Teoría de Circuitos

Examen de julio de 2020

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

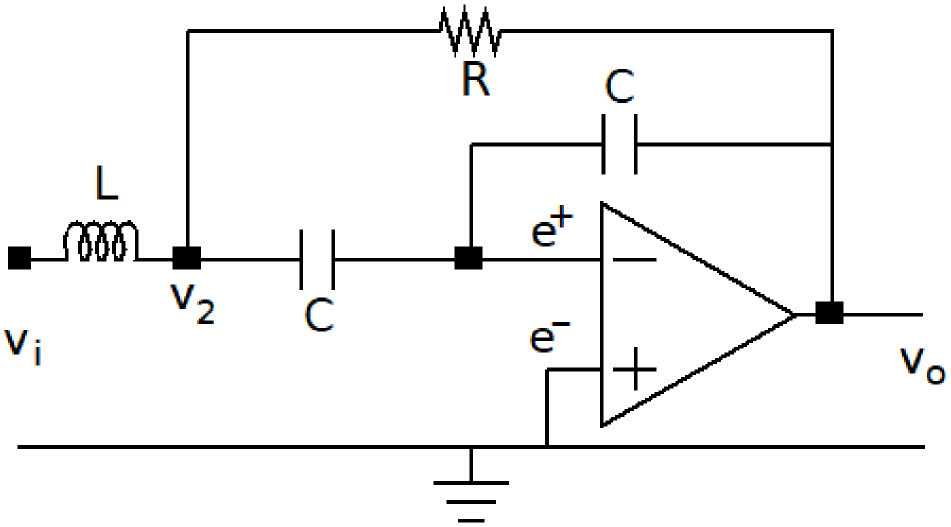
(a) i) Sabiendo que $G(s) = \mathcal{L}\left[Y(t)g(t)\right](s)$, probar la identidad $\mathcal{L}^{-1}\left[G(s+a)\right](t) = Y(t)e^{-at}g(t)$.

ii) Sabiendo que la transformada de Laplace de $Y(t)sen(\omega_o t)$ es $\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$, hallar la anti-transformada de Laplace de $\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$.

iii) De las partes anteriores, deducir la anti-transformada de Laplace de

$$H(s) = K.\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

siendo K real, $0 < \zeta < 1$ y ω_n positivo.



(b) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ del circuito de la figura, donde el operacional es ideal. Verificar que puede llevarse a la forma vista en a)iii). Hallar las expresiones de K, ζ y ω_n. Asumiremos que $\zeta < 1$.

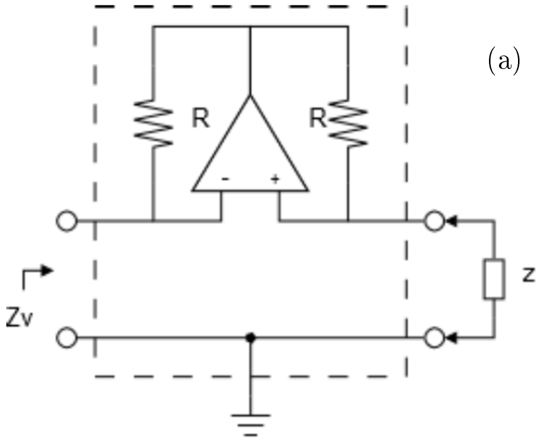
(c) Sea $r(t)$ la respuesta completa del sistema cuando la entrada es $e(t) = Y(t)V$, es decir, un escalón de amplitud V. Aplicando el Teorema del valor final, calcular

$$\lim_{t\to+\infty} r(t)$$

(d) Deducir y dibujar los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(s)$.

(e) ¿Considerando régimen sinusoidal, existe alguna frecuencia de trabajo a la cual el sistema responde con una sinusoide en cuadratura respecto de la entrada?

