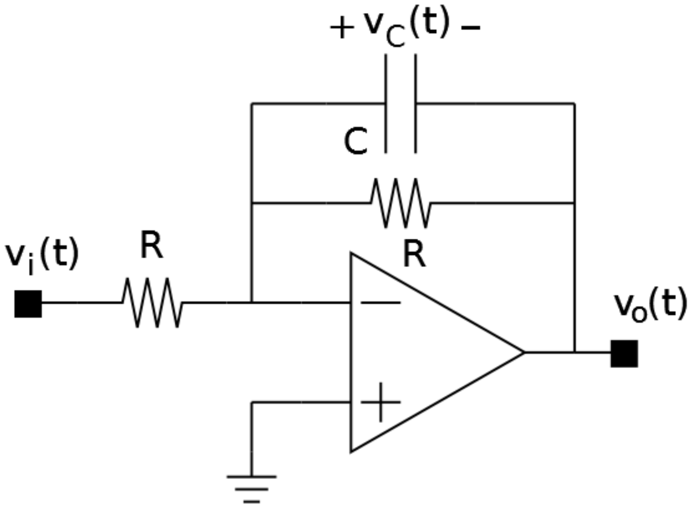
Teoría de Circuitos

Examen de julio de 2019

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

(a) Hallar la transformada de Laplace de la señal $v_i(t) = Y(t).A.\cos(\omega_0 t)$, con A y ω_0 positivos.



(b) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ del circuito de la figura, con el operacional ideal.

(c) Sea $v_o(t)$ la respuesta total del circuito a la señal de la parte (a): $v_i(t) = Y(t).A.\cos(\omega_0 t)$.

i) Mostrar que $V_o(s)$ puede escribirse como

$$V_o(s) = \left(\frac{A}{1 + R^2C^2\omega_0^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{s + RC\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}\right)$$

ii) Hallar $v_o(t)$ y, haciendo tender el tiempo a infinito, hallar la respuesta en régimen $v_{o,reg}(t)$.

(d) Recordando que $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ es la transferencia en régimen sinusoidal del circuito, hallar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$ y bosquejar los reales.

(e) A partir de lo hallado en las partes anteriores, **verificar** que la respuesta en régimen del circuito ante la entrada sinusoidal $v_i(t) = Y(t).A.\cos\left(\frac{1}{10RC}t\right)$ es

$$v_{o,reg}(t) = A. \left|H\left(j\frac{1}{10RC}\right)\right| . \cos\left(\frac{1}{10RC}t + arg\left[H\left(j\frac{1}{10RC}\right)\right]\right)$$

Sugerencia: recordar la identidad $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

(f) ¿Cómo cambia cualitativamente lo hallado en la parte (c) si el condensador tiene una carga inicial no nula v_{C0}?

Problema 2

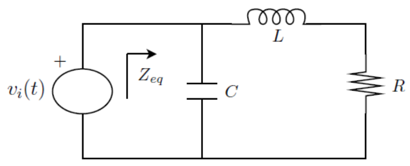


Figura 1:

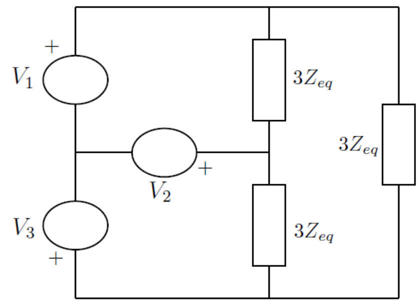


Figura 2:

Se considera el circuito en régimen sinusoidal de la figura de la izquierda, con los siguientes datos:

$$v_i(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad R = 22\Omega \quad , \quad L = 120mHy \quad , \quad C = 12\mu F$$

(a) i) Hallar la impedancia vista por la fuente, $Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$, a la frecuencia de trabajo. Hallar exprésamente su resistencia R_{eq} y su reactancia X_{eq}. Indicar si es capacitiva o inductiva.

ii) Hallar el fasor I asociado a la corriente que entrega la fuente de tensión y el fasor I_L de la corriente por la bobina. **Hallar el valor eficaz de la corriente que entrega la fuente**.

iii) Realizar un diagrama fasorial con I, I_L y V_i (fasor de la fuente de tensión). Incorporar al diagrama anterior los fasores I_C (fasor de la corriente por el condensador), V_R y V_L (fasores de la tensión en bornes de la resistencia y la bobina respectivamente). (No es necesario hallarlos explícitamente, pero el dibujo debe ser coherente con el circuito y las componentes involucradas).

