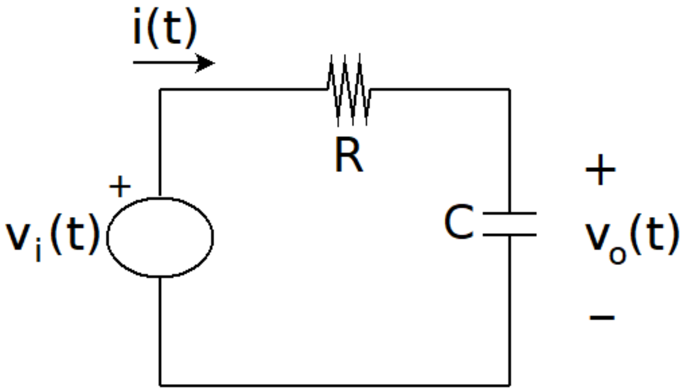
Teoría de Circuitos

Examen de febrero de 2024

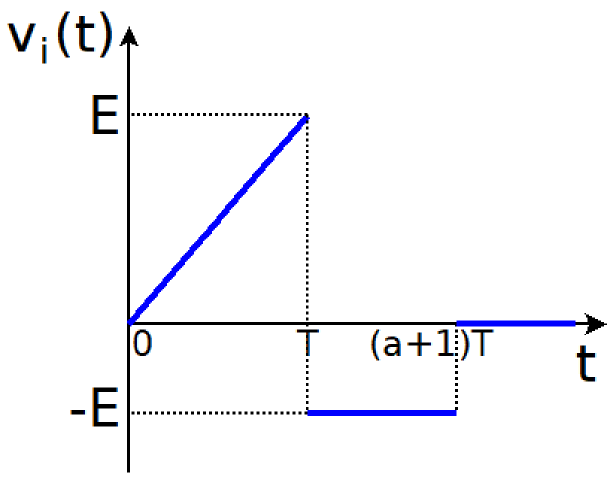
Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con el condensador inicialmente descargado. Se define la pulsación auxiliar $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.



(a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.



(b) Se inyecta al circuito la señal de la figura. Se cumple la relación $\omega_0 T = 2$. Se pide **hallar** y **bosquejar** la respuesta temporal del circuito hasta $t = (a+1)T$, haciendo un análisis por tramos.

i) Analizar el tramo $[0, T]$, explicando claramente cómo se trabaja.

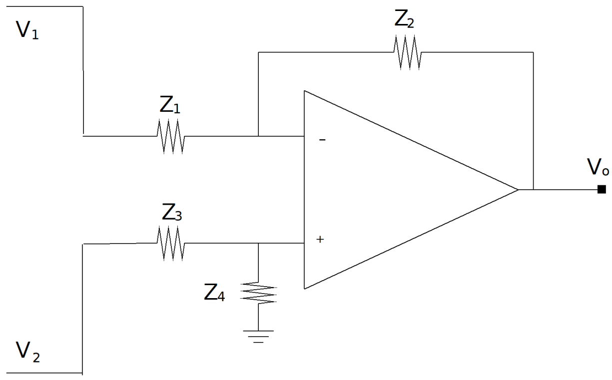
ii) Analizar el tramo $[T, (a+1)T]$, explicando claramente cómo se trabaja.

iii) Hallar la tensión en bornes del condensador para $t = (a+1)T$.

(c) Se aplica ahora la señal de la figura, periodizada con periodo $(a+1)T$. **Hallar la ecuación que debe cumplir** el parámetro a para que el circuito esté en régimen periódico desde que arranca (es decir, desde $t = 0$).

Problema 2

En los siguientes circuitos los operacionales son ideales y todas las tensiones están referidas a tierra.



(a) En el circuito de arriba, hallar la relación entre $V_o(s)$, $V_1(s)$ y $V_2(s)$.