Problema 2

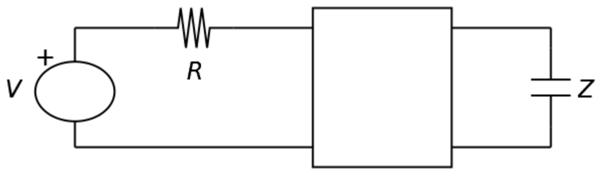


(a) i) Se considera el cuadripolo de la figura, con el operacional ideal. Hallar los parámetros (A, B, C, D):

$$\begin{cases} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{cases}$$

ii) Mostrar que si se carga el lado 2 con una impedancia Z, la impedancia vista del lado 1 vale $-Z$.

(b) Con el cuadripolo de la parte anterior se arma el circuito siguiente, que analizaremos en régimen sinusoidal, alimentado por una fuente de tensión $v(t) = \sqrt{2}E\cos(100\pi t)$ y cargado del lado 2 por un condensador de valor C.



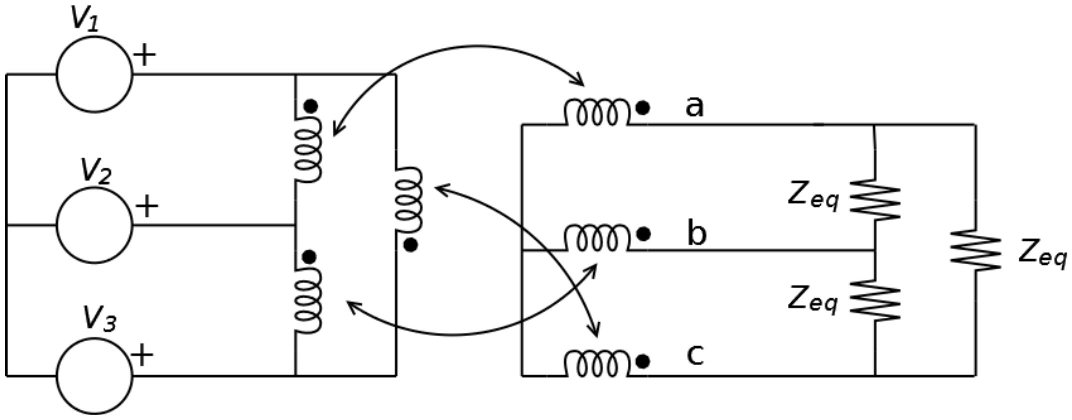
i) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente consumidas a la fuente. (Se sugiere trabajar con la resistencia y la reactancia de la impedancia vista).

ii) Dibujar un diagrama fasorial que incluya la tensión y corriente de la fuente y la tensión y corriente del condensador.

iii) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, sin alterar la potencia activa. Indicar qué elemento colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

(c) Se considera el circuito trifásico de la figura, en el que la impedancia Z_{eq} es la que ve la fuente de la parte b) (antes de compensar la reactiva), el sistema de fuentes trifásico es equilibrado y perfecto, de $50Hz$ y valor eficaz E, y los transformadores son ideales, con $\frac{n_1}{n_2} = 2$.

Hallar el equivalente monofásico.



Teoría de Circuitos

Examen de julio de 2020

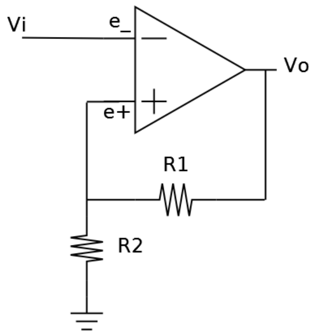
Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

El circuito de la figura es un *Schmitt trigger*, basado en un comparador.

i) Hallar la salida del comparador cuando la entrada es una sinusoide. Discutir en función de la amplitud de la sinusoide.

