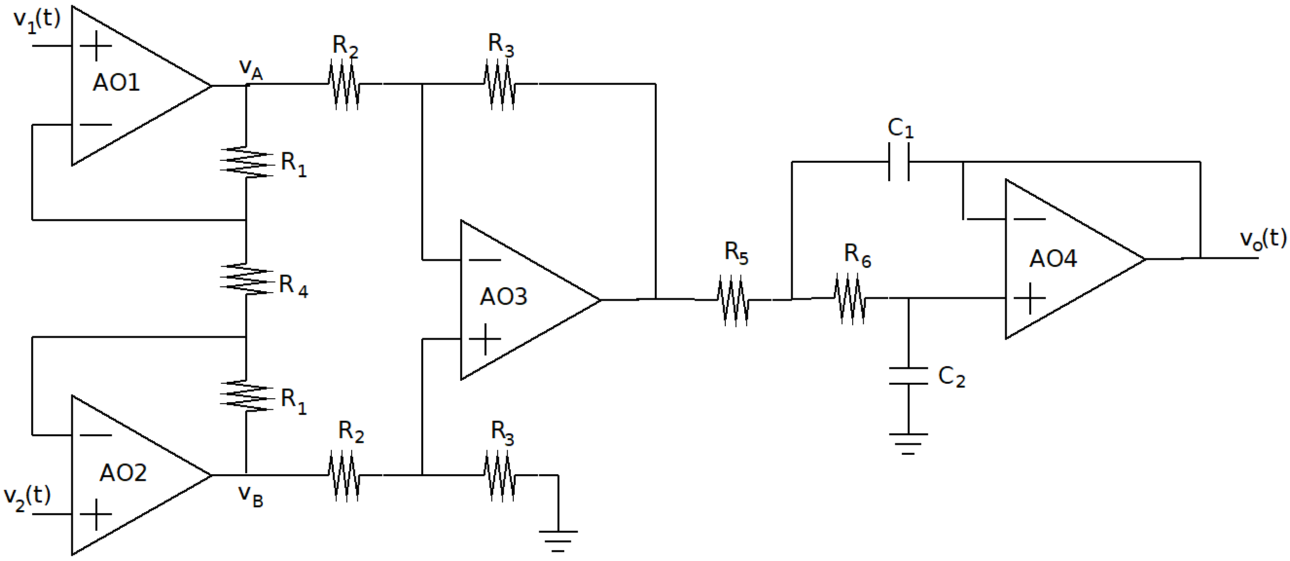
Teoría de Circuitos

Examen de febrero de 2023

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales, funcionando en zona lineal, y las tensiones medidas respecto de tierra.



(a) i) Identificar el amplificador de instrumentación y denotar su salida como v_3.

ii) Se sabe que

$$v_A = v_1 + \frac{R_1}{R_4}(v_1 - v_2) \quad , \quad v_B = v_2 - \frac{R_1}{R_4}(v_1 - v_2)$$

Hallar la expresión de v_3 en función de v_1 y v_2.

(b) i) Hallar la transferencia $H(s)$ entre $V_3(s)$ y $V_o(s)$.

ii) Mostrar que definiendo la pulsación $\omega_0 = \frac{1}{R_5 C_1}$ y sabiendo que $C_1 = C_2$ y $R_5 = 10R_6$, se tiene

$$H(s) = \frac{10\omega_0^2}{s^2 + 11\omega_0 s + 10\omega_0^2}$$

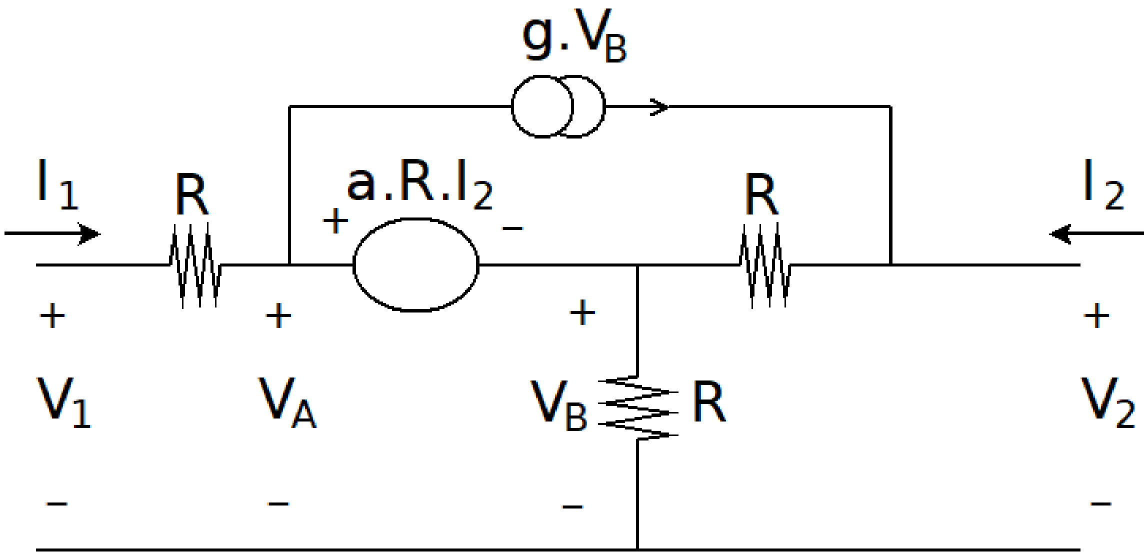
iii) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(s)$.