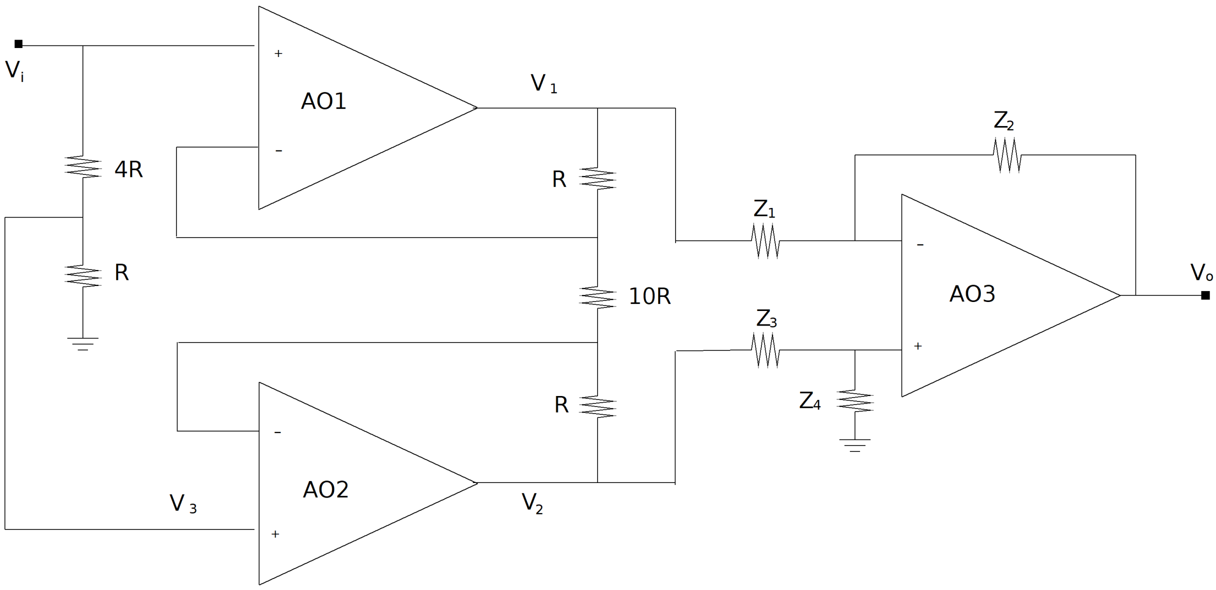
A partir de ahora: $Z_1 = Z_2 = Z_3 = R$, $Z_4 = Ls$. Se define $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

(b) Simplificar la expresión hallada en la parte a).

(c) En el circuito de abajo,

i) Hallar la relación proporcional que existe entre V_1 y V_2.

ii) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$. Mostrar que se tiene $H(s) = -K.\frac{s+\alpha.\omega_0}{s+\omega_0}$, con K y α positivos y α mayor que 1.



(d) Deducir, explicando, los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$.

(e) Hallar la expresión exacta de la **respuesta en régimen** del sistema cuando la entrada es $v_i(t) = E\cos(2\omega_0 t)$. (Verificar la coherencia con los diagramas asintóticos hallados antes).

(f) ¿Existe una frecuencia de trabajo $\tilde{\omega}$ para la cual el desfasaje entre la entrada y la respuesta en régimen sea 90^o?

Teoría de Circuitos

Examen de febrero de 2024

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Se considera un circuito lineal, con tensión de entrada $v_i(t)$, tensión de salida $v_o(t)$ y transferencia en régimen

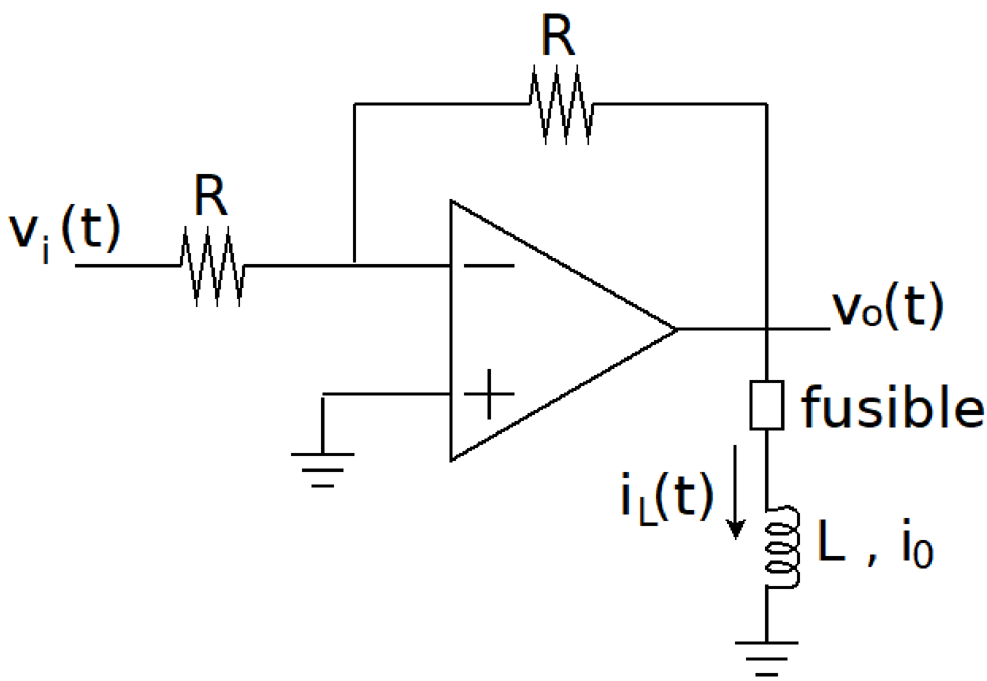
$$H(j\omega) = \frac{10\omega_0 - j\omega}{j\omega + \omega_0}$$