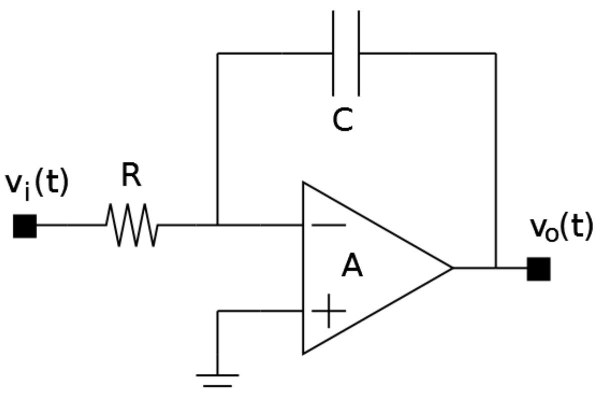
ii) Investigar qué cambia si en lugar de conectar la resistencia R_2 a tierra, se conecta a una fuente de valor V_{ref}.



Pregunta 2

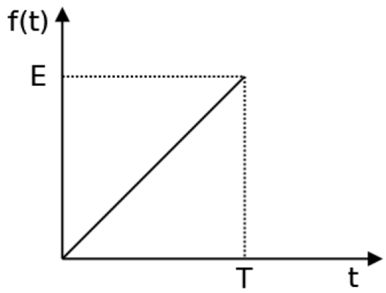
i) Enunciar y demostrar el Teorema de Miller

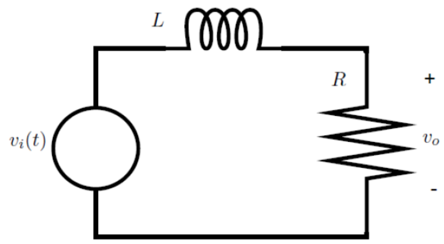
ii) Aplicarlo en el siguiente circuito para determinar la impedancia vista por la fuente v_i, sabiendo que el operacional tiene impedancia de entrada infinita, impedancia de salida nula y ganancia **finita** de valor A. (Se sugiere primero identificar en el circuito los elementos del teorema de Miller).



Pregunta 3

Haciendo un análisis por tramos, hallar la corriente que entrega la fuente cuando se aplica la tensión de la figura, sabiendo que la inductancia inicia descargada.





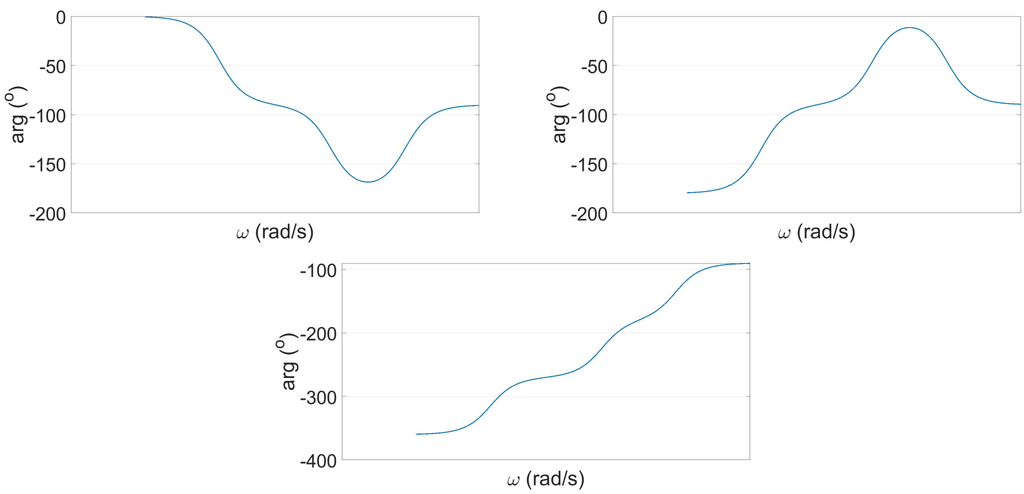
Pregunta 4

Sean $0 < a < b < c$ y $\omega_0 > 0$. Se consideran las transferencias:

$$H_1(j\omega) = \frac{\omega_0.(j\omega - b)}{(j\omega + a).(j\omega - c)} \quad , \quad H_2(j\omega) = \frac{\omega_0.(j\omega + b)}{(j\omega - a).(j\omega + c)} \quad , \quad H_3(j\omega) = \frac{\omega_0.(j\omega + b)}{(j\omega - a).(j\omega - c)}$$

(a) Mostrar analíticamente que todas tienen el mismo diagrama de Bode de módulo.

