Teoría de Circuitos

Examen de febrero de 2025

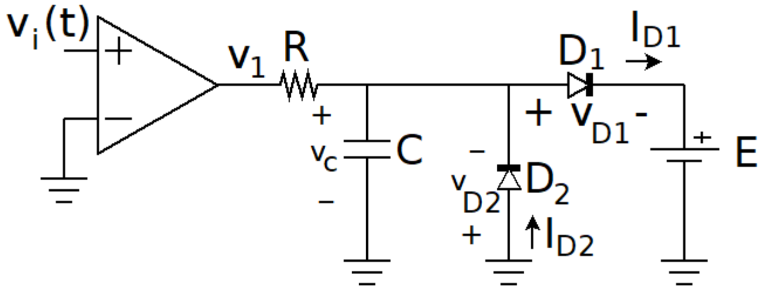
Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

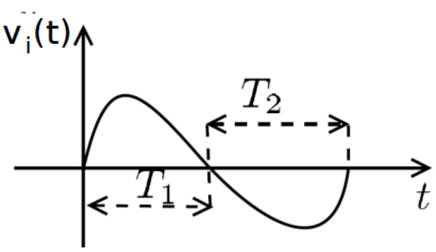
Problema 1

Se considera el circuito de la figura. El amplificador operacional es ideal y está alimentado con fuentes de valor $\pm V_{CC}$. La entrada $v_i(t)$ se muestra también en la figura. Consiste en una señal continua, que es positiva en el intervalo $(0, T_1)$, es negativa en el intervalo $(T_1, T_1 + T_2)$ y se anula en $t = 0$, $t = T_1$ y $t = T_1 + T_2$. Se sabe que el condensador arranca inicialmente descargado y que los diodos son ideales.

Notar que por como están conectados, no pueden conducir ambos al mismo tiempo, ya que la fuente de valor E quedaría cortocircuitada. Cuando el diodo D_1 conduce, la tensión del condensador queda fija a la tensión de la fuente de valor E. Por otra parte, si el diodo D_2 conduce, la tensión del condensador queda fija a $0V$. Recordar que para trabajar con los diodos hay que suponer un estado posible (ON, OFF) y luego realizar la verificación que corresponda en cada caso.

Se sabe que $E = \frac{V_{CC}}{2}$. Se introduce la constante de tiempo auxiliar $\tau = RC$, de la cual se sabe que es menor que T_1 y T_2.





(a) Identificar en qué modo está trabajando el amplificador operacional y hallar la relación entre las tensiones $v_i(t)$ y $v_1(t)$.

(b) Analizar primero el tramo $(0, T_1)$, en el que la señal v_i es positiva. Monitorear el estado de los diodos a lo largo del tramo. *Como el condensador está inicialmente descargado, se sugiere comenzar suponiendo que ambos diodos están inicialmente OFF.*

(c) Analizar el tramo $(T_1, T_1 + T_2)$, en el que la señal v_i es negativa. Monitorear el estado de los diodos a lo largo del tramo.

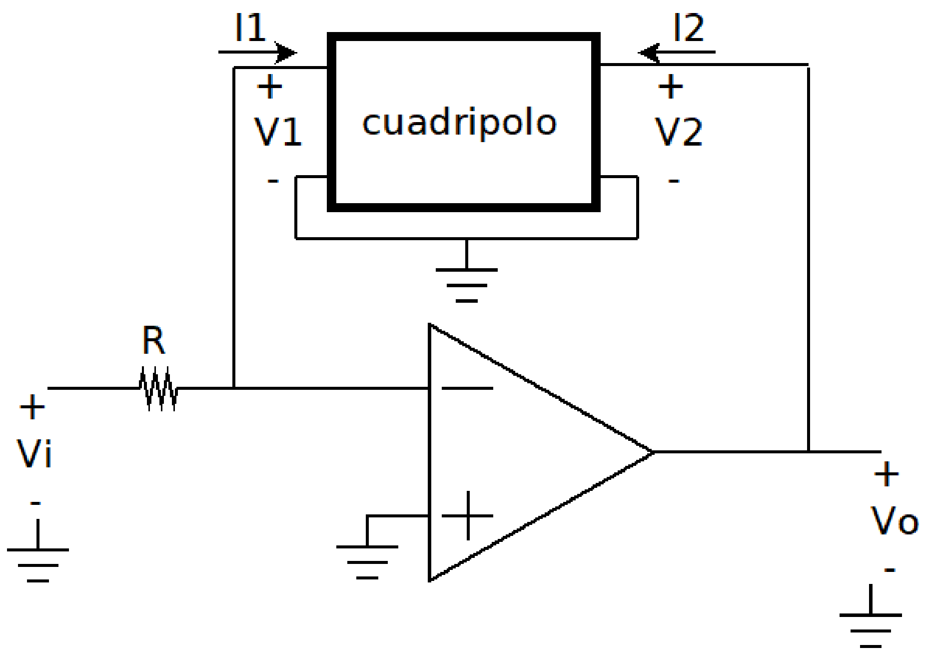
(d) A partir de lo anterior, bosquejar la gráfica de $v_C(t)$ en el intervalo $(0, T_1 + T_2)$.

Hay que explicar bien cómo se trabaja con los elementos lineales a tramos.

Problema 2

Se considera el circuito de la figura. El amplificador operacional es ideal y funciona en zona lineal. El cuadripolo se describe a través de sus impedancias de vacío $z_{11}(s), z_{12}(s), z_{21}(s), z_{22}(s)$:

$$\begin{cases} V_1 &= z_{11}.I_1 + z_{12}.I_2 \\ V_2 &= z_{21}.I_1 + z_{22}.I_2 \end{cases}$$



(a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

A partir de ahora se introduce la pulsación auxiliar $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ y se sabe que el cuadripolo es recíproco y que:

$$z_{12} = R \quad , \quad z_{11} = \frac{1}{Cs} \quad , \quad z_{22} = R + \frac{1}{Cs}$$

(b) Mostrar que la transferencia anterior puede escribirse como

$$H(s) = \frac{s^2 - \omega_0 s - \omega_0^2}{s^2}$$

(c) Hallar el valor exacto de $H(j\omega_0)$.

(d) Hallar las fecuencias críticas. Verificar que las mismas son reales.

(e) Mediante un análisis por bandas, deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando claramente cómo procede. Explicar claramente cómo se gestionan las transiciones de fase entre bandas consecutivas.

(f) En los diagramas anteriores, ubicar el valor exacto de H en la frecuencia ω_0.

(g) Hallar la respuesta completa a un escalón de amplitud E.

Teoría de Circuitos

Examen de febrero de 2025

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Enunciar el Teorema de Blondell, indicando claramente las hipótesis y la tesis.

(b) A continuación se consideran varios circuitos trifásicos, cada uno de ellos con una fuente equilibrada y perfecta. Para cada uno de estos circuitos, indicar si se cumplen o no las hipótesis y si se cumple o no la tesis del Teorema.

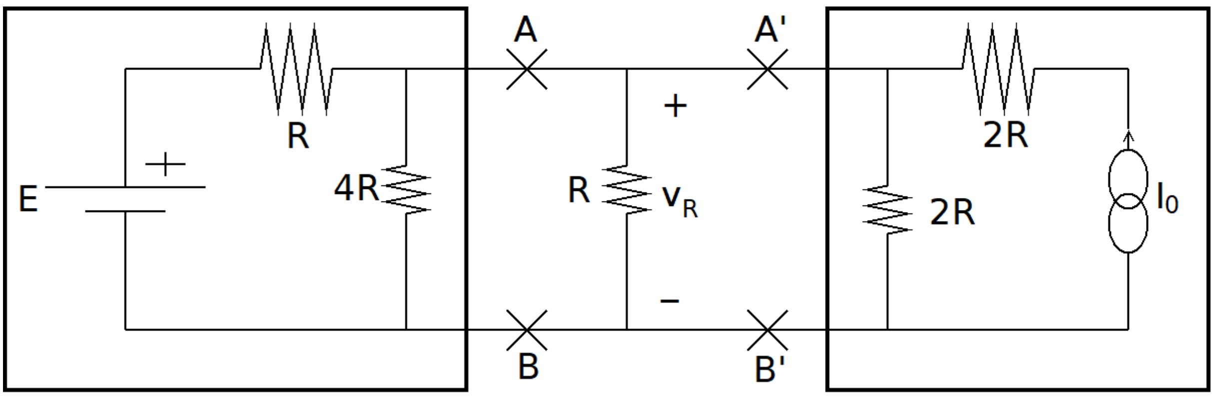
i) Circuito con carga trifásica conformada por tres impedancias cualesquiera, conectadas en estrella, sin neutro físico.

ii) Circuito con carga trifásica conformada por tres impedancias idénticas, con neutro físico.

iii) Circuito con carga trifásica conformada por tres impedancias cualesquiera, conectadas en triángulo.

iv) Circuito con carga trifásica conformada por tres impedancias idénticas, conectadas en triángulo.

Pregunta 2



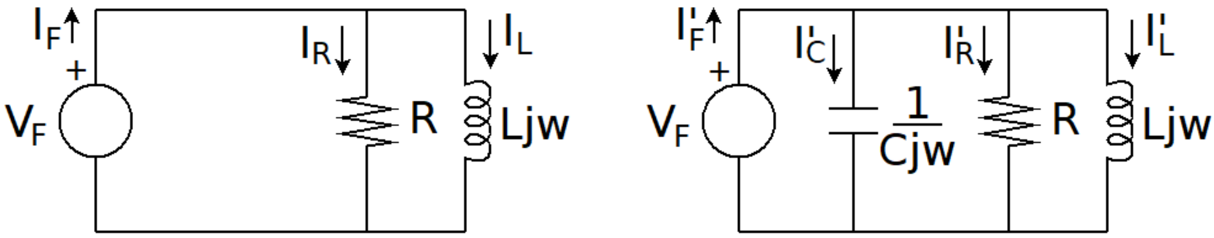
Se considera el circuito de arriba. Se pide:

(a) Hallar el equivalente de Thévenin de la caja negra de la izquierda, desde los bornes A y B.

(b) Hallar el equivalente de Thévenin de la caja negra de la derecha, desde los bornes A' y B'.

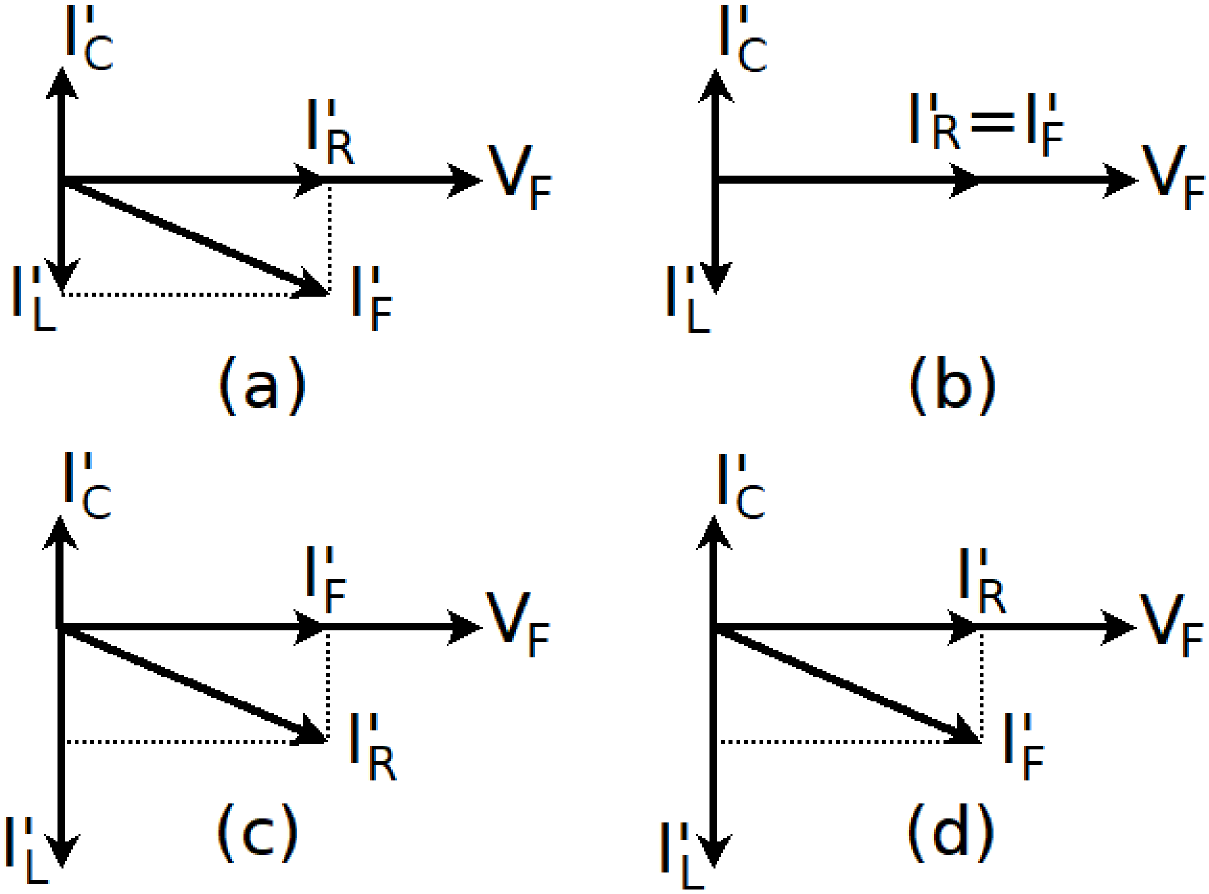
(c) Hallar la tensión V_R.

Pregunta 3



Se considera el circuito en régimen sinusoidal de la izquierda, en el que una fuente alimenta una impedancia que se modela como el paralelo de una resistencia R y una inductancia L. Para compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, se conecta un condensador como se muestra en la figura de la derecha, de valor C adecuado.

Para cada uno de los siguientes diagramas fasoriales, se pide indicar si corresponde o no al circuito de la derecha, **justificando** por sí o por no.



Pregunta 4

A partir de las propiedades de la Transformada de Laplace, **deducir los dos modelos posibles** para una inductancia en el dominio de Laplace.

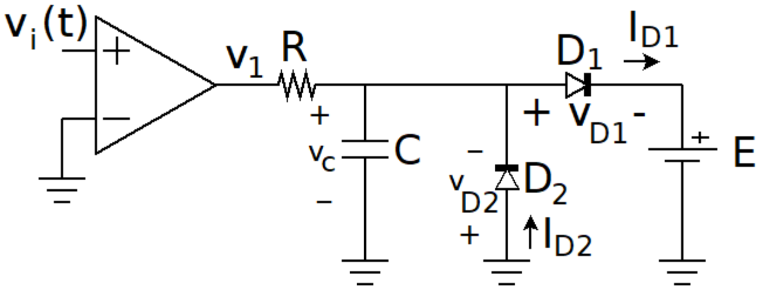
Solución

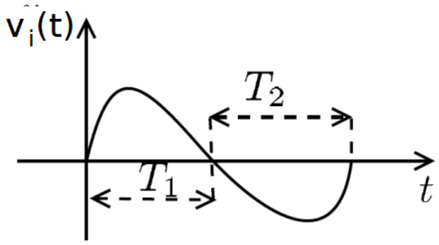
Problema 1

Se considera el circuito de la figura. El amplificador operacional es ideal y está alimentado con fuentes de valor $\pm V_{CC}$. La entrada $v_i(t)$ se muestra también en la figura. Consiste en una señal continua, que es positiva en el intervalo $(0, T_1)$, es negativa en el intervalo $(T_1, T_1 + T_2)$ y se anula en $t = 0$, $t = T_1$ y $t = T_1 + T_2$. Se sabe que el condensador arranca inicialmente descargado y que los diodos son ideales.

Se cumple que $E = \frac{V_{CC}}{2}$. Se introduce la constante de tiempo auxiliar $\tau = RC$, de la cual se sabe que es menor que T_1 y T_2.

Hay que explicar bien cómo se trabaja con los elementos lineales a tramos.





(a) Identificar en qué modo está trabajando el amplificador operacional y hallar la relación entre las tensiones $v_i(t)$ y $v_1(t)$.

El operacional no está realimentado, por lo que funcionará como comparador. Esencialmente, comparará la entrada de la pata + con la referencia de tierra de la pata -. En ese sentido, la salida verificará lo siguiente:

$$v_1(t) = \begin{cases} +V_{CC} & , \quad \text{si} \quad v_i(t) > 0 \\ -V_{CC} & , \quad \text{si} \quad v_i(t) < 0 \end{cases}$$

El valor de $v_1(t)$ no depende de lo que pase en el resto del circuito!!!

(b) Analizar primero el tramo $(0, T_1)$, en el que la señal v_i es positiva. Monitorear el estado de los diodos a lo largo del tramo.

Por lo visto antes, en este tramo tendremos que $v_1(t) = +V_{CC}$.

Algunos comentarios generales del circuito:

- la tensión del diodo D_1 verifica $v_{D_1} = v_C - E$.
- la tensión del diodo D_2 verifica $v_{D_2} = -v_C$.
- si ambos diodos están OFF, entonces el condensador evolucionará desde su estado previo hacia el valor de v_1, con constante de tiempo $\tau = RC$.

Siendo $+V_{CC}$ la tensión más grande del circuito, es natural suponer[a] que ambos diodos van a estar cortados y que se cargará el condensador, incrementando su tensión desde 0 hacia $+V_{CC}$, mediante la expresión:

$$v_C(t) = Y(t).V_{CC}.\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

A esto se puede llegar usando la expresión conocida para la carga de un condensador en un circuito RC alimentado con tensión continua, o usando Laplace.

Verifiquemos el estado de los diodos. Para el caso de D_1, su tensión vale

$$v_{D_1}(t) = v_C(t) - E = Y(t).V_{CC}.\left[1 - e^{-t/\tau}\right] - \frac{V_{CC}}{2}$$

que inicialmente es negativa, por lo que se verifica el estado del diodo D_1.

Para el caso del diodo D_2, tenemos directamente que

$$v_{D_2}(t) = -v_C(t) = -Y(t).V_{CC}.\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

que en $t = 0$ es nula y que es negativa para todo tiempo positivo. Podría surgir la duda de que el estado del diodo D_2 no fuera OFF. Si lo supusiéramos ON, la corriente por él, en el sentido indicado en la figura, sería:

$$I_{D_2}(t) = -\frac{V_{CC}}{R} < 0$$

ya que se llevaría toda la corriente que llega desde el opamp.

Entonces, tenemos que inicialmente ambos diodos están OFF y el condensador se comienza a cargar desde 0 hacia $+V_{CC}$. Esto implica que existirá un instante positivo en el cual el diodo D_1 cambia de estado, siempre y cuando no cambie nada más, es decir, si $v_i(t)$ mantiene su signo.

El diodo D_1 cambiará su estado cuando su tensión en bornes se anule o, lo que es lo mismo, cuando la tensión en el condensador iguale a la de la fuente:

$$v_C(t^*) = E = \frac{V_{CC}}{2} \Rightarrow V_{CC}.\left[1 - e^{-t^*/\tau}\right] = \frac{V_{CC}}{2} \Rightarrow 1 - e^{-t^*/\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -e^{-t^*/\tau} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{t^* = \tau \log(2) \approx 0{,}7 * \tau}$$

Entonces, el diodo D_1 cambiará de estado antes que conmute el comparador. En el intervalo (t^*, T_1) tendremos el diodo D_1 conduciendo y el diodo D_2 seguirá cortado. La verificación de estas suposiciones es directa. Como la tensión del condensador queda fijada al valor de la fuente de tensión, la corriente por el diodo será toda la corriente que viene del opamp: $I_{D_1} = \frac{V_{CC}-E}{R} = \frac{V_{CC}-E}{2R}$. La tensión en bornes de D_2 sigue siendo negativa. Nada cambiará hasta que conmute el comparador.

(c) Analizar el tramo $(T1, T_1 + T_2)$, en el que la señal v_i es negativa. Monitorear el estado de los diodos a lo largo del tramo.

Definimos un nuevo instante de tiempo $t' = 0$ y analizamos el tramo $t' \in (0, T_2)$. Ahora la tensión $v_1(t) = -V_{CC}$ y el *dato previo* del condensador será $E = \frac{V_{CC}}{2}$. La corriente tenderá a ir desde el condensador hacia el opamp o, dicho de otra manera, el diodo D_1 va a cortarse, permitiendo la descarga del condesandor. Nuevamente suponemos entonces que ambos diodos están cortados. Entonces, la tensión del condensador vale:

$$v_C(t') = Y(t').\left[-V_{CC} + (E + V_{CC})\, e^{-t'/\tau}\right] = Y(t').\left[-1 + \left(\frac{3}{2}\right) e^{-t'/\tau}\right].V_{CC}$$

[a] Hay que verificar luego esta suposición!!

Verifiquemos los estados de los diodos. El diodo D_2 está inicialmente cortado, ya que su tensión en bornes ($-v_C(t')$) es inicialmente negativa. Por otra parte, la tensión v_{D_1} vale

$$v_{D_1}(t') = v_C(t') - E = Y(t').\left[-1 + \left(\frac{3}{2}\right) e^{-t'/\tau}\right].V_{CC} - \frac{V_{CC}}{2} = Y(t').\frac{3}{2}.\left[-1 + e^{-t'/\tau}\right].V_{CC}$$

que en $t' = 0$ se anula y es negativa para tiempos posteriores. Su hubiéramos supuesto a D_1 conduciendo, su corriente sería negativa!!

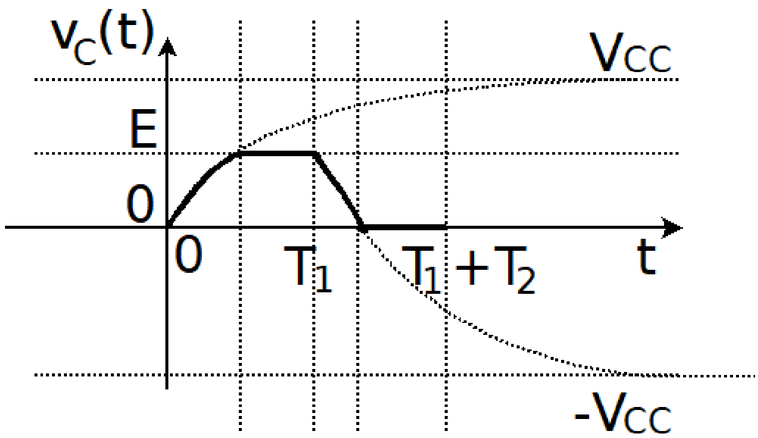
Entonces, el condensador comenzará a descargarse desde $E = +\frac{V_{CC}}{2}$ hacia $-V_{CC}$, pasando eventualmente por el valor nulo. En ese instante, que llamaremos t^{**}, conmutará el diodo D_2. Debemos ver si ese instante es anterior o posterior a T_2, ya que ahí conmutaría primero el opamp. Calculemos t^{**}.

$$v_C(t')|_{t'=t^{**}} = \left[-1 + \left(\frac{3}{2}\right) e^{-t^{**}/\tau}\right].V_{CC} = 0 \Rightarrow -1 + \left(\frac{3}{2}\right) e^{-t^{**}/\tau} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-t^{**}/\tau} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{t^{**} = -\tau \log\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,4\tau}$$

A partir de ese instante, conducirá el diodo D_2, clavando el estado del condensador en la tensión nula. El diodo D_1 permanecerá cortado, con tensión en bornes $-E$ y la corriente por el diodo D_2 será $\frac{V_{CC}}{R}$.

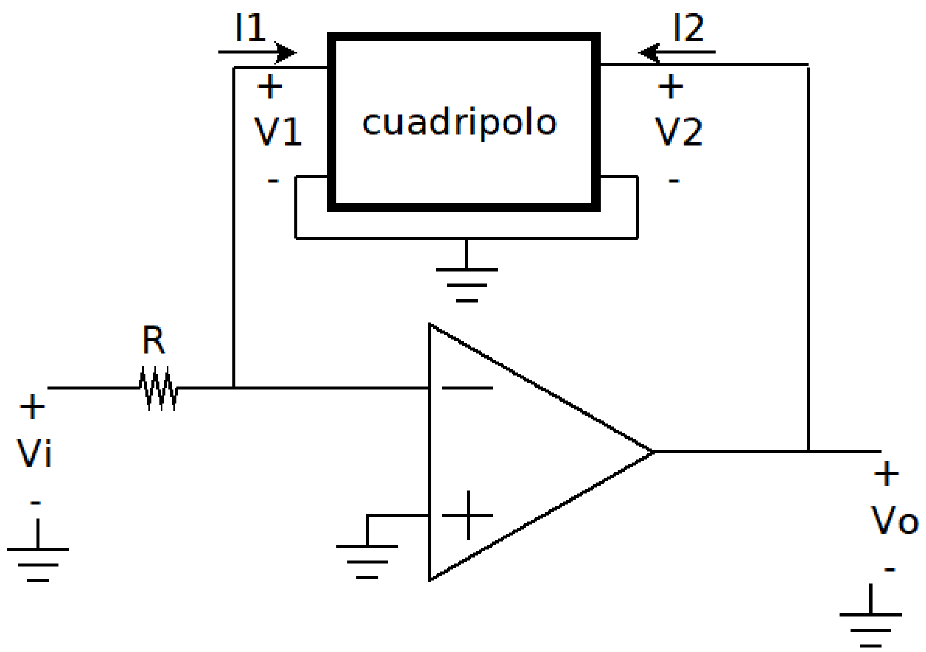
(d) Graficar $v_C(t)$ en el intervalo $(0, T_1 + T_2)$.



Problema 2

Se considera el circuito de la figura. El amplificador operacional es ideal y funciona en zona lineal. El cuadripolo se describe a través de sus impedancias de vacío $z_{11}(s), z_{12}(s), z_{21}(s), z_{22}(s)$:

$$\begin{cases} V_1 &= z_{11}.I_1 + z_{12}.I_2 \\ V_2 &= z_{21}.I_1 + z_{22}.I_2 \end{cases}$$



(a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

Observando las conexiones del circuito, y teniendo presente que no entra corriente por la pata menos del opamp (por la resistencia de entrada infinita) y que hay tierra virtual (por la ganancia infinita), vemos que

$$V_2 = V_o \quad , \quad V_1 = 0 \quad , \quad I_1 = \frac{V_i}{R}$$

De la descripcón del cuadripolo, podemos hallar una relaci´on entre V_i e I_2:

$$0 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{z_{11}}{z_{12}}I_1 = -\frac{z_{11}}{R.z_{12}}V_i$$

Usando la otra ecuación del cuadripolo, podemos hallar la transferencia:

$$V_o = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 = \frac{z_{21}}{R}V_i - \frac{z_{11}z_{22}}{R.z_{12}}V_i = \left[\frac{z_{21}.z_{12} - z_{11}.z_{22}}{R.z_{12}}\right]V_i$$

De donde

$$H(s) = \frac{z_{21}.z_{12} - z_{11}.z_{22}}{R.z_{12}}$$

A partir de ahora se introduce la pulsación auxiliar $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ y se sabe que el cuadripolo es recíproco y que:

$$z_{12} = z_{21} = R \quad , \quad z_{11} = \frac{1}{Cs} \quad , \quad z_{22} = R + \frac{1}{Cs}$$

(b) Mostrar que la transferencia anterior puede escribirse como

$$H(s) = \frac{s^2 - \omega_0 s - \omega_0^2}{s^2}$$

Sustituyendo las impedancias de vacío pos los valores dados, obtenemos lo siguiente.

$$H(s) = \frac{R.R - \frac{1}{CS}.\left(R + \frac{1}{Cs}\right)}{R.R} = \frac{R^2 - \frac{RCs+1}{C^2s^2}}{R^2} = \frac{R^2C^2s^2 - RCs - 1}{R^2C^2s^2} = \frac{s^2 - \frac{1}{RC}s - \frac{1}{R^2C^2}}{s^2}$$

que tiene la forma pedida, con $\frac{1}{RC} = \omega_0$.

(c) Hallar el valor exacto de $H(j\omega_0)$.

Tenemos que

$$H(j\omega_0) = \frac{(j\omega_0)^2 - \omega_0(j\omega_0) - \omega_0^2}{(j\omega_0)^2} = \frac{-1 - j - 1}{-1} = 2 + j = \sqrt{5}\angle 27^o$$

(d) Hallar las fecuencias críticas. Verificar que las mismas son reales.

Las frecuencias críticas salen de estudiar las raíces del numerador y del denominador. En el denominador tenemos una raíz nula doble. En el denominador, observando los cambios de signo, vemos que vamos a tener una raíz real positiva y otra negativa:

$$0 = x^2 - \omega_0 x - \omega_0^2 \Rightarrow x = \frac{\omega_0 + \pm\sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.\omega_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcr} \omega_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\omega_0 & \approx & 1{,}61\omega_0 \\ \omega_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\omega_0 & \approx & -0{,}61\omega_0 \end{array} \right.$$

(e) Mediante un análisis por bandas, deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando claramente cómo procede. Explicar claramante cómo se gestionan las transiciones de fase entre bandas consecutivas.

En primer lugar, ordenamos las frecuencias por módulo creciente:

$$|\omega_1| < \omega_2$$

Tenemos tres bandas para analizar:

$$\omega \ll |\omega_1| \quad , \quad |\omega_1| \ll \omega \ll \omega_2 \quad , \quad \omega \gg \omega_2$$

Observemos que como las frecuencias que definen las bandas distan poco más que una octava entre sí, la aproximación asintótica en la banda central será muy pobre.

En cada banda hacemos la aproximación asintótica. Al ser raíces simples, aproximamos o bien por la parte real, o bien por la parte imaginaria en la expresión

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega - \omega_1)(j\omega - \omega_2)}{(j\omega)^2}$$

Entonces:

$$\omega \ll |\omega_1| \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{(-\omega_1)(-\omega_2)}{(j\omega)^2} = -\frac{\omega_1.\omega_2}{\omega^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} |H| & \approx & 20\log(|\omega_1|.\omega_2) - 40\log(\omega)\,dB \\ arg(H) & \approx & 0^o \end{array} \right.$$

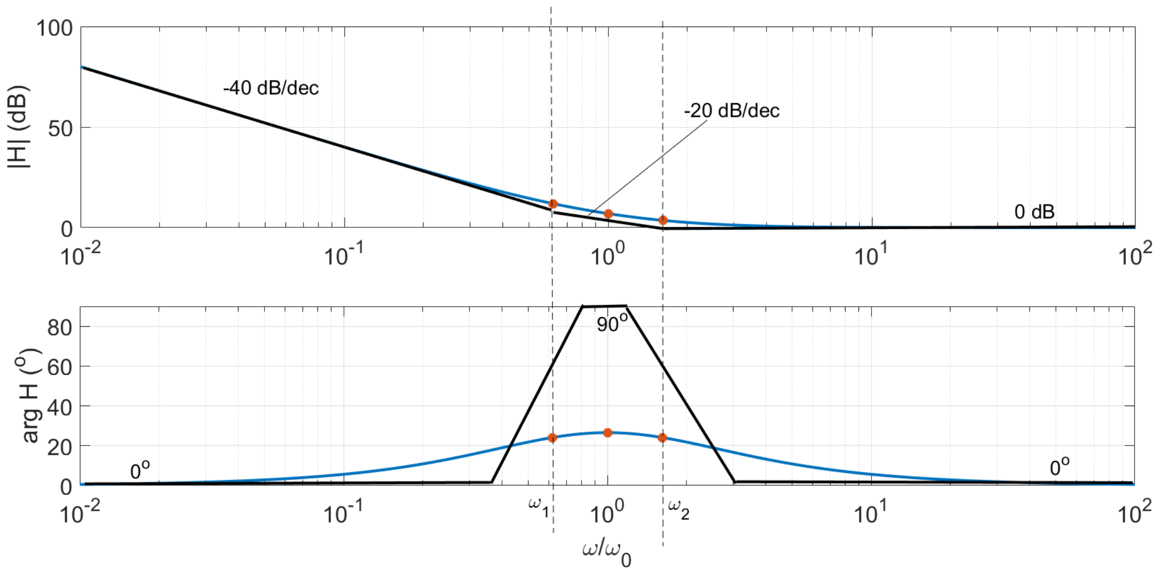
El argumento de H siempre está definido a menos de traslaciones múltiplos de 2π. En baja frecuencia anclamos el diagrama a una determinada fase inicial, consistente con el análisis. En este caso, como en baja frecuencia tenemos un número positivo (recordar que ω_1 es negativo), elegimos la fase 0^o.

$$|\omega_1| \ll \omega \ll \omega_2 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{(j\omega)(-\omega_2)}{(j\omega)^2} = \frac{j\omega_2}{\omega} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} |H| & \approx & 20\log(\omega_2) - 20\log(\omega)\,dB \\ arg(H) & \approx & +90^o\ (ó -270^o) \end{array} \right.$$

$$\omega \gg \omega_2 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{(j\omega)(j\omega)}{(j\omega)^2} = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} |H| & \approx & 0\,dB \\ arg(H) & \approx & 0^o\ (ó \pm 360^o) \end{array} \right.$$

Desde el punto de vista del módulo, el módulo viene cayendo desde la frecuencia nula, con una pendiente de $-40dB/dec$. Esta pendiente se aplana un poco a partir de $|\omega_1|$, pasando a ser de $-20dB/dec$, para luego llegar a a una banda plana a partir de ω_2. Para el caso de la fase, en baja frecuencia tenemos una fase de 0^o. Para ajustar bien cómo sigue la fase, usamos el hecho de que al ser raíces simples, sus términos asociados solamente pueden aportar $\pm 90^o$, por lo que descartamos transiciones de fase mayores a ese rango (*camino corto*). Entonces, la fase comienza como un número positivo, luego se acerca a un número imaginario con parte imaginaria positiva y vuelve a un número real positivo en alta frecuencia.

La siguiente figura muestra los diagramas de Bode reales y asintóticos de H. Se muestran también los valores exactos en las frecuencias críticas y en ω_0.



(f) En los diagramas anteriores, ubicar el valor exacto de H en la frecuencia ω_0.

Ya habíamos visto que $H(j\omega_0) = 2 + j$, lo que da un módulo de $\sqrt{5}$, que correponde a unos $7dB$ y una fase de 27^o.

(g) Hallar la respuesta completa a un escalón de amplitud E.

La respuesta a una entrada de tipo escalón de amplitud E será, en Laplace:

$$V_o(s) = H(s).\frac{E}{s} = \frac{s^2 - \omega_0 s - \omega_0^2}{s^2}.\frac{E}{s} = \frac{E}{s} - \frac{E\omega_0}{s^2} - \frac{E\omega_0^2}{s^3}$$

$$\Rightarrow v_o(t) = Y(t).E - Y(t).E\omega_0.t - Y(t)E\omega_0^2.\frac{t^2}{2}$$