(c) Hallar la expresión temporal de v_o en régimen, cuando

$$v_1(t) = 1 + \cos(10\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) - \sin(100\omega_0 t)$$

$$v_2(t) = 1 + \cos(10\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t) + \sin(100\omega_0 t)$$

Problema 2



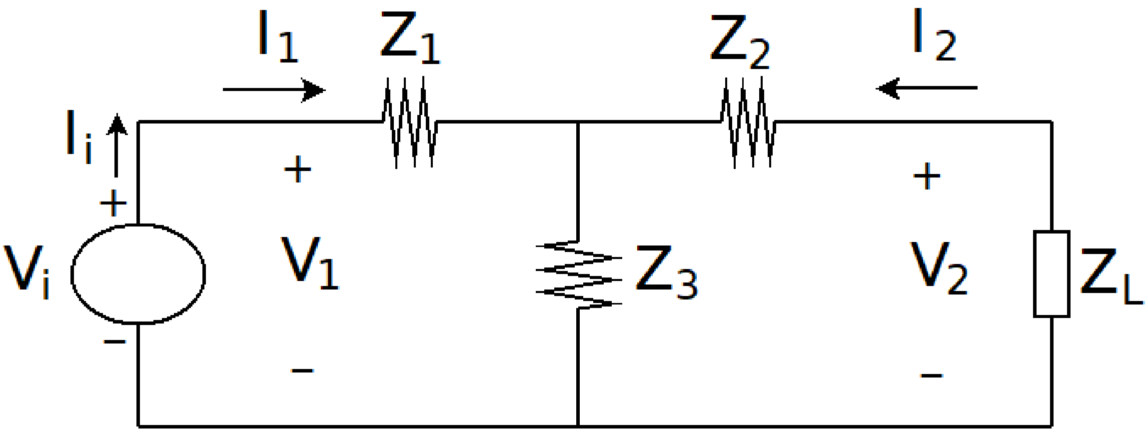
Se considera el cuadripolo de la figura, con a y g positivos, de dimensiones adecuadas.

(a) i) Mostrar que $V_B = R(I_1 + I_2)$ y $V_A = RI_1 + (1+a)Ri_2$.

ii) Hallar las impedancias de vacío.

(b) Hallar g para que el cuadripolo sea recíproco.

(c) En la figura se representa el cuadripolo recíproco por su equivalente T, **trabajando en régimen sinusoidal, a pulsación** ω_0. Se sabe que $a = 1/2$. Se carga el cuadripolo con una inductancia $L = \frac{R}{\omega_0}$, de impedancia asociada Z_L.



i) Hallar Z_1, Z_2 y Z_3.

ii) Hallar la potencia activa y reactiva consumidas a la fuente.

iii) Compensar la potencia reactiva, indicando qué elemento colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Teoría de Circuitos

Examen de febrero de 2023

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

a) Mostrar en forma analítica que la suma de tres fasores de idéntico tamaño, que están desfasados 120 grados entre sí, es nula.

b) Se considera un sistema de fuentes trifásico, equilibrado y perfecto. Mostrar que para una carga equilibrada, la potencia trifásica instantánea que entrega el sistema de fuentes es constante.

Pregunta 2

Se considera la transferencia en régimen

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

con $0 \leq \zeta \leq 1$ y ω_n positivo.

a) Hallar la expresión genérica de la respuesta en régimen para la entrada $v_i(t) = A.\cos\left(\frac{\omega_n}{2}t\right)$.

b) Hallar ζ para que dicha respuesta en régimen presente una ganancia de $2dB$ respecto de la entrada.

Pregunta 3

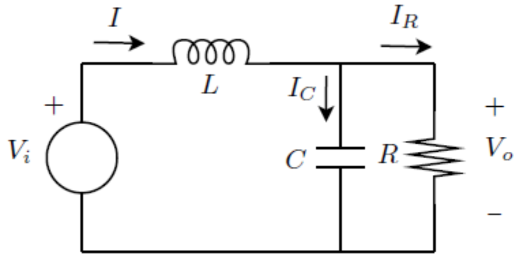
Para una línea sin pérdidas, la expresión

$$Z(d) = Z_0.\frac{Z_L + jZ_0\tan(\beta d)}{Z_0 + jZ_L\tan(\beta d)}$$

nos dice cómo se ve la impedancia de carga de la línea a una distancia d de su fin. A partir de ella, explicar en qué consiste un **transformador de cuarta longitud de onda** e indicar posibles aplicaciones.