(b) Indicar cuál de los siguientes diagramas de Bode de fase corresponde a cada transferencia. **Justificar detalladamente**.



Solución

Problema 1

(a) i) Sabiendo que $G(s) = \mathcal{L}\left[Y(t)g(t)\right](s)$, probar la identidad $\mathcal{L}^{-1}\left[G(s+a)\right](t) = Y(t)e^{-at}g(t)$.

Aplicamos la definición de transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\left[Y(t)e^{-at}g(t)\right](s) = \int_0^{+\infty} e^{-at}g(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-(s+a)t}dt = G(s+a)$$

ii) Sabiendo que la transformada de Laplace de $\mathcal{L}\left[Y(t)sen(\omega_0 t)\right](s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$, hallar la anti-transformada de Laplace de $\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$.

Por la parte anterior,

$$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \leftrightarrow Y(t)e^{-at}sen(\omega_0 t)$$

iii) De las partes anteriores, deducir la anti-transformada de Laplace de

$$H(s) = K.\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

siendo K real, $0 < \zeta < 1$ y ω_n positivo.

Primero completamos un cuadrado perfecto en el denominador, para aproximarnos a la expresión del seno:

$$H(s) = K.\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \pm (\zeta\omega_n)^2} = K.\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2)\omega_n^2}$$

$$= K.\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2)\omega_n^2}$$

de donde

$$h(t) = Y(t)K\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}sen\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)$$

.

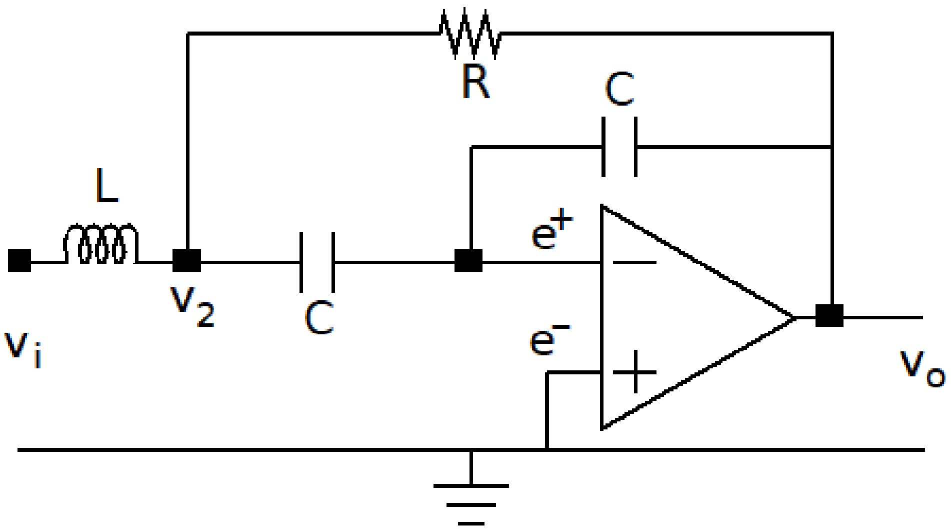
(b) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ del circuito de la figura, donde los operacionales son ideales y el condensador está inicialmente descargado. Verificar que puede llevarse a la forma vista en a)iii). Hallar las expresiones de K, ζ y ω_n. Asumiremos que $\zeta < 1$.