(a) Mostrar que existe una frecuencia de trabajo $\tilde{\omega}$ a la cual el circuito introduce un retraso de $\frac{\pi}{2}$ y **hallarla**.
Sugerencia: escribir $\tilde{\omega} = k.\omega_0$ y hallar k igualando $H(j\tilde{\omega})$ a un número imaginario puro.

(b) Hallar la expresión exacta de la **respuesta en régimen** si $v_i(t) = E\cos(\tilde{\omega}t)$.

Pregunta 2

Se considera el siguiente circuito. El amplificador operacional es ideal, el fusible tiene una corriente de apertura i_{MAX}, la tensión de entrada es $v_i(t) = -Y(t).E$ y la inductancia tiene un dato previo $i_0 = \frac{E}{R}$.



(a) Hallar $i_L(t)$ para todo instante positivo, asumiendo que el fusible no se corta.

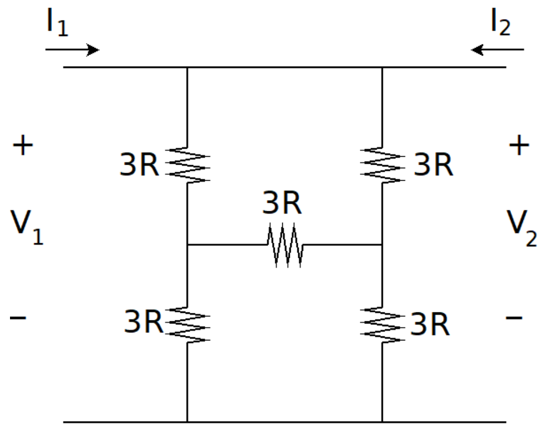
(b) Si $i_{MAX} = 2\frac{E}{R}$, hallar el instante T en el que se abre el fusible.

Pregunta 3

Mostrar que en un sistema trifásico equilibrado la potencia trifásica instantánea que se transmite desde la fuente a la carga es constante.

Recordar que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$.

Pregunta 4



Se considera el cuadripolo del circuito de la figura, del cual **se sabe que es recíproco y simétrico**.

(a) Identificar una estrella o un triángulo de resistencias idénticas y transfigurarlo.

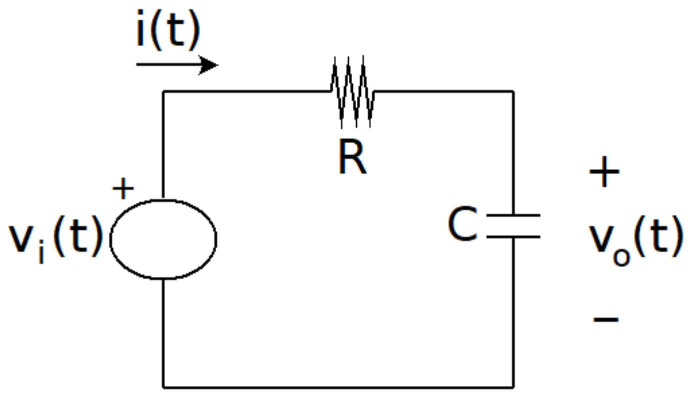
(b) Hallar las impedancias de vacío.

Justificar claramente cómo analiza el circuito.

Solución

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con el condensador inicialmente descargado. Se define la pulsación auxiliar $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.