Pregunta 4

Indicar cuál o cuáles de los siguientes diagramas fasoriales corresponden al circuito en régimen sinusoidal de la figura.
Para cada diagrama, explicar por qué corresponde o no corresponde.

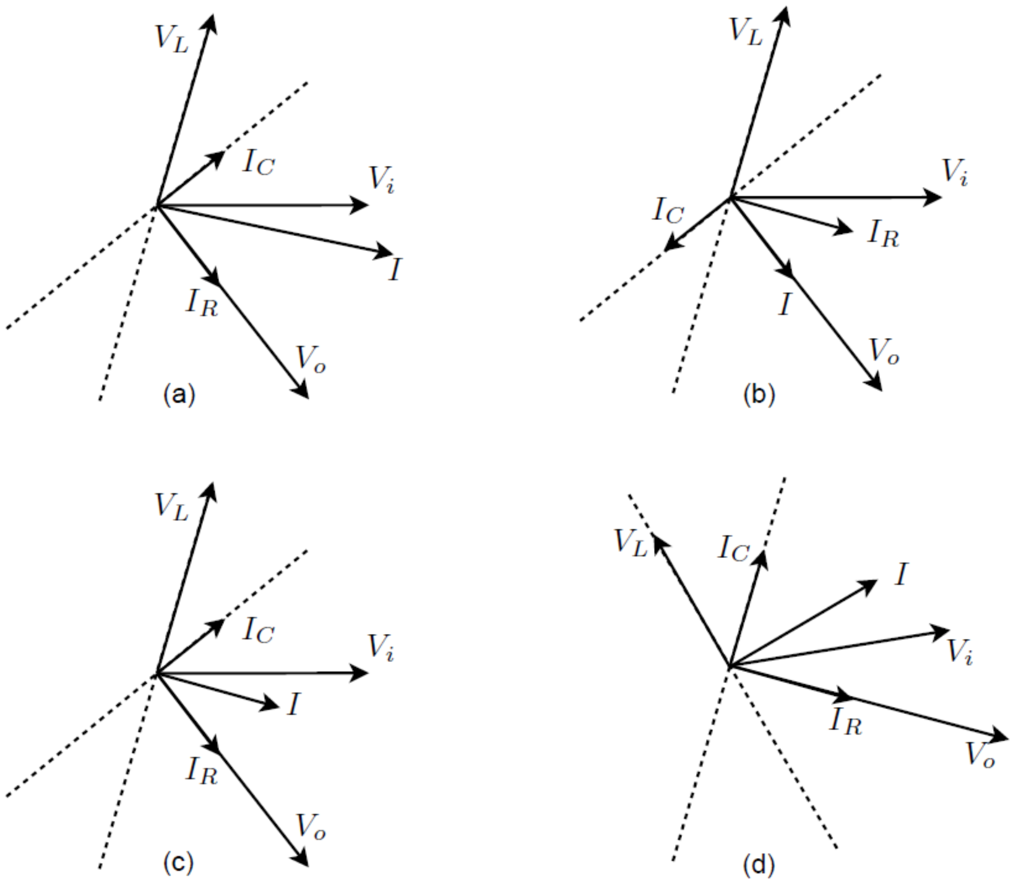


i) ¿El diagrama **(a)** puede corresponder al circuito? **Explicar por qué corresponde o no corresponde**.

ii) ¿El diagrama **(b)** puede corresponder al circuito? **Explicar por qué corresponde o no corresponde**.

iii) ¿El diagrama **(c)** puede corresponder al circuito? **Explicar por qué corresponde o no corresponde**.

