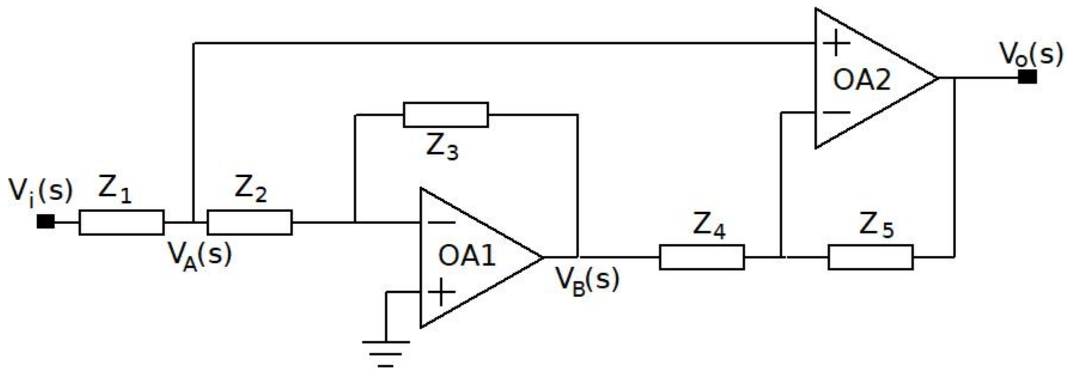
Teoría de Circuitos

Examen de febrero de 2022

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales, funcionando en zona lineal, y las tensiones medidas respecto de tierra.



(a) i) Hallar las tensiones $V_A(s)$, $V_B(s)$ y $V_o(s)$ en función de la entrada $V_i(s)$.

ii) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

(b) Se eligen las impedancias de forma tal que $H(s)$ puede escribirse así:

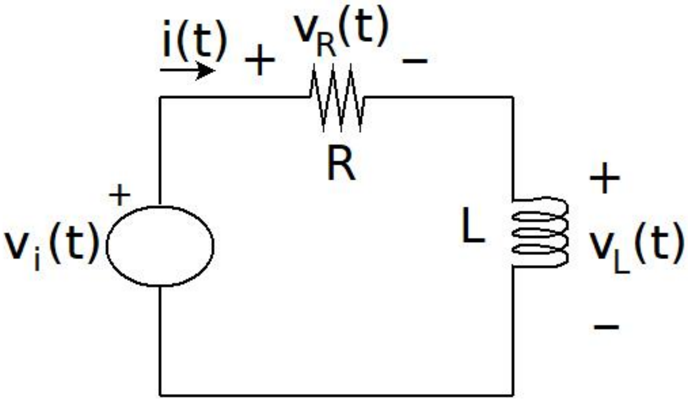
$$H(s) = \frac{3\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con ω_n positivo dado y $\zeta = \sqrt{50}$. Hallar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando claramente cómo trabaja.

(c) Hallar la distancia entre el diagrama de Bode de módulo asintótico y el real para $\omega = \omega_n$. Expresarla en decibeles.

(d) ¿Existe una frecuencia de la trabajo a la cual en régimen el fasor de la salida sea **exactamente** perpendicular al fasor de entrada? **Justificar!!**

Problema 2

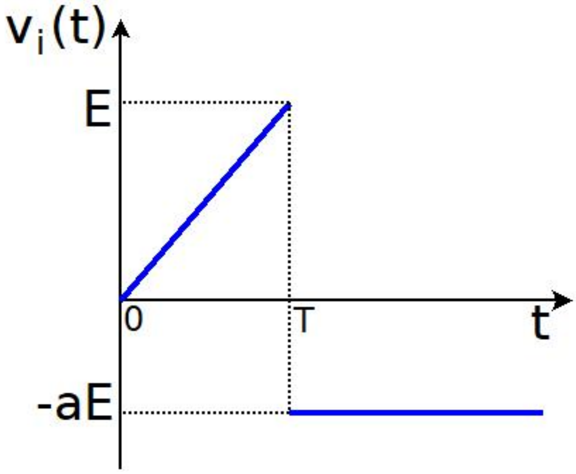


Se considera el circuito de la figura, con $L/R = T$.

a) Suponiendo un dato previo i_{L0} en la inductancia y una entrada $v_i(t)$ genérica:

   i) Dibujar, explicando, el circuito equivalente en Laplace.

   ii) Hallar la expresión en Laplace ($I(s)$) de la corriente $i(t)$, teniendo presente que $\frac{L}{R} = T$.



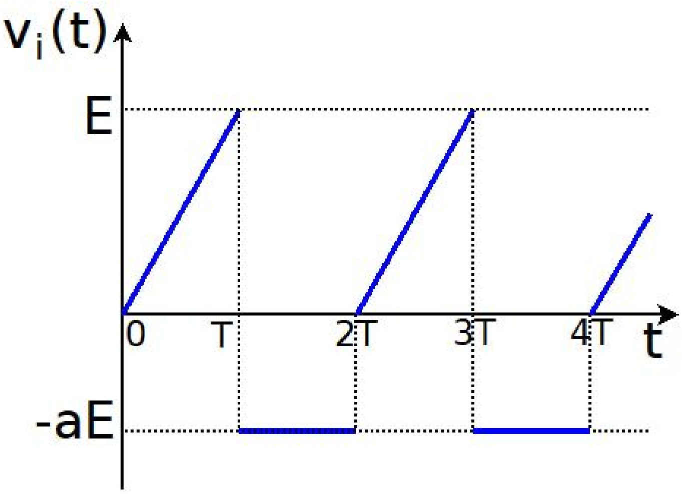
A partir de ahora, se considera la entrada mostrada en la figura, con la inductancia inicialmente descargada. Se hará un análisis por tramos.