Pasamos a Laplace, con condiciones iniciales nulas, y planteamos el nudo de tensión V_2:

$$\frac{V_i(s)-V_2(s))}{Ls} = V_2(s)Cs + \frac{V_2(s)-V_o(s))}{R}$$

Por otro lado, las tensiones $V_2(s)$ y $V_o(s)$ se relaciona a través de la configuración inversora del operacional ideal, con ganancia -1:

$$V_2(s) = -V_o(s)$$



Por comodidad, dejemos de escribir la dependencia con s de los voltajes. Tenemos entonces que

$$\frac{V_i}{Ls} = V_2\left[\frac{1}{Ls} + Cs + \frac{1}{R}\right] - \frac{V_o}{R} = -V_o\left[\frac{1}{Ls} + Cs + \frac{2}{R}\right] = -V_o\left[\frac{R + RLCs^2 + 2Ls}{RLs}\right]$$

Entonces

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R}{RLCs^2 + 2Ls + R} = -\frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{2L}{RLC}s + \frac{R}{RLC}}$$

Identificamos $\frac{1}{LC} = \omega_n^2$. Entonces

$$2\zeta\omega_n = \frac{2\zeta}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{RC} \Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{LC}{R^2C^2}} = \sqrt{\frac{L}{R^2C}}$$

Finalmente, poniendo $K = -1$, obtenemos que

$$H(s) = -\frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \frac{1}{LC}} = K.\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

(c) Sea $r(t)$ la respuesta completa del sistema cuando la entrada es $e(t) = Y(t)V$, es decir, un escaón de amplitud V. Aplicando el Teorema del valor final, calcular

$$\lim_{t\to+\infty} r(t)$$

Sabemos que en el tiempo,

$$r(t) = h(t) * e(t)$$

En el dominio de Laplace, $R(s) = H(s).E(s)$. Por el teorema del valor final (TVF), sabemos que

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = \lim_{s\to 0} s.R(s) = \lim_{s\to 0} s.H(s).E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{KV\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = KV = -V$$

por lo que el sistema responderá asintóticamente con una señal que tiende a una constante opuesta a la amplitud del escalón de entrada. Las hipótesis del TVF requieren que la abscisa de convergencia de s.R(s) sea negativa estricta o que si hay una singularidad en $s = 0$, sea simple, como es en este caso.

(d) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(s)$.

Para obtener los diagramas asintóticos de Bode, realizamos un análisis por bandas. Al ser el módulo de ζ menor que 1, el sisema presenta dos raíces complejas conjugadas, de móduo ω_n. La única frecuencia crítica es entonces ω_n y tenemos dos bandas de análisis, una de baja y otra de alta frecuencia.

- Para $\omega \ll \omega_n$,

$$H(j\omega) \approx -\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 0\,dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx 180^o \end{cases}$$

(Elegimos iniciar la fase en 180^o, a menos de un desfasaje de 360^o, podríamos comenzar en otro valor.)

- Para $\omega_n \ll \omega$,

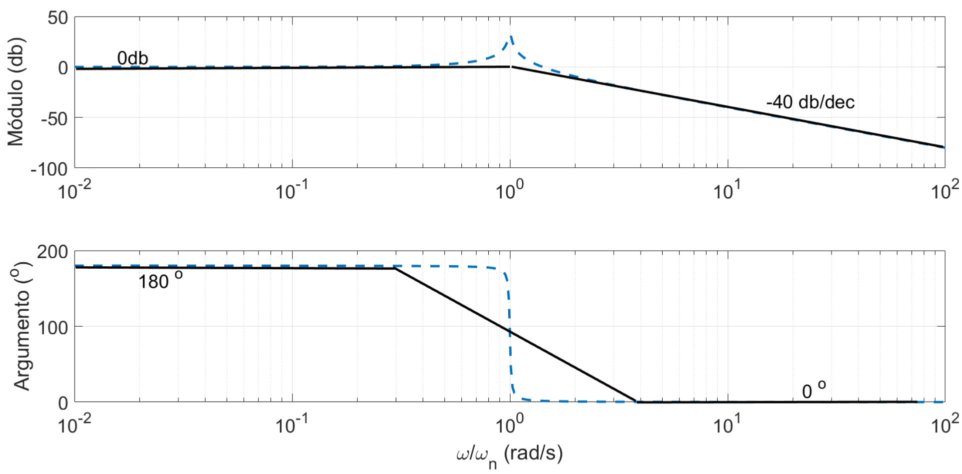
$$H(j\omega) \approx -\frac{\omega_n 2}{(j\omega)^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20\log\left(\omega_n^2\right) - 40\log(\omega)\,dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \;\; (\text{o } \pm 180^o) \end{cases}$$