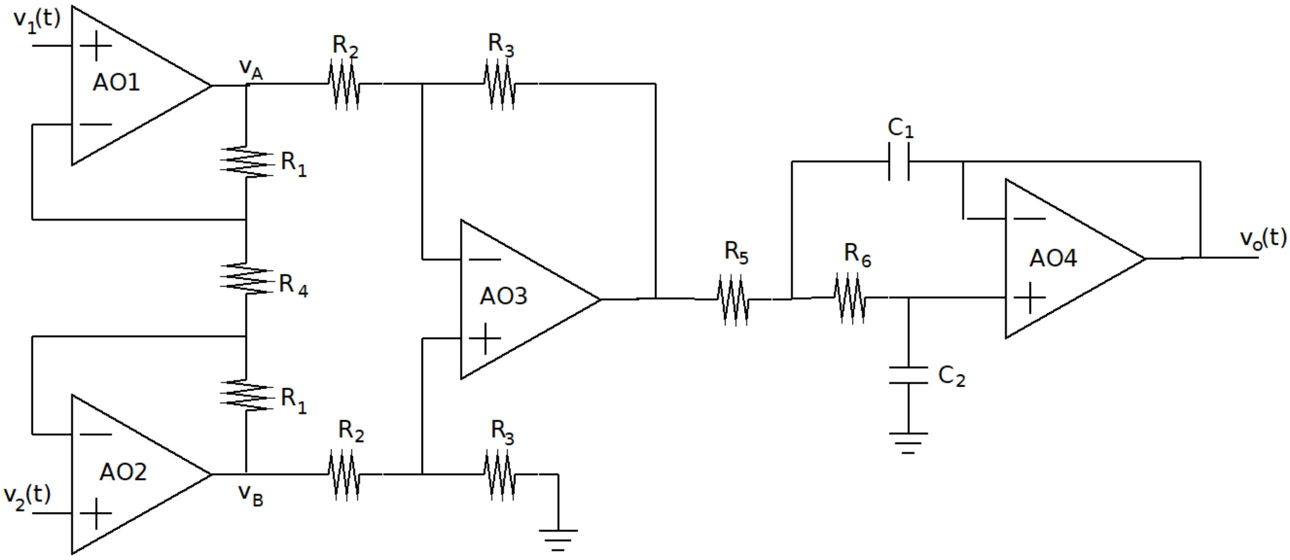
iv) ¿El diagrama **(d)** puede corresponder al circuito? **Explicar por qué corresponde o no corresponde**.



Solución

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales, funcionando en zona lineal, y las tensiones medidas respecto de tierra.



(a) i) Identificar el amplificador de instrumentación y denotar su salida como V_3.

El amplificador está conformado por una etapa de alta impedancia de entrada (idealmente infinita), que capta las señales V_1 y V_2 y las propaga hacia la etapa de ganancia conformada por un amplificador diferencial, con resistencias R_2 y R_3. Denotaremos por V_3 la salida del operacional del medio.

ii) Hallar la expresión de V_3 en función de V_1 y V_2.

Sea V_A la tensión a la izquierda de la resistencia R_2 de arriba y V_B la tensión a la izquierda de la resistencia R_2 de abajo (todas las tensiones medidas respecto de tierra). Al ser los operacionales ideales y estar en zona lineal, asumimos cortocircuito virtual (por la ganancia de entrada infinita) y que no entra corriente por las patas + y - (por la resistencia de entrada infinita).

Tenemos entonces que

$$\frac{V_A - V_1}{R_1} = \frac{V_1 - V_2}{R_4} = \frac{V_2 - V_B}{R_1}$$

De donde

$$V_A = V_1 + \frac{R_1}{R_4}(V_1 - V_2) \quad , \quad V_B = V_2 - \frac{R_1}{R_4}(V_1 - V_2)$$

Por otro lado, viendo las dos ramas de realimentación del operacional del medio,

$$\frac{V_A - e^-}{R_2} = \frac{e^- - V_3}{R_3} \Rightarrow e^- = \frac{R_3}{R_2 + R_3}.V_A + \frac{R_2}{R_2 + R_3}.V_3$$

(este despeje puede obtenerse directamente por cálculo, o combinando superposición con divisor de tensión). Por otro lado, aplicando divisor de tensión,

$$e^+ = \frac{R_3}{R_2 + R_3}.V_B$$

Como $e^+ = e^-$, podemos escribir

$$\frac{R_3}{R_2 + R_3}.V_B = \frac{R_3}{R_2 + R_3}.V_A + \frac{R_2}{R_2 + R_3}.V_3 \Rightarrow R_3(V_B - V_A) = R_2.V_3$$

De más arriba, sabemos que

$$V_A - V_B = \left(V_1 + \frac{R_1}{R_4}(V_1 - V_2)\right) - \left(V_2 - \frac{R_1}{R_4}(V_1 - V_2)\right) = \left(1 + 2\frac{R_1}{R_4}\right)(V_1 - V_2)$$

Finalmente,

$$\boxed{V_3 = \frac{R_3}{R_2}(V_B - V_A) = -\frac{R_3}{R_2}.\left(1 + 2\frac{R_1}{R_4}\right).(V_1 - V_2)}$$

(b) i) Hallar la transferencia entre $V_3(s)$ y $V_o(s)$.

