{v_{C0}}{R}.e^{-t'/RC}$$

Resta nomás hacer las gráficas.

[a] También se minimiza en instantes de este tipo, pero no nos metemos mucho porque no interesa calcular t_0. Lo importante es el valor del máximo.

Problema 2

(a) Se considera el cuadripolo de la figura, funcionando en régimen sinusoidal. Se sabe que los parámetros generales son $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{Z_4}{Z_2(Z_3+Z_4)} \begin{bmatrix} Z_1+Z_2 & Z_5(Z_1+Z_2) \\ 1 & Z_5 \end{bmatrix}$.



i) Hallar, en función de (A, B, C, D), la ganancia en régimen del circuito $H(j\omega) = \frac{V_1(j\omega)}{I_2(j\omega)}$, cuando se carga el lado 2 del cuadripolo con una impedancia de valor R. Observar las dimensiones de dicha ganancia.

Partimos de la descripción del cuadripolo:

$$\begin{cases} V_1 &= A.V_2 - B.I_2 \\ I_1 &= C.V_2 - D.I_2 \end{cases}$$

Sabemos que $V_2 = -R.I_2$, de donde

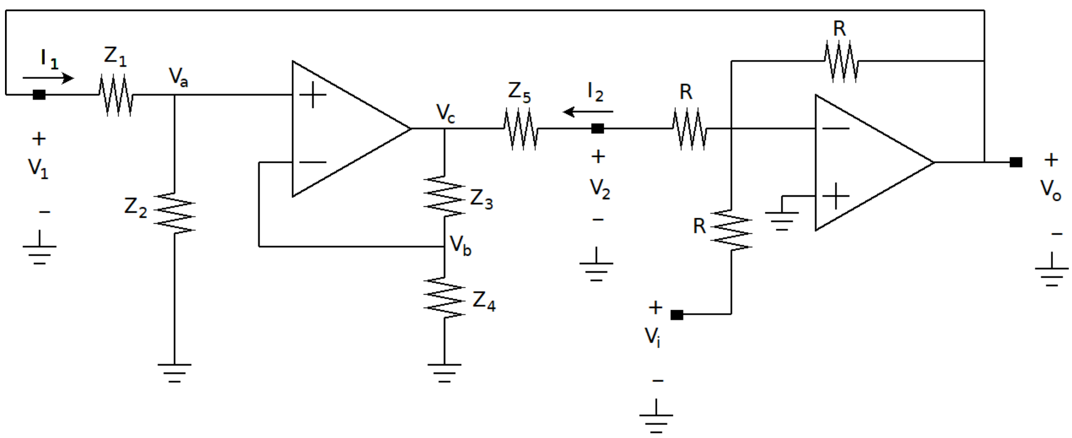
$$V_1 = A.(-R.I_2) - B.I_2 = -(A.R + B).I_2 \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_1}{I_2} = -(A.R + B)$$

$$H(j\omega) = -\frac{Z_4.(Z_1 + Z_2)}{Z_2(Z_3 + Z_4)}.(R + Z_5) = -\frac{Z_4.(Z_1 + Z_2).(R + Z_5)}{Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

ii) Simplificar la expresión para el caso:

$$Z_1 = R \quad , \quad Z_2 = Lj\omega \quad , \quad Z_3 = R \quad , \quad Z_4 = R \quad , \quad Z_5 = R$$

$$H(j\omega) = -\frac{R.(R + Lj\omega).(R + R)}{Lj\omega(R + R)} = -\frac{R.(R + Lj\omega)}{Lj\omega}$$



(b) Se considera ahora este nuevo circuito, basado en el anterior, con los valores de la parte (a)-iii).

i) Indicar la configuración en la que se encuentra el operacional de la derecha.

Se configura un circuito sumador. Aplicando el nudo en la pata +, tenemos:

$$\frac{V_i}{R}+\frac{V_2}{R}=-\frac{V_o}{R}\Rightarrow V_i+V_2=V_o$$

ii) Hallar la transferencia en régimen $G(j\omega)=\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

Repitiendo el nudo en la pata + del operacional de la derecha, tenemos

$$-I_2+\frac{V_i}{R}=-\frac{V_o}{R}$$

Observemos que podemos identificar el cuadripolo de l aparte anterior y verificar que está cargado con una resistencia de valor R, debido a la tierra virtual en la pata + del operacional de la derecha.