Mirando las posibles variaciones de la fase, y teniendo en cuenta que estamos frente a dos raíces complejas conjugadas, con parte real negativa (ζ positivo), descartamos la segunda opción. Podríamos también evaluar la transferencia en la frecuencia de corte:

$$H(j\omega_n) = -\frac{1}{j2\zeta}$$

que tiene fase 90^o.

Los diagramas de Bode se muestran a continuación, tanto los asintóticos(trazo continuo) como los reales (trazo punteado). Es importante explicitar que si ζ es muy chico, puede haber un sobretiro, tanto más grande cuanto más chico es ζ. En la figura, se muestra el caso $\zeta = 0{,}01$.



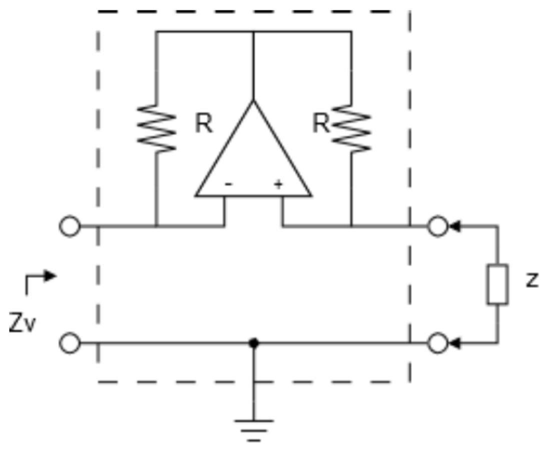
(e) ¿Considerando régimen sinusoidal, existe alguna frecuencia de trabajo a la cual el sistema responde con una sinusoide en cuadratura respecto de la entrada?

El desfasaje entre la salida en régimen y la entrada está dado por el argumento de la transferencia evaluada en la frecuencia de trabajo. Al buscar una respuesta en cuadratura, tenemos que ver si existen frecuencias de trabajo a las cuales el aporte de fase del sistema es $\pm 90^o$. Vemos que esto ocurre exactamente a $\omega = \omega_n$ (ya habíamos calculado el valor exacto de la transferencia a esa frecuencia).

Problema 2

(a) i) Se considera el cuadripolo de la figura, con el operacional ideal. Hallar los parámetros (A, B, C, D):

$$\begin{cases} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{cases}$$



Observemos que debido al cortocircuito virtual de las patas + y − del operacional, consecuencia de la ganancia infinita del mismo, las resistencias R están *virtualmente en paralelo* y circula por ellas la misma corriente hacia la salida del operacional. De la descripción de un cuadripolo a través de las constantes generales, sabemos que

$$\begin{cases} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{cases}$$

Entonces, $A = \frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}$. Por el cortocircuito virtual, $V_1 = V_2$, de donde $A = 1$.

En la misma línea, $B = \frac{V_1}{-I_2}\Big|_{V_2=0}$. Al imponer $V_2 = 0$, tenemos también $V_1 = 0$, de donde $B = 0$.

Miremos ahora $D = \frac{I_1}{-I_2}\Big|_{V_2=0}$. Pensemos una fuente de corriente inyectando $-I_2$. Por la impedancia de entrada infinita del operacional, esa corriente circula por la resistencia R desde la pata + hacia la salida del operacional y coincide con la corriente I_1 que circula por la otra R desde la pata − a la salida del operacional. Entonces $D = -1$.