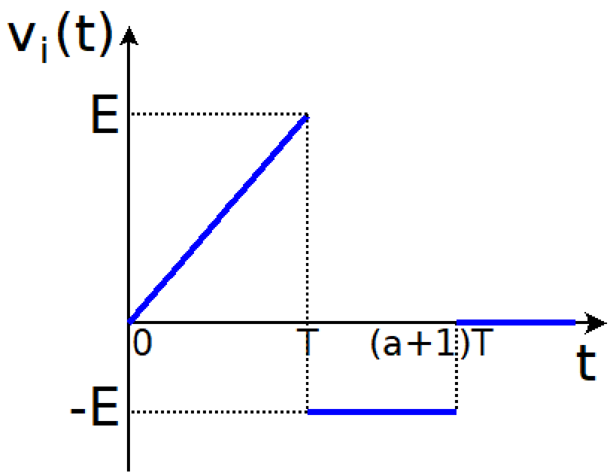
(a) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

Pasando al circuito equivalente en Laplace, y asumiendo el condensador con dato previo nulo, tenemos el mismo circuito, con las respectivas impedancias. Aplicando divisor de tensión,

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}.V_i(s) = \frac{1}{RCs + 1}.V_i(s)$$

Entonces,

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$



(b) Se inyecta al circuito la señal de la figura. Se cumple la relación $\omega_0 T = 2$. Se pide **hallar** y **bosquejar** la respuesta temporal del circuito hasta $t = (a+1)T$, haciendo un análisis por tramos.

i) Analizar el tramo $[0, T]$, explicando claramente cómo trabaja.

En este tramo, podemos considerar que la entrada es una rampa de pendiente $\frac{E}{T}$. La respuesta que hallemos será válida solamente en el tramo, es decir, hasta $t = T$. Al tener dato previo nulo, podemos usar directamente la transferencia hallada en la parte anterior:

$$V_o(s) = H(s).V_i(s)$$

Sabemos que $V_i(s) = \mathcal{L}[v_i(t)](s) = \frac{E}{Ts^2}$. Entonces

$$V_o(s) = \frac{E}{Ts^2}.\frac{\omega_0}{s+\omega_0}$$

Para pasar al tiempo, hacemos *fracciones simples*. Notemos que en el numerador hay una raíz doble, por lo que hay que tener cierto cuidado:

$$V_o(s) = \frac{E\omega_0}{T}.\left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+\omega_0}\right]$$

A y C salen directo por *tapadita*. Para hallar B, hacemos cmún denominador. Esta idea sirve también, por supuesto, para hallar A, B y C juntos, por lo que lo hacemos así:

$$\frac{1}{s^2(s+\omega_0)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+\omega_0} = \frac{A.(s+\omega_0) + B.s.(s+\omega_0) + C.s^2}{s^2(s+\omega_0)}$$

Entonces

$$\frac{1}{s^2(s+\omega_0)} = \frac{(B+C).s^2 + (A+B\omega_0).s + (A\omega_0)}{s^2(s+\omega_0)}$$

Identificando lo scoeficientes de los polinomios del numerador, obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{ccc} B+C & = & 0 \\ A+B\omega_0 & = & 0 \\ A\omega_0 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} A & = & \frac{1}{\omega_0} \\ B & = & -\frac{1}{\omega_0^2} \\ C & = & \frac{1}{\omega_0^2} \end{array}\right.$$

(Se sugiere verificar que A y C salen también por tapadita).

Entonces

$$V_o(s) = \frac{E\omega_0}{T}.\left[\frac{\frac{1}{\omega_0}}{s^2} - \frac{\frac{1}{\omega_0^2}}{s} + \frac{\frac{1}{\omega_0^2}}{s+\omega_0}\right] = \frac{E}{Ts^2} + \frac{E}{\omega_0 T}\left[\frac{1}{s+\omega_0} - \frac{1}{s}\right]$$

Pasando al tiempo:

$$v_o(t) = Y(t)\frac{E}{T}t + Y(t).\frac{E}{\omega_0 T}\left[e^{-\omega_0 t} - 1\right]$$

Esta expresión es válida hasta $t = T$. A partir de allí analizaremos un nuevo tramo. Teniendo en cuenta que $\omega_0 T = 2$, el *dato previo* del condensador en ese nuevo tramo estará dado por

$$v_{C0} = v_o(t=T) = \frac{E}{T}.T + Y(t).\frac{E}{\omega_0 T}\left[e^{-\omega_0 T} - 1\right] = E + \frac{E}{2}.\left[e^{-2} - 1\right] = \left(\frac{1+e^{-2}}{2}\right).E$$

ii) Analizar el tramo $[T, (a+1)T]$, explicando claramente cómo trabaja.