(b) i) Calcular la potencia activa y reactiva consumida a la fuente.

ii) Se pretende compensar la potencia reactiva consumida a la fuente. Indicar qué componente colocaría, cómo la conectaría y qué valor tendría que tener para realizar la compensación.

(c) En el circuito trifásico mostrado en la figura de la derecha, hallar las **expresiones temporales** de las corrientes de línea $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, sabiendo que.

$$v_1(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad v_2(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6 + 2\pi/3)$$

$$v_3(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6 + 4\pi/3) \quad ,$$

Teoría de Circuitos

Examen de julio de 2019

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Se tiene la siguiente transferencia en régimen sinusoidal:

$$H(j\omega) = k.\frac{j\omega + \omega_0}{j\omega + k.\omega_0}$$

con k positivo.

a) Se desea que exista al menos una frecuencia de trabajo para la cual el sistema introduzca un adelanto de fase de 45^o. ¿Cuál de las siguientes opciones se debe cumplir?

   i) $k < 1$

   ii) $k > 1$

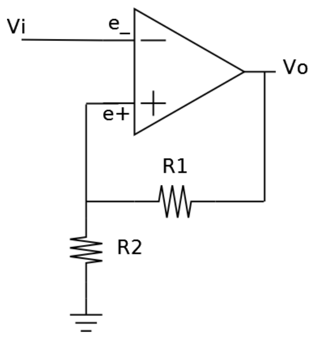
b) Para k cumpliendo la condición anterior, hallar la distancia exacta -en decibeles- entre el Diagrama de Bode de módulo real y el asintótico en $\omega = \omega_0$. Dejarla expresada en función de k.

Pregunta 2

El circuito de la figura es un *Schmitt trigger*, basado en un comparador.

i) Hallar la salida del comparador cuando la entrada es una sinusoide. Discutir en función de la amplitud de la sinusoide.

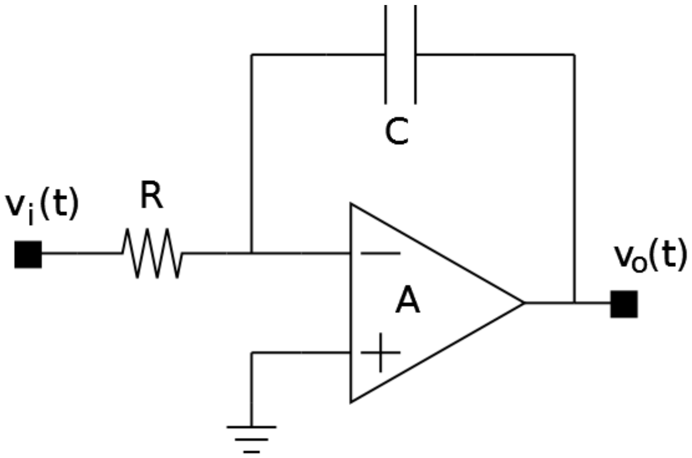
ii) Investigar qué cambia si en lugar de conectar la resistencia R_2 a tierra, se conecta a una fuente de valor V_{ref}.