Finalmente, consideremos $C = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}$. Nuevamente, por la igualdad de las corrientes, obtenemos $C = 0$.

ii) Mostrar que si se carga el lado 2 con una impedancia Z, la impedancia vista del lado 1 vale $-Z$.

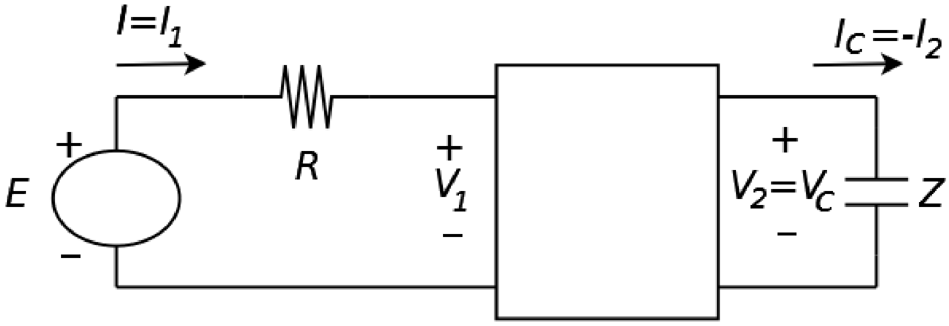
La impedancia vista del lado 1 vale $Z_V = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2}$. La impedancia de carga del lado 2 verifica la identidad $Z = \frac{V_2}{-I_2}$ (recordar que I_2 se toma entrante al cuadripolo). Entonces

$$Z_V = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{A\frac{V_2}{-I_2} + B}{C\frac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{AZ + B}{CZ + D} = \frac{Z}{-1} = -Z \quad , \quad \forall Z$$

(b) Se considera el circuito anterior funcionando en régimen sinusoidal, alimentado del lado 1 por la fuente de tensión $v(t) = \sqrt{2}E\cos(100\pi t)$ y cargado del lado 2 por un condensador de valor C.

i) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente consumidas a la fuente.

Por lo anterior, podemos considerar un circuito equivalente que sea simplemente la fuente sinusoidal alimentando la serie de R con la impedancia opuesta a la del



condensador $Z_C = \frac{1}{Cj\omega}$, con $\omega = 100\pi$. Entonces, la impedancia que ve la fuente en régimen sinusoidal vale $Z_{eq} = R - \frac{1}{Cj\omega} = R + j\frac{1}{C\omega} = R + jX$, que es inductiva, pues su reactancia X es positiva. Trabajamos en valores eficaces.

La potencia activa consumida a la fuente la consume la resistencia R y vale

$$P = R.|I|^2 = R\left|\frac{E}{R+jX}\right|^2 = |E|^2.\frac{R}{R^2+X^2} = \frac{RE^2}{R^2+X^2}$$

La potencia reactiva la consume la reactancia $X = \frac{1}{C\omega}$ y vale

$$Q = X.|I|^2 = X\left|\frac{E}{R+jX}\right|^2 = |E|^2.\frac{X}{R^2+X^2} = \frac{XE^2}{R^2+X^2}$$

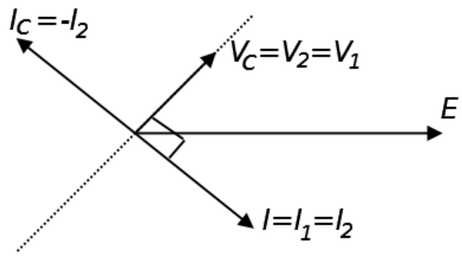
La potencia aparente vale

$$S = E.\bar{I} = E.\overline{\frac{E}{R+jX}} = \frac{|E|^2}{R-jX} = \frac{R+jX}{R^2+X^2}E^2 = P + jQ.$$

ii) Dibujar un diagrama fasorial que incluya la tensión y corriente de la fuente y la tensión y corriente del condensador.
La corriente que entrega la fuente vale