Pasemos a Laplace, con datos previos nulos, ya que nos interesa la transferencia respecto de la entrada, y poniendo las impedancias asociadas a los condensadores. Denotemos por V_4 la tensión entre las resistencias R_5 y R_6. Entonces

$$\frac{V_3 - V_4}{R_5} = \frac{V_4}{R_6 + \frac{1}{C_2 s}} + (V_4 - V_o)C_1 s \Rightarrow \frac{V_3}{R_5} = V_4.\left[\frac{1}{R_5} + \frac{C_2 s}{1 + R_6 C_2 s} + C_1 s\right] - V_o C_1 s$$

$$\frac{V_3}{R_5} = V_4.\left[\frac{1 + R_6C_2s + R_5C_2s + R_5C_1s + R_5R_6C_1C_2s^2}{R_5(1 + R_6C_2s)}\right] - V_oC_1s$$

Operando, llegamos a

$$\frac{V_3}{R_5} = \left[\frac{1 + (R_5 + R_6)C_2s + R_5C_1s + R_5R_6C_1C_2s^2}{R_5(1 + R_6C_2s)}\right]V_4 - V_o\frac{R_5C_1s}{R_5}$$

Por otro lado, por divisor de tensión:

$$V_o = \frac{\frac{1}{C_2 s}}{R_6 + \frac{1}{C_2 s}}.V_4 = \frac{1}{1 + R_6C_2s}.V_4 \Rightarrow V_4 = (1 + R_6C_2s).V_o$$

Entonces

$$\frac{V_3}{R_5} = \left[\frac{1 + (R_5 + R_6)C_2s + R_5C_1s + R_5R_6C_1C_2s^2}{R_5}\right]V_o - V_o\frac{R_5C_1s}{R_5}$$

$$V_3 = \left[1 + (R_5 + R_6)C_2s + R_5C_1s + R_5R_6C_1C_2s^2 - R_5C_1s\right]V_o$$

Finalmente

$$H(s) = \frac{V_o}{V_3} = \frac{1}{1 + (R_5 + R_6)C_2s + R_5R_6C_1C_2s^2} \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{\frac{1}{R_5R_6C_1C_2}}{s^2 + \frac{(R_5+R_6)C_2}{R_5R_6C_1C_2}s + \frac{1}{R_5R_6C_1C_2}}}$$

ii) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(s)$, definiendo la pulsación $\omega_0 = \frac{1}{R_5C_1}$ y sabiendo que

$$C_1 = C_2 \quad , \quad R_5 = 10R_6$$

Con estos datos:

$$\frac{1}{R_5R_6C_1C_2} = \frac{10}{R_5^2C_1^2} = 10\omega_0^2$$

$$\frac{(R_5 + R_6)C_2}{R_5R_6C_1C_2} = \frac{(R_5 + \frac{R_5}{10})C_1}{\frac{R_5^2}{10}C_1^2} = \frac{11R_5C_1}{R_5^2C_1^2} = 11\omega_0$$

por lo que

$$H(s) = \frac{10\omega_0^2}{s^2 + 11\omega_0 s + 10\omega_0^2} = \frac{10\omega_0^2}{(s + \omega_0)(s + 10\omega_0)}$$

En primer lugar, ya tenemos identificadas las frecuencias críticas: ω_0 y $10\omega_0$, que están separadas una década. Evaluamos en $j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{10\omega_0^2}{(j\omega + \omega_0)(j\omega + 10\omega_0)}$$

Notar que por más que es una transferencia de segundo orden, al tener dos raíces reales distintas, el análisis por bandas tendrá tres bandas.

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{10\omega_0^2}{(\omega_0)(10\omega_0)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 0\,dB \approx 9,54dB \\ arg(H) & \approx & 0^o \end{cases}$$

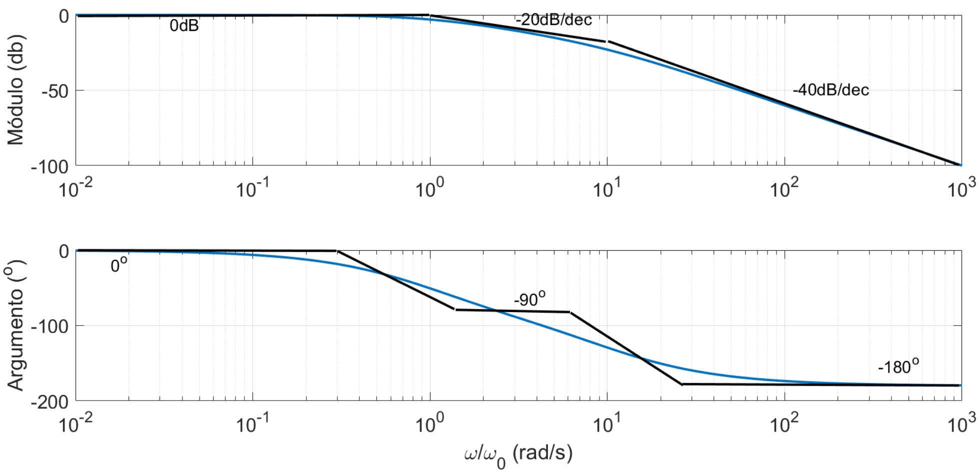
La fase en baja frecuencia la definimos consistente con la aproximación, y *anclará* el diagrama de fase que dibujaremos, ya que el argumento está definido a menos de traslaciones de 2π.

$$\omega_0 \ll \omega \ll 10\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{10\omega_0^2}{(j\omega)(10\omega_0)} = \frac{\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(\omega_0) - 20\log(\omega)\,dB \\ arg(H) & \approx & -90^o \text{ (ó } +270^o) \end{cases}$$

Como $-\omega_0$ es una raíz simple, sólo puede aportar una variación neta de 90 grados, por lo que descartamos los $+270$ grados.

$$10\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{10\omega_0^2}{(j\omega)(j\omega)} = -\frac{10\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(10\omega_0^2) - 40log(\omega)\,dB \\ arg(H) & \approx & \pm 180^o \end{cases}$$

Nuevamente, como $-10\omega_0$ es una raíz simple, sólo puede aportar una variación neta de 90 grados, por lo que descartamos los $+180$ grados. La siguiente figura muestra los diagramas de Bode asintóticos y reales.



(c) Hallar la expresión temporal de v_o en régimen, cuando

$$v_1(t) = Y(t).\left[1 + \cos(10\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) - \sin(100\omega_0 t)\right]$$

$$v_2(t) = Y(t).\left[1 + \cos(10\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t) + \sin(100\omega_0 t)\right]$$

En primer término, hallemos $v_3(t)$. Tenemos que

$$v_3(t) = -\frac{R_3}{R_2}\left(1 + 2\frac{R_1}{R_4}\right).(v_1(t) - v_2(t)) = -\frac{R_3}{R_2}\left(1 + 2\frac{R_1}{R_4}\right).Y(t),2.\left[\sin(\omega_0 t) - \sin(100\omega_0 t)\right]$$

Observemos que la *entrada diferencial* elimina la continua y también la señal de pulsación $10\omega_0$, presentes de igual manera en v_1 y v_2.

Sabemos que para una entrada sinusoidal genérica, de la forma $A.\cos(\tilde{\omega}t + \tilde{\varphi})$, el circuito de transferencia $H(s)$ responde en régimen con

$$A.|H(j\tilde{\omega})|.\cos\left(\tilde{\omega}t + \tilde{\varphi} + arg(H(j\tilde{\omega}))\right)$$

Juntemos esto con la linealidad del circuito y con las partes anteriores para hallar la salida en régimen.

$$v_o(t) = -2\frac{R_3}{R_2}\left(1 + 2\frac{R_1}{R_4}\right).\left[|H(j\omega_0)|\sin\left(\omega_0 t + arg(H(j\omega_0))\right) - |H(j100\omega_0)|\sin\left(100\omega_0 t + arg(H(j100\omega_0))\right)\right]$$

Miremos los diagramas de Bode asintóticos. Como las frecuencias críticas están separadas una década, la información aproximada que obtengamos será bastante buena, sobre todo en lo que refiere al módulo. Por supuesto que siempre podemos hacer la cuenta exacta. Por un lado,

$$|H(j\omega_0)| \approx 1\ (0dB) \quad , \quad |H(j100\omega_0)| \approx 10^{-3}\ (-60dB)$$

El primer valor podemos corregirlo un poco, dado que sabemos la distancia entre los diagramas de Bode de módulo real y asintótico para una raíz simple. Al estar las raíces a una década, podemos suponer esa misma distancia, de $-3dB$. El último valor nos permite considerar que la señal de $100\omega_0$ es prácticamente eliminada por el filtro. Por otro lado,

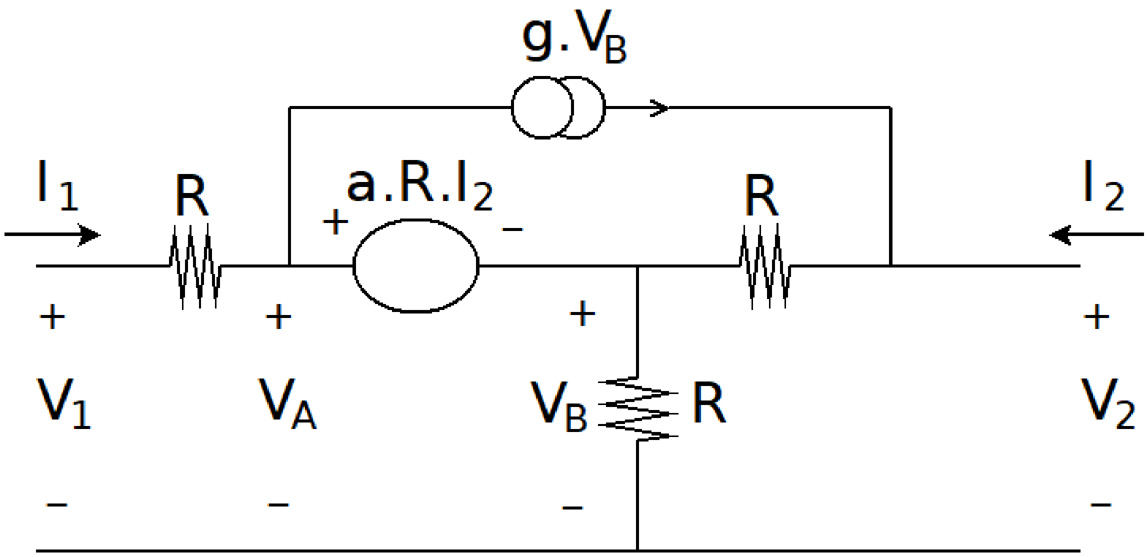
$$arg(H(j\omega_0)) \approx -45^o$$

ya que las singularidades están bastante separadas entre sí. Entonces

$$\boxed{v_o(t) = -2\frac{R_3}{R_2}\left(1 + 2\frac{R_1}{R_4}\right).\frac{1}{\sqrt{2}}.\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Se sugiere calcular los valores exactos de módulo y fase de $H(j\omega_0)$.

Problema 2



Se considera el cuadripolo de la figura, con a y g positivos, de dimensiones adecuadas.

(a) i) Usando Kirchhoff, mostrar que $V_B = R(I_1 + I_2)$ y $V_A = RI_1 + (1+a)Ri_2$.

Denotemos por I_3 la corriente que entrega la fuente de tensión dependiente. Entonces, mirando los nudos de tensión V_A y V_B, obtenemos:

$$I_1 + I_3 = g.V_B$$

Por otro lado,

$$I_3 = \frac{-V_B}{R} + I_2 + g.V_B$$

Entonces

$$I_1 - \frac{V_B}{R} + I_2 + g.V_B = g.V_B \Rightarrow I_1 - \frac{V_B}{R} + I_2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = R(I_1 + I_2)}$$

Haciendo mallas,

$$V_A = aRI_2 + V_B = aRI_2 + R(I_1 + I_2) \Rightarrow \boxed{V_A = RI_1 + (1+a)RI_2}$$

ii) Hallar las impedancias de vacío.

Debemos expresar las tensiones V_1 y V_2 en función de las corrientes I_1 e I_2. Hacemos mallas:

$$V_1 = RI_1 + V_A \Rightarrow V_1 = RI_1 + RI_1 + (1+a)RI_2 = 2RI_1 + (1+a)RI_2$$

Análogamente,

$$V_2 = R(I_2 + gV_B) + V_B = RI_2 + (1+gR)V_B = RI_2 + (1+gR)R(I_1+I_2) = (1+gR)RI_1 + (2+gR)RI_2$$

Obtenemos la matriz de las impedancias de vacío:

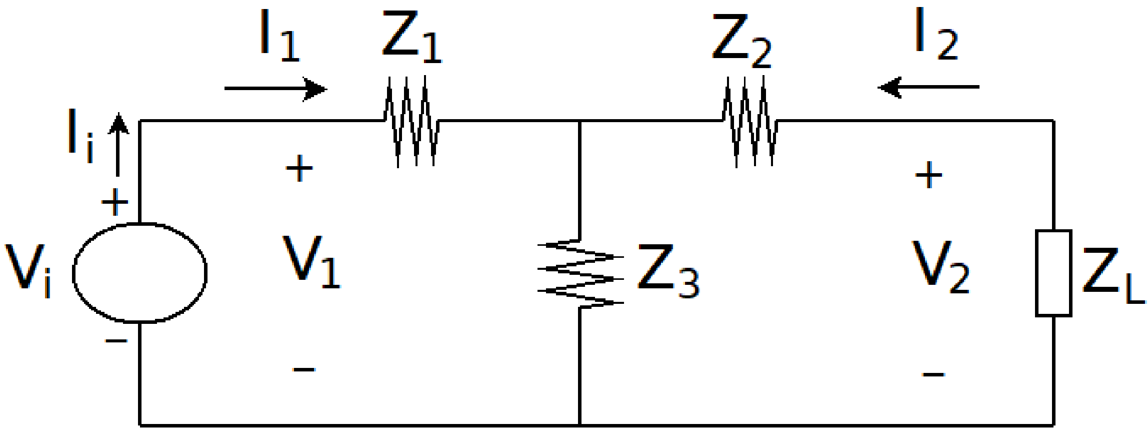
$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+a \\ 1+gR & 2+gR \end{bmatrix} .R$$

(b) Hallar g para que el cuadripolo sea recíproco.

Para que el cuadripolo sea recíproco, la matriz de impedancias de vacío debe ser simétrica ($z_{12} = z_{21}$):

$$gR = a \Rightarrow \boxed{g = \frac{a}{R}}$$

(c) En la figura se representa el cuadripolo recíproco por su equivalente T, trabajando en régimen sinusoidal, a pulsación ω_0. Se sabe que $a = 1/2$. Se carga el cuadripolo con una inductancia $L = \frac{R}{\omega_0}$, de impedancia asociada Z_L.



i) Hallar Z_1, Z_2 y Z_3.

Para que sean equivalentes, los dos cuadripolos deben tener las mismas impedancias de vacío. El cálculo de las impedancias de vacío para el circuito T es bien directo:

$$z_{11} = Z_1 + Z_3 \quad , \quad z_{22} = Z_2 + Z_3 \quad , \quad z_{12} = z_{21} = Z_3$$

Entonces ya conocemos $Z_3 = (1+a)R = \frac{3}{2}R$ y

$$Z_1 = z_{11} - z12 = (2 - 1 - a)R = (1-a)R = \frac{R}{2}$$

$$Z_2 = z_{22} - z12 = (2 + gR - 1 - gR)R = R$$

ii) Hallar la potencia activa y reactiva consumidas a la fuente.

Trabajando en fasores, sabemos que

$$P = re(V_i.\overline{I_i}) = re\left(V_i \frac{\overline{V_i}}{\overline{Z_{eq}}}\right) = |V_i|^2.re\left(\frac{1}{\overline{Z_{eq}}}\right) = |V_i|^2.\frac{R_{eq}}{R_{eq}^2 + X_{eq}^2}$$

$$Q = im(V_i.\overline{I_i}) = |V_i|^2.\frac{X_{eq}}{R_{eq}^2 + X_{eq}^2}$$

siendo

$$Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq} = Z_1 + [Z_3||(Z_2 + Z_L)] = \frac{R}{2} + \left[\frac{3}{2}R||(R + Lj\omega_0)\right]$$

$$= \frac{R}{2} + \frac{\frac{3}{2}R.(R + Lj\omega_0)}{\frac{3}{2}R + R + Lj\omega_0} = \frac{R}{2} + \frac{\frac{3}{2}R.(R + Lj\omega_0)}{\frac{5}{2}R + Lj\omega_0} = \frac{R}{2} + \frac{3R.(R + Lj\omega_0)}{5R + 2Lj\omega_0}$$

$$= \frac{5R^2 + 2RLj\omega_0 + 6R^2 + 6RLj\omega_0}{10R + 4Lj\omega_0} = \frac{11R^2 + 8RLj\omega_0}{10R + 4Lj\omega_0} = \frac{11R^2 + 8jR^2}{10R + 4jR}$$

donde hemos usado que $L\omega_0 = R$. Entonces

$$Z_{eq} = \frac{11 + 8j}{10 + 4j}.R = \frac{11 + 8j}{10 + 4j}.\frac{10 - 4j}{10 - 4j}.R = \frac{(110 + 32) + j(80 - 44)}{100 + 16}.R$$

$$Z_{eq} = \frac{142 + j36}{116}.R \approx (1{,}22 + j0{,}31)R$$

$$\Rightarrow R_{eq} \approx 1{,}22R \quad , \quad X_{eq} \approx 0{,}31R \quad , \quad |Z_{eq}|^2 \approx 1{,}6R^2 \quad , \quad \angle Z_{eq} \approx 14^o$$

Por lo tanto

$$P = |V_i|^2.\frac{R_{eq}}{R_{eq}^2 + X_{eq}^2} = \frac{1{,}22R}{1{,}6R^2}.|V_i|^2 \approx 0{,}77\frac{|V_i|^2.}{R}(W)$$

$$Q = |V_i|^2.\frac{X_{eq}}{R_{eq}^2 + X_{eq}^2} = \frac{0{,}31R}{1{,}6R^2}.|V_i|^2 \approx 0{,}19\frac{|V_i|^2.}{R}(VAR)$$

iii) Compensar la potencia reactiva, indicando qué elemento colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Como ya vimos, la carga es inductiva, con factor de potencia positivo $\cos(14^o) \approx 0{,}96$. Para compensar la reactiva, y llevar el factor de potencia a la unidad, podemos colocar un condensador de valor adecuado en bornes de la fuente, en paralelo con el cuadripolo. De esta forma, no se modifica la potencia activida consumida. El valor necesario del condensador sale de igualar la reactiva que entrega el condensador con la que consume el circuito:

$$Q + Q_C = 0 \Rightarrow |V_i|^2 C\omega_0 = 0{,}19\frac{|V_i|^2}{R} \Rightarrow \boxed{C = \frac{0{,}19}{R\omega_0}(F)}$$