Pregunta 3

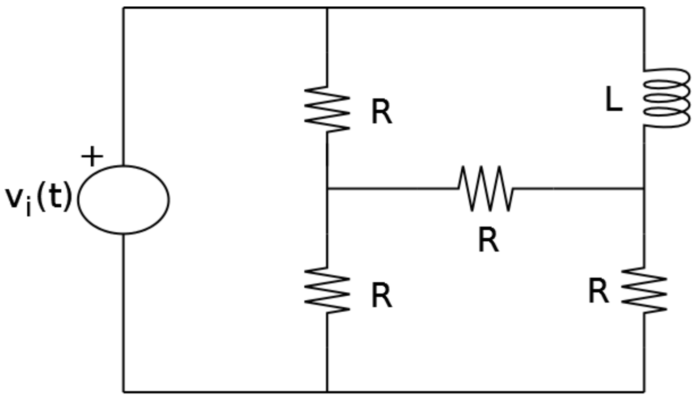
i) Enunciar y demostrar el Teorema de Miller

ii) Aplicarlo en el siguiente circuito para determinar la impedancia vista por la fuente v_i, sabiendo que el operacional tiene impedancia de entrada infinita, impedancia de salida nula y ganancia **finita** de valor A.



Pregunta 4

El circuito de la figura está funcionando en régimen sinusoidal.



i) Usando la transfiguración estrella-triángulo, hallar la impedancia vista por la fuente e indicar si es inductiva o capacitiva.

ii) Hallar las potencias aparente, activa y reactiva entregadas por la fuente.

iii) Si se quiere compensar la potencia reactiva, indicar qué tipo de componente colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Solución

Problema 1

(a) Hallar la transformada de Laplace de la señal $v_i(t) = Y(t).A.\cos(\omega_0 t)$, con A y ω_0 positivos.

Por definición

$$V_i(s) = \mathcal{L}[v_i(t)](s) = \int_0^{+\infty} v_i(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} A.\cos(\omega_0 t)e^{-st}dt$$

Escribimos el coseno como

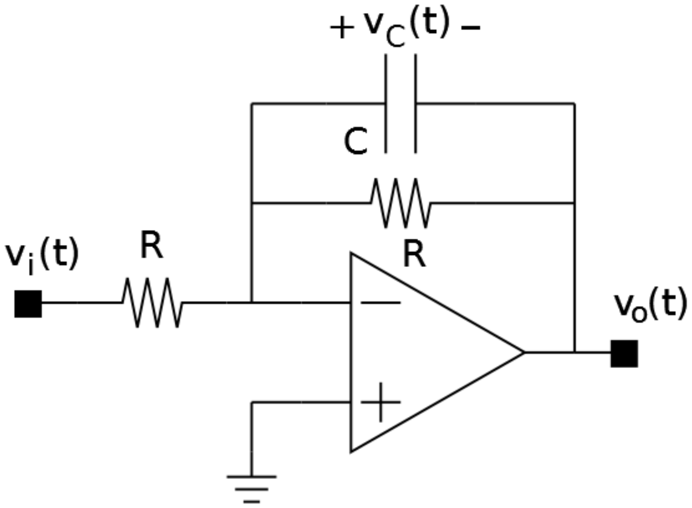
$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

y lo ponemos en la integral

$$V_i(s) = \frac{A}{2}.\int_0^{+\infty} \left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] e^{-st}dt = \frac{A}{2}.\int_0^{+\infty} e^{-(s-j\omega_0)t}dt + \frac{A}{2}.\int_0^{+\infty} e^{-(s+j\omega_0)t}dt$$

$$= \frac{A}{2}.\left.\frac{e^{-(s-j\omega_0)t}}{-(s-j\omega_0)}\right|_0^{+\infty} + \frac{A}{2}.\left.\frac{e^{-(s+j\omega_0)t}}{-(s+j\omega_0)}\right|_0^{+\infty} = \frac{A}{2}.\frac{-1}{-(s-j\omega_0)} + \frac{A}{2}.\frac{-1}{-(s+j\omega_0)}$$

$$= \frac{A}{2}.\left(\frac{1}{(s-j\omega_0)} + \frac{1}{(s+j\omega_0)}\right) = \frac{A}{2}.\left(\frac{(s+j\omega_0)+(s-j\omega_0)}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}\right) \Rightarrow \boxed{V_i(s) = \frac{As}{s^2+\omega_0^2}}$$



(b) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ del circuito de la figura, con el operacional ideal.