$$I = \frac{E}{R + \frac{j}{C\omega}} = \frac{EC\omega}{RC\omega + j}$$

y está retrasada respecto de la tensión, ya que la carga es inductiva. Si denotamos por V_1 y V_2 las tensiones del lado 1 y lado 2 del cuadripolo, sabemos que $V_C = V_2 = V_1 = \frac{E\frac{j}{C\omega}}{R+\frac{j}{C\omega}} = \frac{jE}{RC\omega+j}$ y resulta ser ortogonal a la corriente de la fuente. Finalmente, la corriente de la fuente es la I_1 del cuadripolo, que es igual a la I_2 y opuesta a la corriente I_C del condensador.



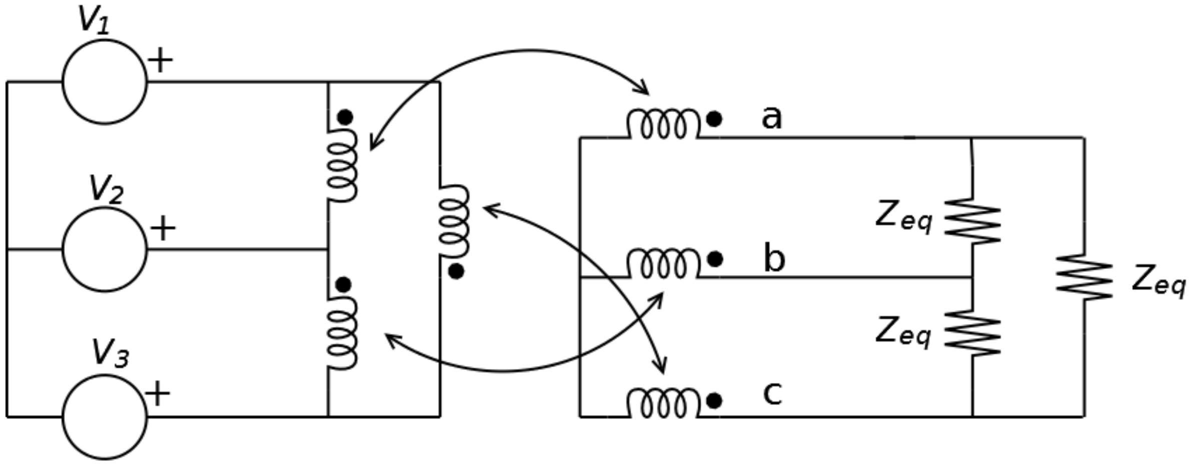
iii) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, sin alterar la potencia activa. Indicar qué elemento colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Para compensar la potencia reactiva sin alterar la reactiva, colocamos un condensador C' en paralelo con la fuente, que entregue la reactiva que consume el cuadripolo:

$$Q_{C'} = -E^2C'\omega = -\frac{XE^2}{R^2+X^2} \Rightarrow C' = \frac{X}{(R^2+X^2)\omega} = \frac{\frac{1}{C\omega}}{\left(R^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2\right)\omega} = \frac{C}{(R^2C^2\omega^2+1)}$$

(c) Se considera el circuito trifásico de la figura, en el que la impedancia Z_{eq} es la que ve la fuente de la parte b), el sistema de fuentes trifásico es equilibrado y perfecto, de valor eficaz E y los transformadores son ideales, con $\frac{n_1}{n_2} = 2$.

Hallar el equivalente monofásico.



El triángulo de impedancias Z_{eq} podemos convertirlo en una estrella equivalente de impedancias de valor $Z_{eq}/3$. Estas impedancias pasan al primario del transformador trifásico multiplicadas por la relación de transformación al cuadrado y formando un triángulo de impedancias $\frac{4}{3}Z_{eq}$. Finalmente, podemos transfigurar este triángulo en una nueva estrella, de impedancias de valor $\frac{4}{9}Z_{eq}$. Obtenemos entonces el equivalente monofásico de la figura: