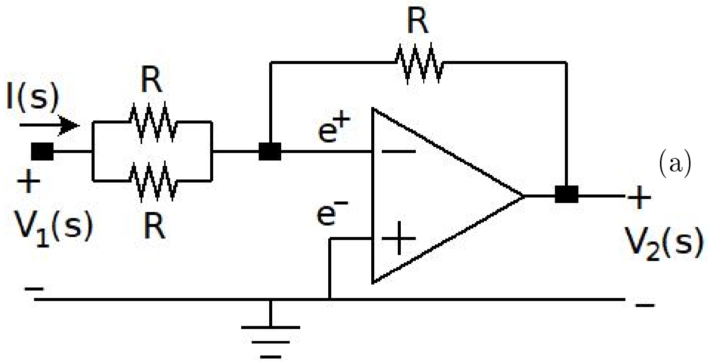
Teoría de Circuitos

Examen de julio de 2022

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

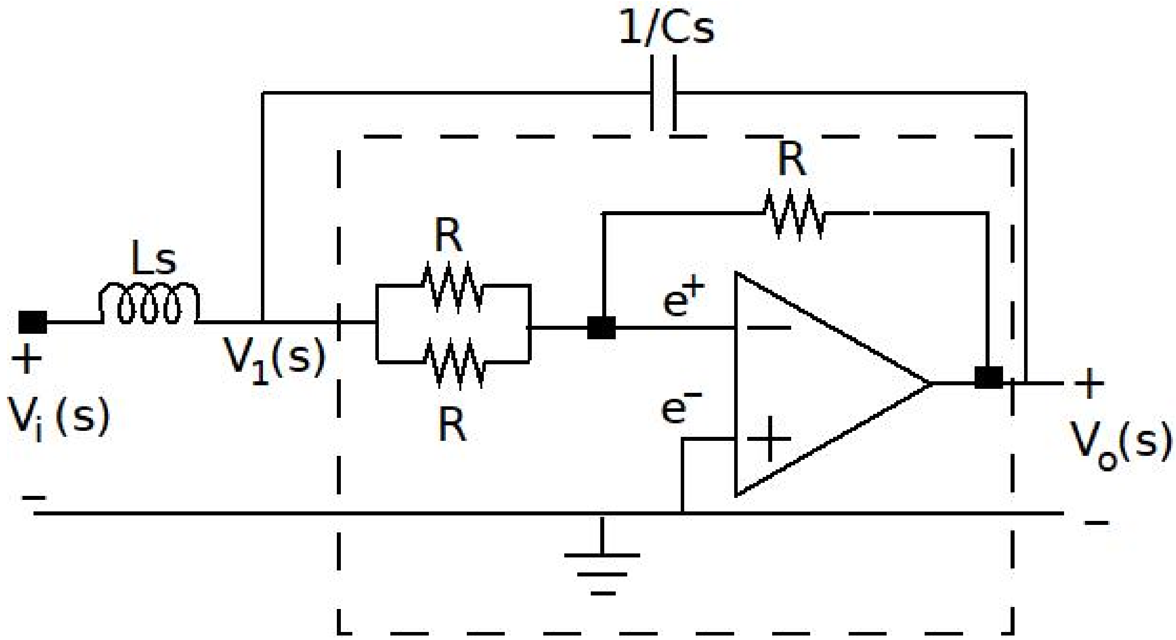
Problema 1



Se considera el circuito de arriba, con entrada $V_1(s)$.

(a) i) Hallar la transferencia $K(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$.

ii) Hallar la corriente $I(s)$.



(b) i) **Apicando el Teorema de Miller**, hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ del circuito de la figura.

ii) Simplificar la expresión sabiendo que $\frac{R}{L} = \omega_n$ y $\frac{1}{3LC} = \omega_n^2$.

(c) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando cómo los trabaja.

(d) Hallar la distancia en decibeles entre el diagrama real de módulo y el asintótico para $\tilde{\omega}$ a dos octavas por debajo de ω_n.

Problema 2

(a) Se considera un transformador ideal, con n_1 vueltas en el primario y n_2 vueltas en el secundario. Se carga el secundario con una impedancia Z_L. Hallar la impedancia vista desde el primario.

(b) Se considera el circuito en régimen de la figura. Se cumple que el valor eficaz de la fuente es de $230V$ y

$$R = 620\Omega \quad , \quad L = 10mH \quad , \quad n_1 = 10 \quad , \quad n_2 = 100 \quad , \quad C = 10\mu F \quad , \quad f = 50Hz$$

i) Hallar la impedancia Z vista por la fuente.