Para calcular la transferencia entre v_i y v_o, asumimos condicines iniciales nulas, de forma que el circuito tiene una sola entrada. Pasamos al circuito equivalente en Laplace y obtenemos una configuración inversora, con impedancia $Z_1(s) = R$ entre la entrada y la pata menos e impedancia $Z_2(s) = \frac{1}{Cs}||R = \frac{R}{RCs+1}$ entre la salida y la pata menos. Por ser una configuración inversora, tenemos que[a]

$$\boxed{H(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{\frac{R}{RCs+1}}{R} = -\frac{1}{RCs+1}}$$

(c) Sea $v_o(t)$ la respuesta total del circuito a la señal de la parte (a): $v_i(t) = Y(t).A.\cos(\omega_0 t)$.

[a] Si uno no recuerda la transferencia de la onfiguración inversora, puede obtenerla observando que, al tener el operacional impedancia de entrada infinita, se tiene la igualdad de las corrientes por las impedancias $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$. Al plantear dichas corrientes, e imponiendo que debido a la ganancia infinita del operacional se cumple el cortocircuito virtual ($e^+ = e^-$), se obtiene la expresión de la transferencia.

i) Mostrar que $V_o(s)$ puede escribirse como

$$V_o(s) = \left(\frac{A}{1+R^2C^2\omega_0^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} - \frac{s+RC\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2}\right)$$

Sabemos que $V_o(s) = H(s).V_i(s) = -\frac{1}{RCS+1}.\frac{As}{s^2+\omega_0^2}$. Para hallar la expresión temporal, podríamos pasar a fracciones simples y luego antitransformar. En lugar de eso, seguimos la letra y hacemos común denominador:

$$V_o(s) = \left(\frac{A}{1+R^2C^2\omega_0^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} - \frac{s+RC\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{A}{1+R^2C^2\omega_0^2}\right) \cdot \left(\frac{s^2+\omega_0^2-\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(s+RC\omega_0^2\right)}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(s^2+\omega_0^2\right)}\right) =$$

$$= \left(\frac{A}{1+R^2C^2\omega_0^2}\right) \cdot \left(\frac{s^2+\omega_0^2-s^2-\omega_0^2-sRC\omega_0^2-\frac{1}{RC}s}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(s^2+\omega_0^2\right)}\right) = \left(\frac{A}{1+R^2C^2\omega_0^2}\right) \cdot \left(\frac{-sRC\omega_0^2-\frac{1}{RC}s}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(s^2+\omega_0^2\right)}\right)$$

De donde

$$\boxed{V_o(s) = \left(\frac{A}{1+R^2C^2\omega_0^2}\right) \cdot \left(\frac{-sR^2C^2\omega_0^2-s}{(RCs+1)\left(s^2+\omega_0^2\right)}\right) = \frac{-As}{(RCs+1)\left(s^2+\omega_0^2\right)}}$$

ii) Hallar $v_o(t)$ y mostrar que existe una respuesta en régimen $v_{o,reg}(t)$.

Habiendo obtenido la expresión de $V_o(s)$ en fracciones simples, antitransformamos:

$$v_o(t) = Y(t).\frac{A}{1+R^2C^2\omega_0^2}.\left(e^{-\frac{t}{RC}} - \cos(\omega_0 t) - RC\omega_0.\sin(\omega_0 t)\right)$$

Vemos que existe una parte *transitoria* y que hay una respuesta sinusoidal en régimen.

Lo que sigue, puede hacerse directamente en la parte (e). Lo presentamos acá de manera general. Miremos con atención la parte sinusoidal, para t positivo. Observemos que

$$\frac{A}{1+R^2C^2\omega_0^2}.\left(-\cos(\omega_0 t) - RC\omega_0.\sin(\omega_0 t)\right) =$$

$$\frac{A}{\sqrt{1+R^2C^2\omega_0^2}}.\left(-\frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega_0^2}}\cos(\omega_0 t) - \frac{RC\omega_0}{\sqrt{1+R^2C^2\omega_0^2}}.\sin(\omega_0 t)\right)$$

Los coeficientes del seno y el coseno verifican que son menores que 1 en valor absoluto y sus cuadrados suman 1, por lo que son el seno y el coseno de un cierto ángulo φ. Teniendo en cuenta la identidad $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, podemos reinterpretar los términos anteriores así:

$$\cos(\varphi) = \frac{-1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega_0^2}} \quad , \quad \sin(\varphi) = \frac{RC\omega_0}{\sqrt{1+R^2C^2\omega_0^2}}$$

y podemos re-escribir la salida así:

$$v_o(t) = Y(t).\frac{A}{1+R^2C^2\omega_0^2}.e^{-\frac{t}{RC}} + Y(t).\frac{A}{\sqrt{1+R^2C^2\omega_0^2}}.\cos\left[\omega_0 t + \varphi\right]$$

siendo φ un ángulo del segundo cuadrante (coseno negativo y seno positivo).

(d) Recordando que $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ es la transferencia en régimen sinusoidal del circuito, hallar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

Definamos la pulsación $\omega_1 = \frac{1}{RC}$. Entonces,

$$H(s) = -\frac{\omega_1}{s+\omega_1} \Rightarrow H(j\omega) = -\frac{\omega_1}{j\omega+\omega_1}$$

Para obtener los diagramas asintóticos de Bode, realizamos un análisis por bandas. La única frecuencia crítica es ω_1 y tenemos entonces dos bandas, una de baja y otra de alta frecuencia.

- Para $\omega \ll \omega_1$,

$$H(j\omega) \approx -\frac{\omega_1}{\omega_1} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 0\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx -\pi \end{cases}$$

- Para $\omega_1 \ll \omega$,

$$H(j\omega) \approx -\frac{\omega_1}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20\log(\omega_1) - 20\log(\omega)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx -\frac{3\pi}{2} \ \ (\text{o } \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Mirando las posibles variaciones de la fase, y teniendo en cuenta que estamos frente a una raíz simple, descartamos la segunda opción.

Los diagramas se muestran a continuación.

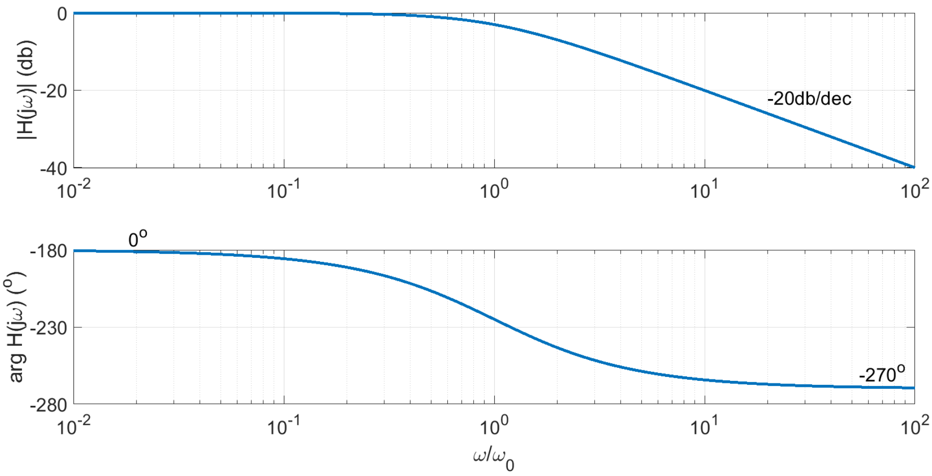


Figura 3: Diagrama de Bode

(e) A partir de lo hallado en las partes anteriores, **verificar** que la respuesta en régimen del circuito ante la entrada sinusoidal $v_i(t) = Y(t).A.\cos\left(\frac{1}{10RC}t\right)$ es

$$v_{o,reg}(t) = A.\left|H\left(j\frac{1}{10RC}\right)\right|.\cos\left(\frac{1}{10RC}t + arg\left[H\left(j\frac{1}{10RC}\right)\right]\right)$$

Sugerencia: recordar la identidad $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Aplicamos lo visto en la parte (b), para $\omega_0 = \frac{1}{10RC} = \frac{\omega_1}{10}$. Notemos que $RC\omega_0 = \frac{1}{10}$. Vemos entonces que se cumple que

$$\frac{10}{\sqrt{1+R^2C^2\omega_0^2}} = \frac{10}{\sqrt{1+\frac{1}{100}}} = \frac{100}{\sqrt{101}}$$

Por otro lado,

$$\left|H\left(j\frac{1}{10RC}\right)\right| = \left|\frac{\frac{1}{RC}}{j\frac{1}{10RC} + \frac{1}{RC}}\right| = \left|\frac{1}{j\frac{1}{10}+1}\right| = \left|\frac{10}{j+10}\right| = \frac{10}{\sqrt{101}}$$

Además, vemos $arg\left[H\left(j\frac{1}{10RC}\right)\right] = -atan(1/10)$ y recuperamos lo visto antes.

(f) ¿Cómo cambia cualitativamente lo hallado en la parte (c) si el condensador tiene una carga inicial no nula v_{C0}?

Si el condensador tiene carga inicial no nula, entonces podemos aplicar superposición, considerando por separado la influencia de la entrada $v_i(t)$ y la de la condición inicial. Al aplicar sólo la entrada v_i, obtenemos lo ya visto, es decir una exponencial decreciente y una sinusoide que persiste en régimen. Al considerar sólo la condición inicial, al pasar al equivalente en Laplace nos queda una fuente en el camino de realimentación del operacional. Pero al anular la entrada v_i, no puede haber corriente por la resistencia entre v_i y e^-, por lo nos queda un circuito de descarga del condensador a través de la otra resistencia R. La tensión del condensador se ve directamente en la salida (cambiada de signo). Por lo tanto, el efecto de un dato previo no nulo en el condensador será una exponencial decreciente que se suma a la respuesta a la entrada.

Problema 2

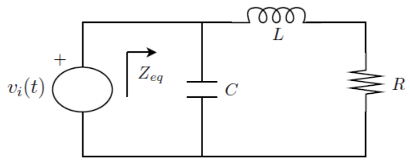


Figura 4:

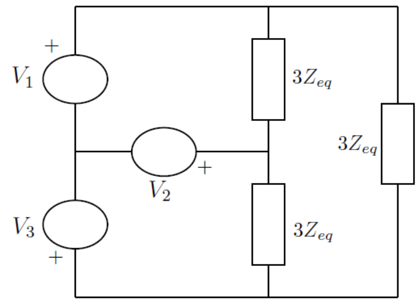


Figura 5:

Se considera el circuito en régimen sinusoidal de la figura de la izquierda, con los siguientes datos:

$$v_i(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad R = 22\Omega \quad , \quad L = 120mHy \quad , \quad C = 12\mu F$$

(a) i) Hallar la impedancia vista por la fuente, $Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$, a la frecuencia de trabajo. Hallar exprésamente su resistencia R_{eq} y su reactancia X_{eq}. Indicar si es capacitiva o inductiva.

La expresión para Z_{eq} se obtiene haciendo

$$Z_{eq} = \frac{1}{Cj\omega}||(R + Lj\omega) = \frac{R + Lj\omega}{LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1}$$

Incorporando los datos, resulta:

$$Z_{eq} = (29,6 + j41,1)\Omega = 50,6\Omega\angle 54,2^o$$

La impedancia es inductiva, pues su reactancia es positiva.

ii) Hallar el fasor I asociado a la corriente que entrega la fuente de tensión y el fasor I_L de la corriente por la bobina. **Hallar el valor eficaz de la corriente que entrega la fuente.**