Entonces, $V_1=V_o$ e $I_2=\frac{V_1}{H(j\omega)}$, de donde:

$$-\frac{V_o}{H(j\omega)}+\frac{V_i}{R}=-\frac{V_o}{R}\Rightarrow\frac{V_i}{R}=\left[\frac{1}{H(j\omega)}-\frac{1}{R}\right].V_o=\left[-\frac{Lj\omega}{R.(R+Lj\omega)}-\frac{1}{R}\right].V_o$$

$$\Rightarrow\frac{V_i}{R}=-\left[\frac{Lj\omega+R+Lj\omega}{R.(R+Lj\omega)}\right].V_o=-\left[\frac{2Lj\omega+R}{R.(R+Lj\omega)}\right].V_o$$

Finalmente,

$$G(j\omega)=\frac{V_o}{V_i}=-\frac{R+Lj\omega}{R+2Lj\omega}=-\frac{1}{2}.\frac{\frac{R}{L}+j\omega}{\frac{R}{2L}+j\omega}=-\frac{1}{2}.\frac{2\omega_0+j\omega}{\omega_0+j\omega}$$

donde hemos introducido la pulsación auxiliar $\omega_0=\frac{R}{2L}$.

iii) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de $G(j\omega)$, explicando claramente su deducción.

Partimos de la expresión genérica: $H(j\omega)=-\frac{1}{2}.\frac{2\omega_0+j\omega}{\omega_0+j\omega}$.

Veamos primero las frecuencias críticas. En el numerador, tenemos la raiz $-2\omega_0$, en tanto en el denominador, tenemos la raíz $-\omega_0$.

Realizamos un análisis por bandas, esencialmente despreciando la parte real o la imaginaria de los términos de primer orden. En función de las frecuencias críticas, tenemos tres bandas: $(0,\omega_0])$, $[\omega_0,2\omega_0]$ y $[2\omega_0,+\infty)$. Observemos que solamente distan una octava entre sí. Vamos a hacer el análisis asintótico, que se basa en asumir que las frecuencias crticas están muy separadas, lo que no es el caso. Eso significa que los diagramas asintóticos no serán buenos en la banda $[\omega_0,2\omega_0]$. Hagamos el análisis de cada banda:

$$\omega\ll\omega_0\Rightarrow H(j\omega)\approx-\frac{1}{2}.\frac{2\omega_0}{\omega_0}=-1\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccc}|H| & \approx & 0\,dB\\ arg(H) & \approx & -\pi\end{array}\right.$$

$$\omega_0\ll\omega\ll 2\omega_0\Rightarrow H(j\omega)\approx-\frac{1}{2}.\frac{2\omega_0}{j\omega}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccc}|H| & \approx & 20\log(\omega_0)-20\log(\omega_n)\,dB\\ arg(H) & \approx & \frac{\pi}{2}\quad\left(ó\;-\frac{3\pi}{2}\right)\end{array}\right.$$

$$2\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{1}{2}.\frac{j\omega}{j\omega} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & -20\log(2)\,dB \\ arg(H) & \approx & -\pi\ (\text{ó } +\pi) \end{cases}$$

Tenemos que tener cuidado al momento de *empalmar* las fases. Las frecuencias críticas son ambas de primer orden, por lo que solamente pueden sumar o restar 90 grados.

Con las consideraciones anteriores, ya podemos definir bien qué hace la fase. Elegimos $-3\pi/2$ para la banda intermedia y $-\pi$ para la banda de alta frecuencia. La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de $H(j\omega)$. En rojo se muestran los diagramas asintóticos, en tanto en negro se muestran los diagramas reales. Es clara la pobre aproximación en la zona entre las dos frecuencias críticas (ω_0 y $2\omega_0$), especialmente en la fase.