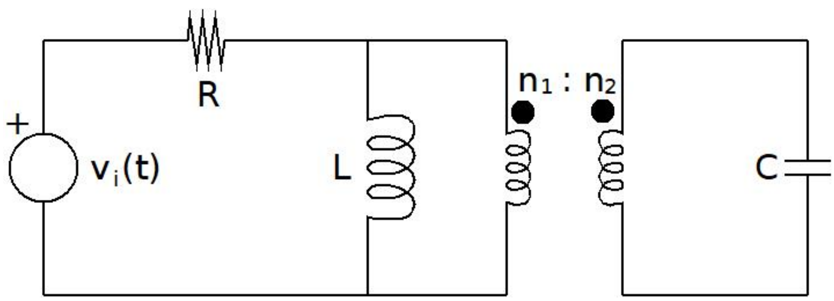
ii) ¿Es inductiva o capacitiva? Justificar!!

iii) Bosquejar un diagrama fasorial **cualitativo** en el que se muestren el fasor de tensión de la fuente, V, el fasor de corriente por la resistencia, I_R, el fasor V_R de tensión en bornes de la resistencia, el fasor V_L, tensión en bornes de la inductancia y el fasor V_C, tensión en bornes del condensador.

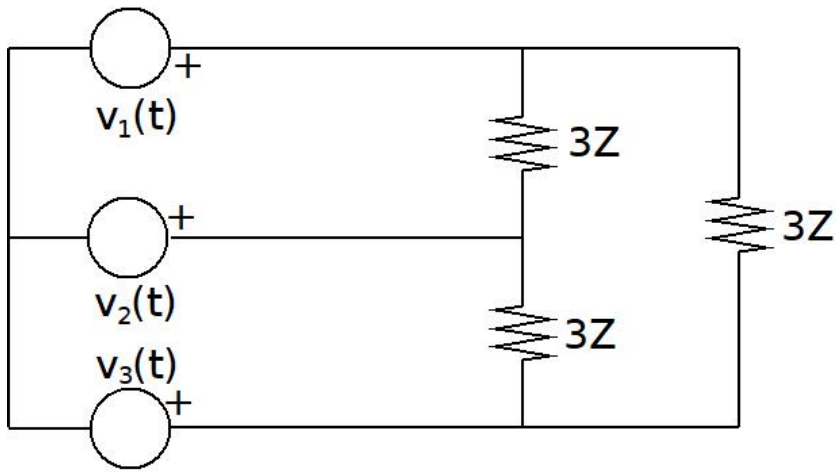
iv) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas a la fuente.

v) Se desea compensar la potencia reactiva consumida a la fuente. Indicar qué elemento colocaría, de qué valor, y el respectivo esquema de conexión.

vi) Hacer un nuevo diagrama fasorial, esta vez para el sistema compensado, en el que solamente se muestren los fasores de tensión y corriente de la fuente.



(c) Se considera el sistema trifásico de la figura, en que el sistema de fuentes es equilibrado y perfecto, de tensión de fase de $230V$ eficaces. Se desea compensar la reactiva consumida por la carga trifásica. Indicar qué elementos colocaría, de qué valor, y el respectivo esquema de conexión.

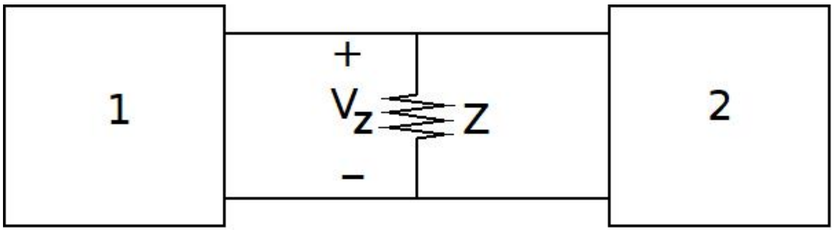


Teoría de Circuitos

Examen de julio de 2022

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1



Se tienen dos circuitos descritos por sus equivalentes de Thévenin, V_{Th1} y Z_{Th1}, V_{Th2} y Z_{Th2}. Se conectan sobre una carga Z, como indica la figura. Hallar la tensión V_Z en bornes de la impedancia Z.