Consideramos ahora el siguiente tramo. Para hacer el análisis, definimos un nuevo origen de tiempo $t' = 0$, que corresponde a $t' = t - T$. Tenemos un dato previo no nulo en el condensador, de valor v_{C0}, y para ver bien qué entrada afecta al circuito en este tramo, *eliminamos* el pasado, respecto de $t' = 0$. La entrada resulta ser un escalón de amplitud $-E$. Al pasar al circuito equivalente en Laplace, tenemos que $V_i(s) = -\frac{E}{s}$ y una segunda fuente, asociada al dato previo, de valor $\frac{v_{C0}}{s}$ y con polaridad opuesta a la de la entrada. Podemos resolver el circuito con las dos fuentes independientes o aplicar superposición. Haremos esto último. La respuesta tendrá entonces dos componentes. La primera, considerando dato previo nulo, se obtiene de forma similar a la parte anterior, usando la transferencia. La segunda, anulando la entrada, es la descarga del condensador:

$$V_o(s) = \left[\frac{-E\omega_0}{s(s+\omega_0)}\right] + \left[\frac{v_{C0}}{s} - \frac{v_{C0}.\omega_0}{s(s+\omega_0)}\right] = -E\omega_0.\left[\frac{\frac{1}{\omega_0}}{s} - \frac{\frac{1}{\omega_0}}{s+\omega_0}\right] + \frac{v_{C0}}{s+\omega_0}$$

Pasando al tiempo:

$$v_o(t') = -Y(t').E\left[1 - e^{-\omega_0 t'}\right] + Y(t').v_{C0}e^{\omega_0 t'}$$

Observemos que la tensión en el condensador queda continua al cambiar de tramo

$$v_o(t' = 0) = v_{C0}$$

Esto es correcto porque si no fuera así, habría una δ de Dirac de corriente (y por lo tanto de tensión) por la resistencia R, que estaría asociada a una potencia infinita disipada en la resistencia, lo cual no puede suceder, ya que nadie en el circuito puede entregar esa potencia.

iii) Hallar la tensión en bornes del condensador para $t = (a + 1)T$.

Evaluamos la expresión obtenida anteriormente en el instante $t' = aT$, que corresponde a $t = (a + 1)T$:

$$v_{C1} = v_o(t' = aT) = -E\left[1 - e^{-\omega_0 aT}\right] + v_{C0}e^{-\omega_0 aT} = -E\left[1 - e^{-2a}\right] + v_{C0}e^{-2a}$$

Observemos que, dependiendo de a, este valor puede ser positivo o negativo, ya que la respuesta en el segundo tramo arranca en un valor positivo y tiende a $-E$.

Queda pendiente bosquejar la respuesta temporal completa, que se deja como ejercicio. La respuesta será positiva y creciente en el primer tramo, en tanto en el segundo tramo decrecerá exponencialmente hacia el valor $-E$, siendo válida hasta $t = (a + 1)T$.

(c) Se aplica ahora la señal de la figura, periodizada con periodo $(a + 1)T$. **Hallar la ecuación que debe cumplir** a para que el circuito esté en régimen periódico desde que arranca.

Para que el circuito ya arranque en régimen, se tiene que cumplir que al final del primer periodo, las condiciones del circuito sean iguales que al comienzo del periodo. Como la entrada se repite, por ser periódica, basta imponer que el dato previo al comienzo del primer periodo, el dato en 0^-, coincida con el dato previo al comienzo del segundo periodo, el valor en $(a + 1)T^-$. Como en 0^- el dato previo es nulo (condensador inicialmente descargado), y de acuerdo con lo analizado en la parte anterior, se debe cumplir que

$$v_{C1} = 0 = -E\left[1 - e^{-2a}\right] + v_{C0}e^{-2a} = -E\left[1 - e^{-2a}\right] + \left(\frac{1 + e^{-2}}{2}\right).E.e^{-2a}$$

$$0 = -1 + e^{-2a} + \frac{e^{-2a}}{2} + \frac{e^{-2(1+a)}}{2} = -1 + e^{-2a}.\left[\frac{3 + e^{-2}}{2}\right]$$

Esta es la ecuación que debe cumplir a para que el circuito arranque en régimen. Se puede resolver, haciendo:

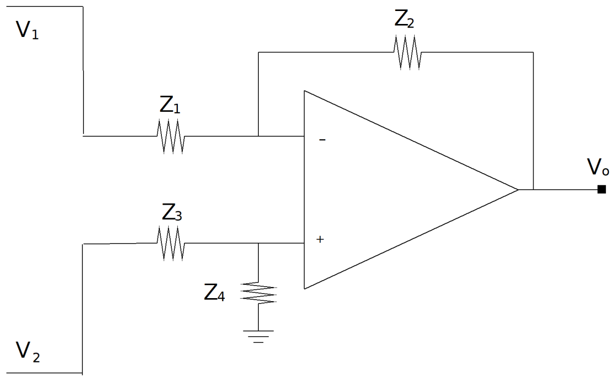
$$1 = e^{-2a}.\left[\frac{3 + e^{-2}}{2}\right] \Rightarrow e^{2a} = \left[\frac{3 + e^{-2}}{2}\right] \Rightarrow 2a = \log\left[\frac{3 + e^{-2}}{2}\right]$$

De donde

$$a = \log\left[\sqrt{\frac{3 + e^{-2}}{2}}\right]$$

Problema 2

En los siguientes circuitos los operacionales son ideales y todas las tensiones están referidas a tierra.