Tenemos que $I = \frac{V_i}{Z_{eq}}$[b]. Si trabajamos en valores eficaces, entonces $|V_i| = 220V$ y el valor eficaz de la corriente que entrega la fuente es de $4,34A$. Además

$$I_L = \frac{V_i}{R + Lj\omega}$$

iii) Realizar un diagrama fasorial con I, I_L y V_i (fasor de la fuente de tensión). Incorporar al diagrama anterior los fasores I_C (fasor de la corriente por el condensador), V_R y V_L (fasores de la tensión en bornes de la resistencia y la bobina respectivamente). (No es necesario hallarlos explícitamente, pero el dibujo debe ser coherente con el circuito y las componentes involucradas).

Se muestra en la figura 6.

[b] Los 30Â° de la señal de la fuente de tensión pueden considerarse en el fasor V_i o pensar este fasor como de fase 0 e incorporar los 30Â° al final.

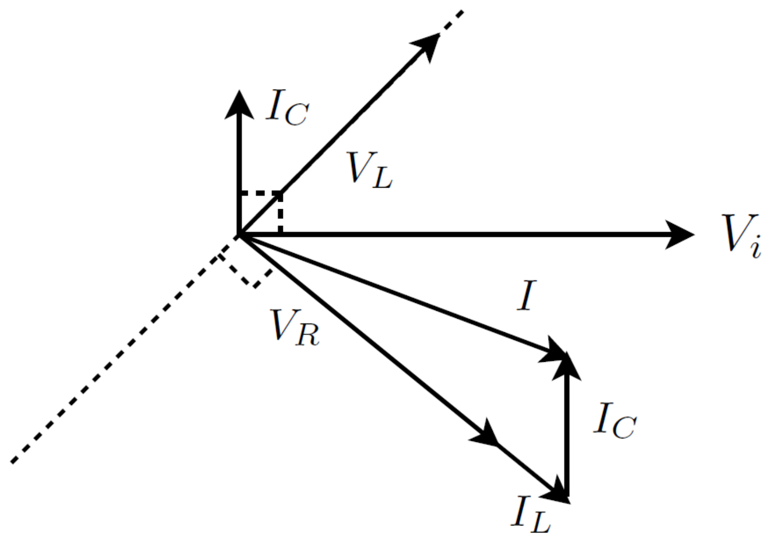


Figura 6: Diagrama fasorial del circuito del Ejercicio 2

(b) i) Calcular la potencia activa y reactiva consumida a la fuente.

$P = re(V_i\bar{I}) = 559W$, $Q = im(V_i\bar{I}) = 775VAR$.

ii) Se pretende compensar la potencia reactiva consumida a la fuente. Indicar qué componente colocaría, cómo la conectaría y qué valor tendría que tener para realizar la compensación.

Para compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, al ser la carga inductiva, colocamos un condensador en paralelo con la carga, de forma de no alterar la potencia activa consumida. El valor C_c del condensador a colocar debe ser tal que la carga total que vea la fuente

$$\frac{1}{C_c j\omega}||Z_{eq}$$

sea real. Resulta

$$C_c = \frac{1}{\omega}\frac{X_{eq}}{R_{eq}^2 + X_{eq}^2}$$

(c) En el circuito trifásico mostrado en la figura de la derecha, hallar las **expresiones temporales** de las corrientes de línea $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, sabiendo que.

$$v_1(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad v_2(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6 + 2\pi/3)$$

$$v_3(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6 + 4\pi/3) \quad ,$$

Transfigurando el triángulo a estrella, es equivalente monofásico que se obtiene coincide con el circuito ya estudiado, por lo que las corrientes de línea resultan ser

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 4,34\sqrt{2}\sin(100\pi t - 1,47)A \\ i_2(t) &= 4,34\sqrt{2}\sin(100\pi t - 1,47 + 2\pi/3)A \\ i_3(t) &= 4,34\sqrt{2}\sin(100\pi t - 1,47 + 4\pi/3)A \end{aligned}$$