Pregunta 2

La definición de la potencia media en régimen sinusoidal en una componente con tensión en bornes $v(t)$ y corriente $i(t)$, medidas de la forma estándar, es:

$$P = \frac{1}{T}.\int_0^T v(t).i(t)dt$$

siendo T el periodo de las señales. Si V e I son los fasores asociados a la tensión y corriente en bornes por la componente, deducir la fórmula de cálculo:

$$P = re(V.\overline{I})$$

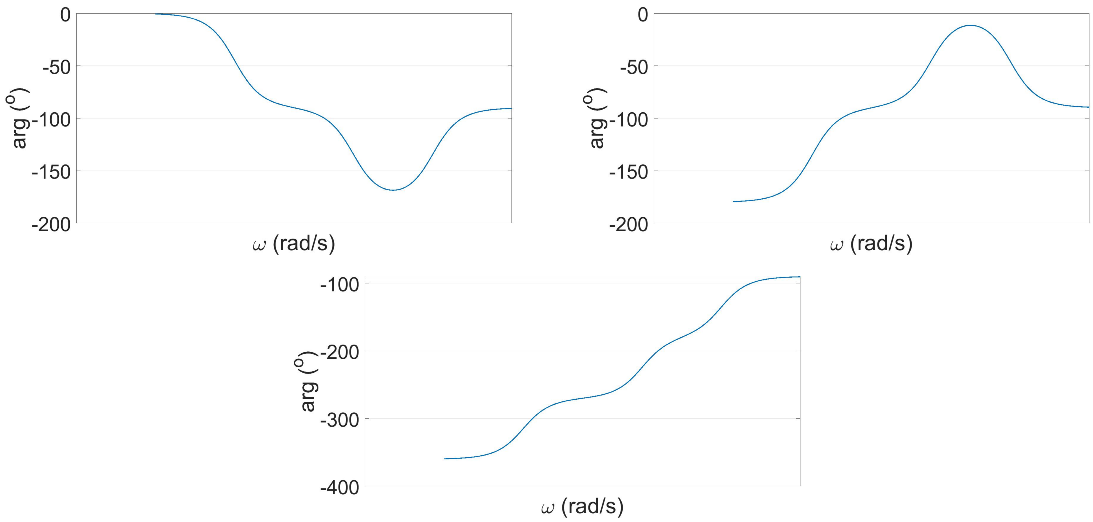
Pregunta 3

Sean $0 < a < b < c$ y $\omega_0 > 0$. Se consideran las transferencias:

$$H_1(j\omega) = \frac{\omega_0.(j\omega - b)}{(j\omega + a).(j\omega - c)} \quad , \quad H_2(j\omega) = \frac{\omega_0.(j\omega + b)}{(j\omega - a).(j\omega + c)} \quad , \quad H_3(j\omega) = \frac{\omega_0.(j\omega + b)}{(j\omega - a).(j\omega - c)}$$

(a) Mostrar analíticamente que todas tienen el mismo módulo.

(b) Indicar cuál de los siguientes diagramas de Bode de fase corresponde a cada transferencia. **Justificar detalladamente**.



Pregunta 4

Se tienen dos cuadripolos descritos por sus constantes generales: (A_1, B_1, C_1, D_1) y (A_2, B_2, C_2, D_2).

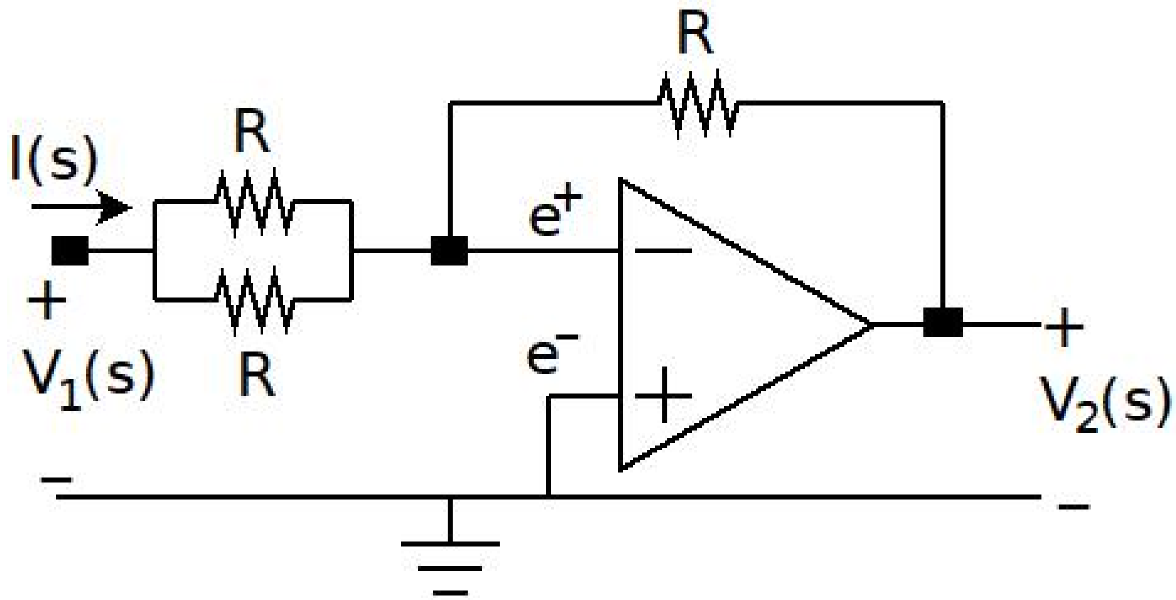
(a) Hallar las constantes generales del cuadripolo resultante de conectarlos en cascada, primero el cuadripolo 1 y luego el cuadripolo 2.