(a) En el circuito de arriba, hallar la relación entre $V_o(s)$, $V_1(s)$ y $V_2(s)$.

Como el operacional está en zona lineal y tiene ganancia infinita, tenemos el cortocircuito virtual de las patas de entrada. Además, por la resistencia infinita, no entra corriente por las patas de entrada. Entonces:

$$\frac{V_1 - e^-}{Z_1} = \frac{e^- - V_o}{Z_2} \Rightarrow e^- \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right] = e^- \left[\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2}\right] = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_o}{Z_2}$$

$$\Rightarrow e^- = \left[\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\right] V_1 + \left[\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\right] V_o$$

Por otro lado:

$$e^+ = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} V_2$$

De donde

$$\left[\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}\right] V_2 = \left[\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\right] V_1 + \left[\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\right] V_o \Rightarrow \left[\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\right] V_o = -\left[\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\right] V_1 + \left[\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}\right] V_2$$

$$V_o = -\left[\frac{Z_2}{Z_1}\right] V_1 + \left[\frac{Z_4(Z_1 + Z_2)}{Z_1(Z_3 + Z_4)}\right] V_2$$

Se podría haber hallado la relación aplicando superposición, de decir, considerando V_1 y V_2 de a uno por vez. Cuando $V_2 = 0$ es nulo, el circuito que procesa a V_1 es una configuración inversora, de ganancia $-\frac{Z_2}{Z_1}$, ya que la pata $+$ queda a tierra. Cuando anulamos V_1, Tenemos una configuración no inversora, de ganancia $\frac{Z_1+Z_2}{Z_1} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$, que propaga el valor de e^+ hacia la salida.

A partir de ahora: $Z_1 = Z_2 = Z_3 = R$**,** $Z_4 = Ls$. Se define $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

(b) Simplificar la expresión hallada en la parte a).

$$V_o = -\left[\frac{R}{R}\right] .V_1 + \left[\frac{Ls(R + R)}{R(R + Ls)}\right] .V_2 = -V_1 + \left[\frac{2Ls}{R + Ls}\right] .V_2 = -V_1 + \left[\frac{2s}{s + \omega_0}\right] .V_2$$

(c) En el circuito de abajo,

i) Hallar la relación proporcional que existe entre V_1 y V_2.

Observemos que

$$V_3 = V_i \frac{R}{4R + R} = \frac{1}{5} V_i$$

Usando el cortocircuito virtual, propagamos V_i y V_3 en el circuito. Obervemos que por las resistencias verticales circula la misma corriente. Entonces

$$\frac{V_1 - V_i}{R} = \frac{V_i - V_3}{10R} = \frac{V_i - \frac{V_i}{5}}{10R} \Rightarrow V_1 - V_i = \frac{\frac{4}{5}}{10}V_i = \frac{2}{25}V_i \Rightarrow V_1 = \left[1 + \frac{2}{25}\right]V_i = \frac{27}{25}V_i$$

De la misma forma

$$\frac{V_i - V_3}{10R} = \frac{V_3 - V_2}{R} \Rightarrow \frac{V_i - \frac{V_i}{5}}{10} = \frac{V_i}{5} - V_2 \Rightarrow V_2 = V_i\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{50}\right] = V_i\left[\frac{10-5+1}{50}\right] = V_i\left[\frac{6}{50}\right]$$

De donde

$$V_2 = \frac{3}{25}V_i$$

Entonces

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{27}{25}} = \frac{1}{9} \Rightarrow V_2 = \frac{V_1}{9}$$

ii) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$. Mostrar que se tiene $H(s) = -K.\frac{s+\alpha.\omega_0}{s+\omega_0}$, con K y α positivos y α mayor que 1.