(b) Si los cuadripolos son simétricos, mostrar que no influye el orden de conexión en el resultado de la inerconexión[a].

[a] Esta parte de la pregunta quedó mal planteada, por lo que no se tuvo encuenta para la corrección. La idea era evaluar reciprocidad y simetría a partir de lo hecho en la parte a). Deberíamos haber puesto algo del estilo: ¿Si los cuadripolos son recíprocos, el cuadripolo resultante es recíproco? JUSTIFICAR!!

Solución

Problema 1



(a) Se considera el circuito de arriba, con entrada $V_1(s)$.

i) Hallar la transferencia $K(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$.

Observamos en primer lugar que el operacional está en una configuración inversora, con impedancia $Z_1 = R||R$ y $Z_2 = R$. Entonces

$$K(s) = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R}{R/2} = -2$$

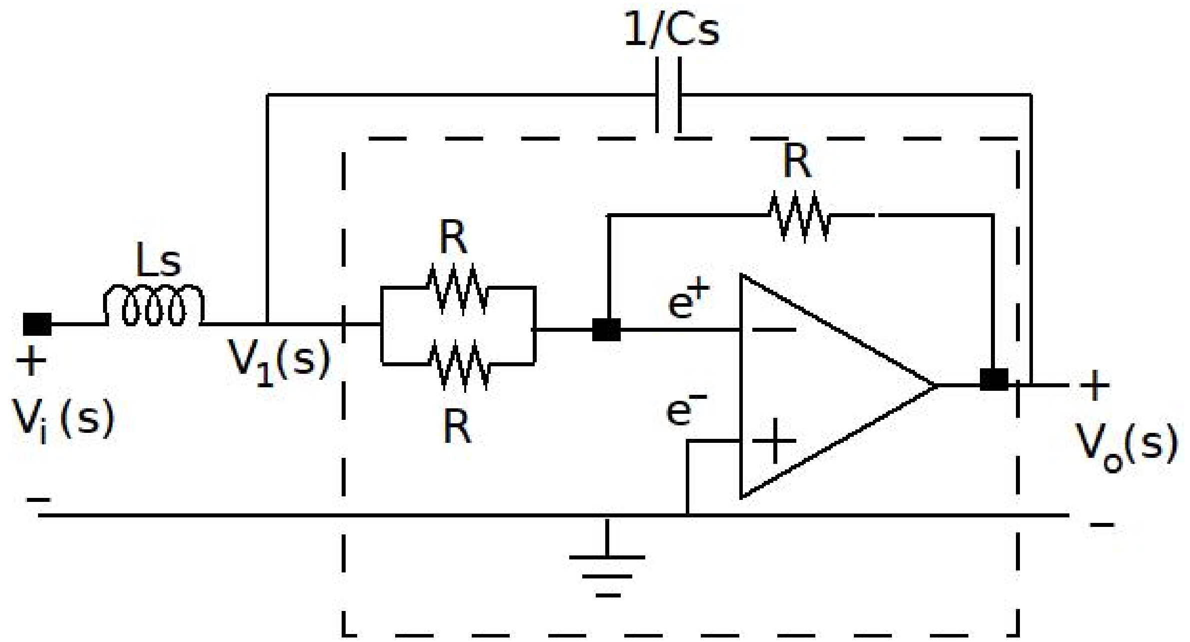
ii) Hallar la corriente $I(s)$.

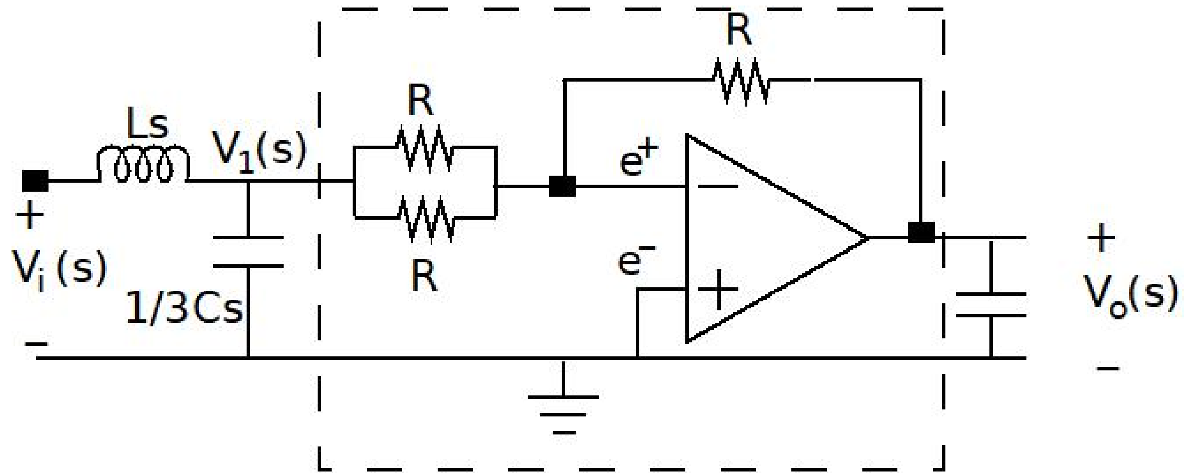
Como la ganancia del opamp es infinita y está funcionando en zona lineal, tenemos el cortocircuito virtual de las patas de entrada, por lo que la pata menos está a tierra y la corriente de interés vale:

$$I(s) = \frac{V_1(s)}{R/2} = 2.\frac{V_1(s)}{R}$$

(b) i) **Apicando el Teorema de Miller**, hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ del circuito de la figura.

Para aplicar el Teorema de Miller, vemos que la ganancia del cuadripolo marcado en línea punteada vale $K = -2$, independiente de la impedancia del condensador conectada por fuera del mismo. También observamos que tanto V_1 como V_2 tienen la misma referencia. Entonces, estamos en las hipótesis del teorema, que nos dice que esa impedancia Z puede pasar como dos impedancias: una a la entrada, de valor $\frac{Z}{1-K}$, y otra a la salida, de valor $\frac{KZ}{K-1}$b.





Considerando el circuito resultante, más sencillo, vemos que:

$$\frac{V_i - V_1}{Ls} = V_1 3Cs + \frac{V_1}{R/2} \Rightarrow \frac{V_i}{Ls} = V_1(s).\left[\frac{1}{Ls} + \frac{2}{R} + 3Cs\right] = V_1(s).\left[\frac{R + 2Ls + 3RLCs^2}{RLs}\right]$$

Usando que $V_o(s) = -2.V_1(s)$, obtenemos

$$H(s) = \frac{-2R}{R + 2Ls + 3RLCs^2} = \frac{-2R}{3RLC\left(\frac{R}{3RLC} + \frac{2L}{3RLC}s + s^2\right)} = -2\frac{\frac{1}{3LC}}{s^2 + \frac{2}{3RC}.s + \frac{1}{3LC}}$$

ii) Simplificar la expresión sabiendo que $\frac{R}{L} = \omega_n$ y $\frac{1}{3LC} = \omega_n^2$.

Notemos que

$$\frac{2}{3RC} = 2 \times \frac{L}{R} \times \frac{1}{3LC} = 2 \times \frac{1}{\omega_n} \times \omega_n^2 = 2\omega_n$$

Entonces:

$$H(s) = -2\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = -2\frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

[b] No se pretende saber esto de memoria, sino que puede plantearse rápidamente el valor de la corriente que circula por el condensador y deducir los valores que deben tener las impedancias sustitutas. Incluso, mirando el circuito, se puede apreciar que solamente se necesita la impedancia que va en el lado 1.

(c) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando cómo los trabaja.

Vamos a hacer un análisis por bandas. En primer término hallamos las frecuencias singulares, es decir, los valores absolutos de las raíces del numerador y denominador, que delimitarán las bandas de interés. Tenemos $-\omega_n$ como raíz doble del denominador, por lo que analizaremos dos bandas: la de baja frecuencia, antes de ω_n, y la de alta frecuencia, luego de ω_n. Consideremos

$$H(j\omega) = -2\frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2}$$

Comenzamos por la banda de baja frecuencia.

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -2\frac{\omega_n^2}{(\omega_n)^2} = -2 \Rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} \approx 20\log(2)dB \\ arg(H) \approx \pi \text{ (elegido arbitrariamente)} \end{cases}$$

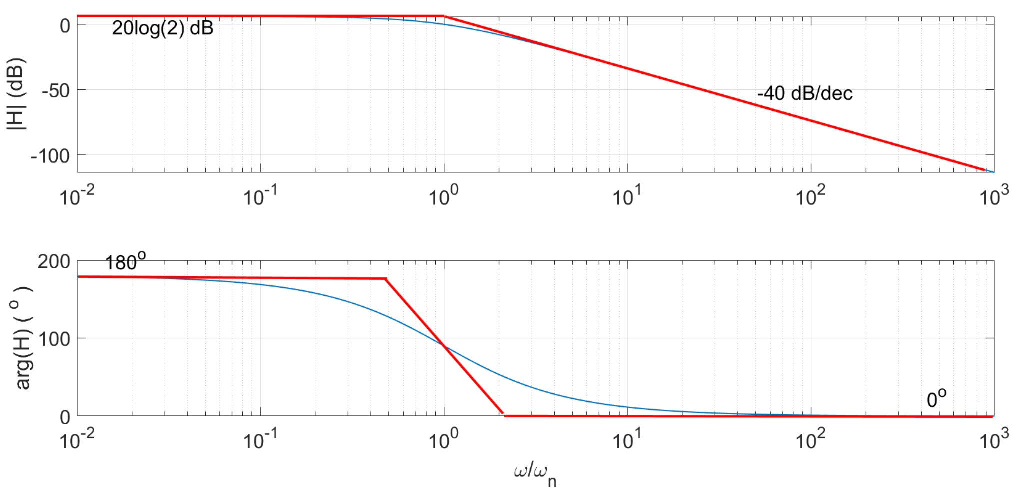
Analicemos la segunda banda:

$$\omega_n \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx -2\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2} = 2\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} \approx 20\log(2\omega_n^2)dB - 40\log(\omega)dB \\ arg(H) \approx 0\ (\pm 2\pi) \end{cases}$$

Al ser una raíz doble, la variación total posible de la fase es de $\pm\pi$. Tenemos que ver si la fase crece hacia 2π o decrece hacia 0. Para salir de dudas, podemos evlauar en un punto intermedio (por ejemplo, ω_n). También podemos ver que al ser una raíz doble, se duplica el efecto de la raíz simple, que introduce un retardo de $-\frac{\pi}{2}$ (esto lo sabemos de haber hecho muchos Bode de primer orden!!). Confirmemos evaluando:

$$H(j\omega_n) = -2\frac{\omega_n^2}{(j\omega_n + \omega_n)^2} = -2\frac{1}{(j+1)^2} = -2\frac{1}{(e^{j\frac{\pi}{4}})^2} = -2e^{-j\frac{\pi}{2}} = j2$$

por lo que la fase desciende desde $-\pi$ hacia 0. La siguiente figura muestra los diagramas reales y asintóticos.



(d) Hallar la distancia en decibeles entre el diagrama real de módulo y el asintótico para ω a dos octavas por debajo de ω_n.

Al estar en $\tilde{\omega} = \omega_n/4$ (dos octavas por debajo), el diagrama asintótico lo aproximamos por la asíntota de baja frecuencia:

$$H_{as}(j\tilde{\omega}) = -2 \Rightarrow |H_{as}(j\tilde{\omega})| = 2$$

Por otro lado, la expresión real es:

$$H_{re}(j\tilde{\omega}) = H_{re}\left(j\frac{\omega_n}{4}\right) = -2\frac{\omega_n^2}{(j\frac{\omega_n}{4}+\omega_n)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{j}{4}+1\right)^2} = -\frac{32}{(j+4)^2} = -\frac{32}{17}e^{-j2arg(1/4)}$$

De donde $|H_{as}(\tilde{\omega})| = 32/17$. La distancia en decibeles la calculamos por la expresión:

$$d(\tilde{\omega})_{dB} = 20\log\left(\frac{|H_{as}(\tilde{\omega})|}{|H_{re}(\tilde{\omega})|}\right) = 20\log\left(\frac{2}{\frac{32}{17}}\right) = 20\log\left(\frac{34}{32}\right) \approx 0{,}52\,dB$$

Problema 2

(a) Se considera un transformador ideal, con n_1 vueltas en el primario y n_2 vueltas en el secundario. Se carga el secundario con una impedancia Z_L. Hallar la impedancia vista desde el primario.

(b) Se considera el circuito en régimen de la figura. Se cumple que el valor eficaz de la fuente es de $230V$ y

$$R = 620\Omega \quad , \quad L = 10mH \quad , \quad n_1 = 10 \quad , \quad n_2 = 100 \quad , \quad C = 10\mu F \quad , \quad f = 50Hz$$

i) Hallar la impedancia Z vista por la fuente.

Usamos la parte a) para pasar el condensador al primario del trafo. La impedancia pasa multiplicada por la relación de transformación al cuadrado, por lo que el condensador se multiplica por el cuadrado del inverso de dicha relación. Entonces, la impedancia que ve lla fuente es:

$$Z = R + \left(\quad Lj\omega \quad || \quad \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}{Cj\omega}\right) = R + \left(\quad Lj\omega \quad || \quad \frac{1}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 Cj\omega}\right)$$

Definiendo $C' = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 C = 100 \times 10\mu F = 1mF$ y sustituyendo por los valores, tenemos que

$$Lj\omega \quad || \quad \frac{1}{C'j\omega} = \frac{Lj\omega.\frac{1}{C'j\omega}}{Lj\omega + \frac{1}{C'j\omega}} = \frac{Lj\omega}{1-LC'\omega^2} = \frac{10mH.j.\omega}{1-10mH\,.\,1mF.\omega^2} = jX \approx j241\Omega$$

$\Rightarrow$

$$Z = R + jX \approx (620 + j241)\,\Omega = 665\Omega\angle 21^o$$

ii) ¿Es inductiva o capacitiva? Justificar!!

La carga es inductiva, ya que la reactancia es positiva e introduce un retardo de la corriente frente a la tensión.

iii) Bosquejar un diagrama fasorial **cualitativo** en el que se muestren el fasor de tensión de la fuente, V, el fasor de corriente por la resistencia, I_R, el fasor V_R de tensión en bornes de la resistencia, el fasor V_L, tensión en bornes de la inductancia y el fasor V_C, tensión en bornes del condensador.

Al ser cualitativo, nos concentramos en las posiciones relativas, sin preocuparnos por los tamaños. Tomamos como referencia el fasor de la fuente. Al ser la carga total inductiva, el fasor de corriente I_R, que coincide con la corriente que entrega la fuente, está retrasado respecto de V (aproximadamente 21 grados). El fasor V_L debe verificar la ecuación de Kirchhoff de malla ($V = V_R + V_L$). El fasor V_C es colineal con V_L, ya que son, respectivamente, tensión de secundario y tensión de primario del trafo ideal. Además, es 10 veces más grande.

iv) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas a la fuente.

Calculamos las potencias a través de las fórmulas de cálculo directo en fasores. Denotamos por V el fasor de la tensión en bornes de Z y por I el fasor de corriente, medidos de manera estándar:

$$P = re(V.\overline{I}) = re\left(V\overline{\left(\frac{V}{Z}\right)}\right) = |V|^2.re\left(\frac{1}{\overline{Z}}\right) = |V|^2.\frac{R}{R^2+X^2} \approx 74W$$

De igual forma

$$Q = |V|^2.\frac{X}{R^2+X^2} \approx 29VAR$$

Finalmente

$$|S| = \sqrt{P^2+Q^2} \approx 79,5VA \quad , \quad \angle S = 21^o$$

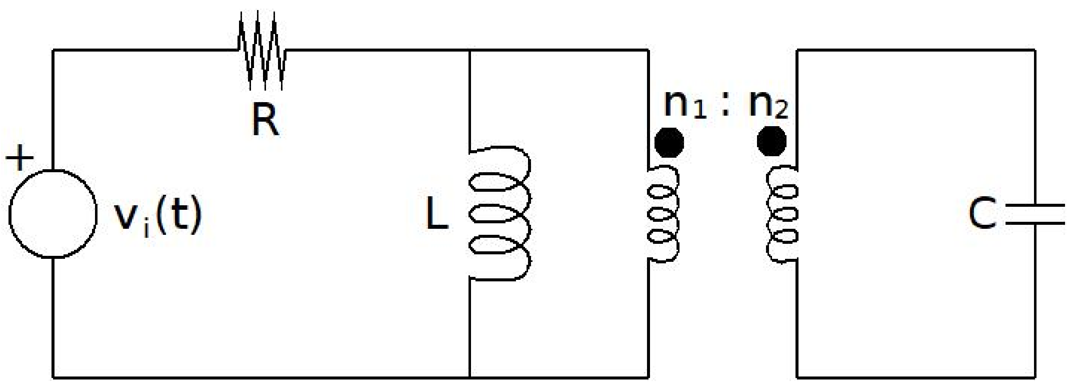
v) Se desea compensar la potencia reactiva consumida a la fuente. Indicar qué elemento colocaría, de qué valor, y el respectivo esquema de conexión.

Al ser la carga iniductiva, consume reactiva, y para compensar la reactiva consumida colocamos un condensador en paralelo con la carga, que entregue dicha reactiva. Lo colocamos en paralelo, entre otras razones, para no afectar la activa consumida por la carga. El valor C_{comp} de dicho condensador lo calculamos de la expresión:

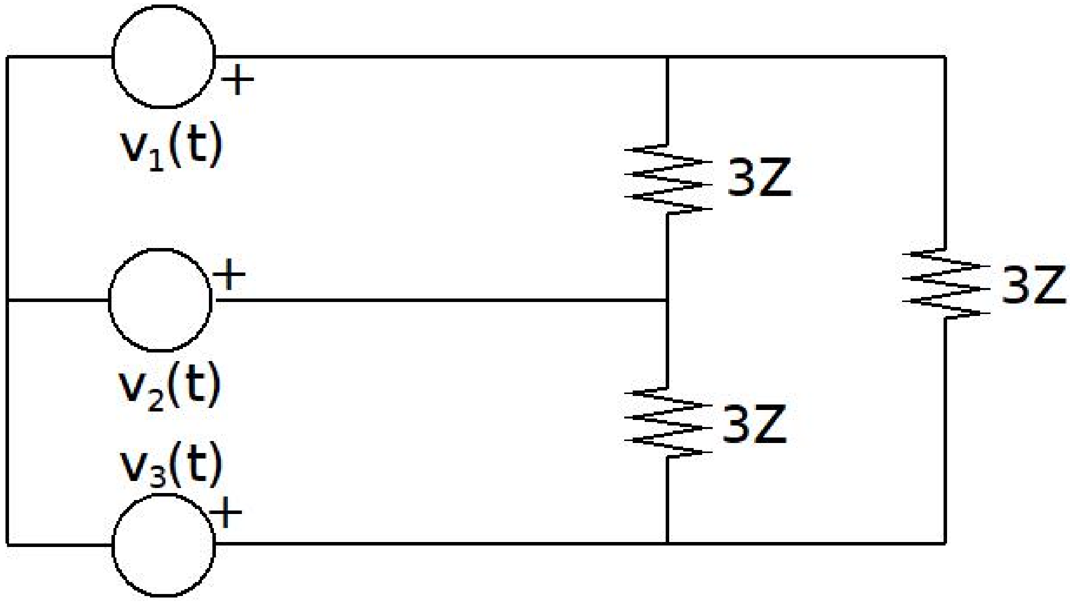
$$-Q = Q_{comp} = -|V|^2.C_{comp}.\omega \Rightarrow C_{comp} = \frac{Q}{|V^2|.\omega} \approx 1,7\mu F$$

vi Hacer un nuevo diagrama fasorial, esta vez para el sistema compensado, en el que solamente se muestren los fasores de tensión y corriente de la fuente.

Al estar el sistema compensado, la fuente no entrega reactiva y, por lo tanto, los fasores de tensión y corriente están en fase y son colineales.



(c) Se considera el sistema trifásico de la figura, en que el sistema de fuentes es equilibrado y perfecto, de tensión de fase de $230V$ eficaces. Se desea compensar la reactiva consumida por la carga trifásica. Indicar qué elementos colocaría, de qué valor, y el respectivo esquema de conexión.



Para analizar el circuito, pasamos al equivalente monofásico. Para ello, transfiguramos la carga de triángulo a estrella. Al ser tres cargas idénticas, obtenemos una estrella también con tres cargas idénticas, cuyo valor es un tercio del valor original, es decir, Z. El equivalente monofásico resulta ser exactamente el circuito de la parte b). De esta forma, ya tenemos diseñada la compensación: tenemos que poner una estrella de condensadores idénticos en paralelo con la carga trifásica, de valor $1,7\mu F$. Es mejor transfigurar esta estrella de condensadores a un triángulo que entregue la misma reactiva trifásica, pero con condensadores más pequeños (1/3 del valor hallado), que vean la tensión compuesta en lugar de la tensión de fase.