Sabemos que

$$V_o = -V_1 + \left[\frac{2s}{s+\omega_0}\right]V_2 = \left[-1 + \frac{1}{9}\left(\frac{2s}{s+\omega_0}\right)\right]V_1 = \left[\frac{-s-\omega_0+\frac{2}{9}s}{s+\omega_0}\right]V_1 = -\frac{\frac{7}{9}s+\omega_0}{s+\omega_0}.V_1$$

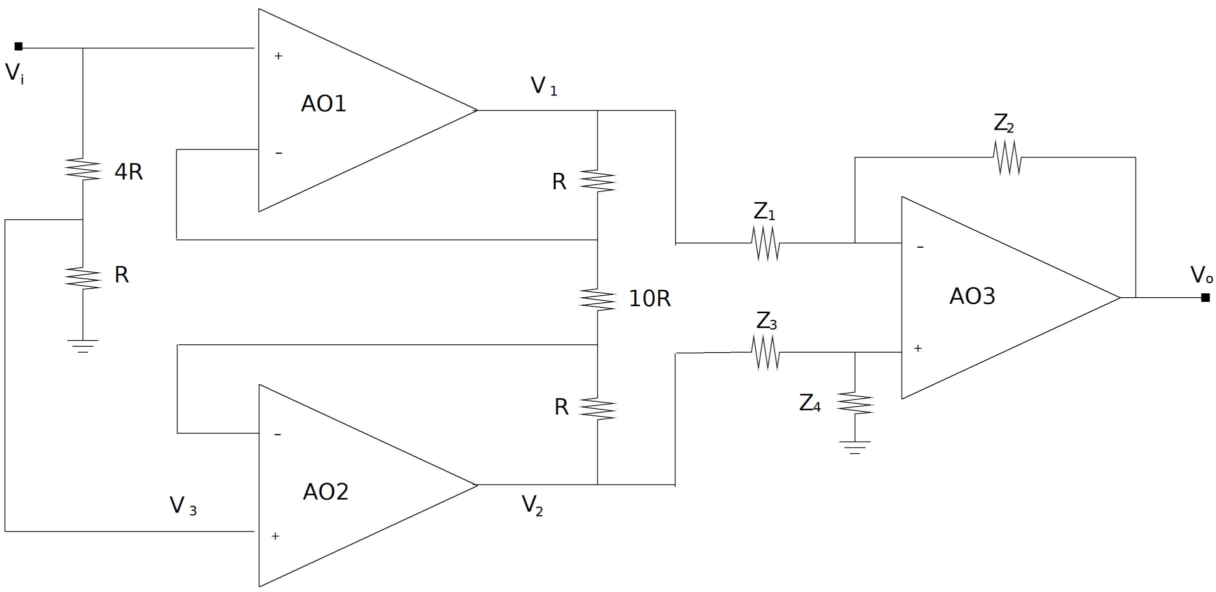
Entonces

$$V_o = -\frac{\frac{7}{9}s+\omega_0}{s+\omega_0}.\frac{27}{25}.V_i = -\frac{27}{25}.\frac{7}{9}.\frac{s+\frac{9}{7}\omega_0}{s+\omega_0}V_i = -\frac{21}{25}.\frac{s+\frac{9}{7}\omega_0}{s+\omega_0}.V_i$$

Despejando, obtenemos la transferencia:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{21}{25}.\frac{s+\frac{9}{7}\omega_0}{s+\omega_0} = K.\frac{s+\alpha.\omega_0}{s+\omega_0}$$

con $\alpha = \frac{9}{7}$ y $K = \frac{21}{25}$.



(d) Deducir, explicando, los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$.

Consideremos la transferencia, evaluada en $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = -K.\frac{j\omega + \alpha\omega_0}{j\omega + \omega_0}$$

Hacemos un análisis por bandas. Tengamos presente que vamos a analizar la respuesta en frecuencia considerando solamente ω positivo, ya que para los valores negativos, tenemos el mismo módulo, con fase opuesta. Para definir las bandas de análisis, tenemos que encontrar las frecuencias críticas, es decir, las raíces del numerador y del denominador de $H(j\omega)$, y ordenarlas por módulo creciente, para luego ir moviendo ω desde la continua hasta infinito.

En este caso, tenemos dos raíces: $-\omega_0$ en el denominador y $-\alpha\omega_0$ en el numerador. Tendremos entonces tres bandas.

Entonces tenemos tres bandas:

$$\omega \ll \omega_0$$

$$\omega_0 \ll \omega \ll \alpha\omega_0$$

$$\omega \gg \alpha\omega_0$$

Notemos que como las raíces están muy próximas entre sı, la aproximación asintótica en la banda central será muy mala.

En cada banda hacemos la aproximación asintótica. Al ser raíces simples, aproximamos o bien por la parte real, o bien por la parte imaginaria.

Entonces:

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx -K.\frac{\alpha\omega_0}{\omega_0} = -\alpha K = -\frac{27}{25} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(27/25)\,dB \\ arg(H) & \approx & 180^o \end{cases}$$

El argumento de H siempre está definido a menos de traslaciones múltiplos de 2π. En baja frecuencia anclamos el diagrama a una determinada fase inicial, consistente con el análisis. En este caso, como en baja frecuencia tenemos un número negativo, elegimos la fase 180^o (también podríamos elegir -180^o).

$$\omega_0 \ll \omega \ll \alpha\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx -K.\frac{\alpha\omega_0}{j\omega} = -\frac{\alpha K\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(\alpha K\omega_0)\,dB - 20\log(\omega)\,dB \\ arg(H) & \approx & +90^o\ (\acute{o} - 270^o) \end{cases}$$

$$\alpha\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx -K.\frac{j\omega}{j\omega} = -K \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(21/25)\,dB \\ arg(H) & \approx & \pm 180^o \end{cases}$$

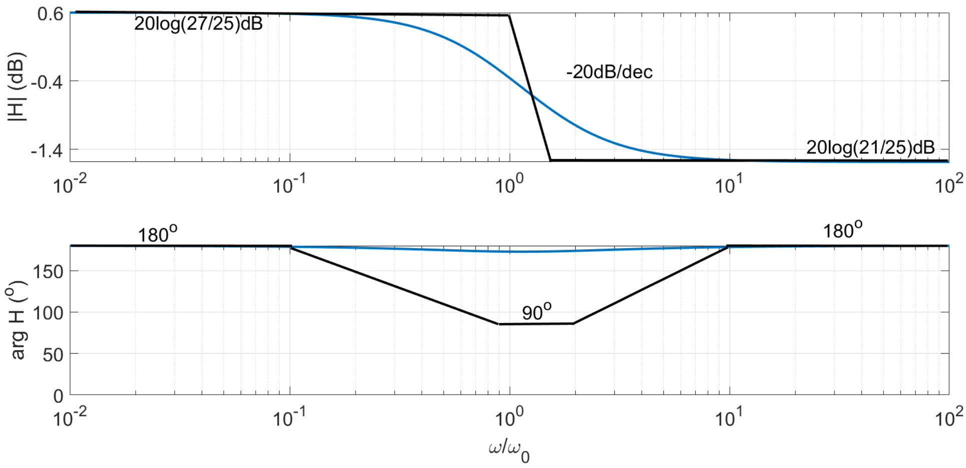
Desde el punto de vista del módulo, tenemos una respuesta plana en baja frecuencia, luego una banda intermedia con una caída de $-20dB/dec$ y finalmente una banda de alta recuencia nuevamente plana. Para el caso de la fase, en baja frecuencia tenemos una fase de 180^o. Para ajustar bien cómo sigue la fase, usamos el hecho de que al ser raíces simples, sus términos asociados solamente pueden aportar $\pm 90^o$, por lo que descartamos transiciones de fase mayores a ese rango (*camino corto*). Entonces, la fase comienza como un número negativo y luego se acerca a un número imaginario positivo y vuelve a un número real negativo.

La siguiente figura resume el análisis asintótico. También se muestran en azul los diagramas reales. Hay que tener presente que el diagrama de fase lo dibujamos continuo, para reflejar lo que pasa en la realidad[a]

(e) Hallar la expresión exacta de la **respuesta en régimen** del sistema cuando la entrada es $v_i(t) = E\cos(2\omega_0 t)$. (Verificar la coherencia con los diagramas asintóticos hallados antes).

Sabemos que antes una entrada sinusoidal pura, el circuito responde en régimen con una sinusoide de la misma frecuencia, con una amplitud igual a la original multiplicada por el módulo de la transferencia evaluada en la frecuencia de trabajo y con un desfasaje dado por

[a] El diagrama de fase es discontinuo solamente cuando hay raíces del numerador o del denominador imaginarias puras, que corresponde al caso de términos de segundo orden con $\zeta = 0$.



el argumento de la transferencia evaluada en la frecuencia de trabajo. Entonces, tenemos que hallar el módulo y la fase de $H(j2\omega_0)$.

$$H(j2\omega_0) = -K.\frac{j2\omega_0 + \alpha\omega_0}{j2\omega_0 + \omega_0} = -K.\frac{2j + \alpha}{2j + 1} \approx 0{,}89\angle 174^o \approx 0{,}89\angle 3$$

Entonces, la respuesta en régimen será:

$$v_{o,reg}(t) \approx 0{,}89E\cos\left(2\omega_0 t + 174^o\right)$$