b) Analizar el tramo $(0, T)$. En dicho tramo: dibujar el circuito equivalente en Laplace; hallar la expresión temporal de la corriente $i(t)$;

c) Analizar el tramo $(T, +\infty)$, usando la variable auxiliar $t' = t - T$.

d) Hallar a tal que $i(t' = T) = 0$. Este valor de a se mantendrá en el ejercicio.

e) Explicar cualitativamente cuál será la respuesta del sistema a la entrada periódica de la figura. **Justificar!!**



Teoría de Circuitos
Examen de febrero de 2022

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Se considera una fuente trifásica equilibrada y perfecta alimentando una carga equilibrada.

(a) Mostrar que la potencia instantánea que entrega la fuente trifásica es constante!!

(b) Mostrar que, sin importar que la carga esté en triángulo o en estrella, la expresión de la potencia activa que entrega la fuente a la carga vale:

$$P = \sqrt{3}.U_{C,eff}.I_{L,eff}.\cos\varphi$$

siendo $U_{C,eff}$ el valor eficaz de la tensión compuesta, $I_{L,eff}$ el valor eficaz de la corriente de línea y $\cos(\varphi)$ el factor de potencia de la carga.

Pregunta 2

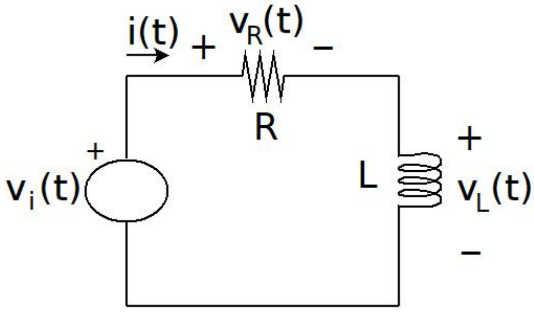
Se considera la transferencia

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con ω_n positivo y $0 \leq \zeta \leq 1$. Se excita el sistema con una sinusoide de amplitud A y pulsación ω_0, una octava por debajo de ω_n. Hallar un valor de ζ que asegure que el sistema responde en régimen con una señal con la misma amplitud que la de la entrada.

Pregunta 3

Se considera el siguiente circuito, en régimen sinusoidal:



(a) Hacer un diagrama fasorial en el que se muestren los fasores V_i, I, V_R y V_L.

(b) En dicho diagrama, representar la ecuación de Kirchhoff de malla del circuito.

(c) Denotemos por O el punto en el que se inicia el fasor V_i e iniciemos el fasor V_R en dicho punto. Sea P el otro extremo del fasor V_R. Bosquejar, justificando, el lugar greométrico que recorre el punto P al variar R desde 0 a $+\infty$.

Pregunta 4

Se recuerda la expresión general de la impedancia que se ve en una línea de transmisión sin pérdidas, de impedancia característica Z_0, a una distancia d de la carga Z_L, trabajando a una frecuencia asociada a una constante de fase β:

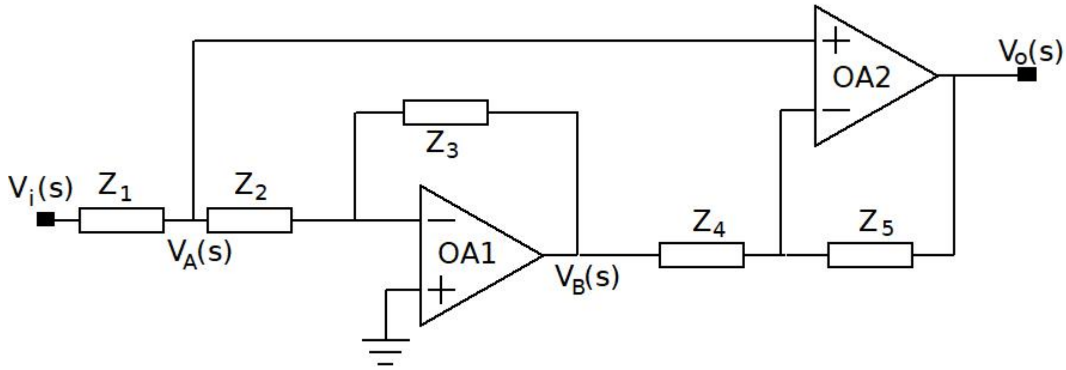
$$Z_v(d) = Z_0.\frac{Z_L + j.Z_0.\tan(\beta d)}{Z_0 + j.Z_L.\tan(\beta d)}$$

Describir un stub, indicando en qué consiste, cómo se diseña y para qué puede usarse.

Solución

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales, funcionando en zona lineal, y las tensiones medidas respecto de tierra.



(a) i) Hallar las tensiones $V_A(s)$, $V_B(s)$ y $V_o(s)$ en función de la entrada $V_i(s)$.

Debido a la ganancia infinita y a estar en zona lineal, tenemos el cortocircuito virtual de las patas + y - del los operacionales. Además, por la resistencia de entrada infinita, no entra corriente a los operacionales por sus patas + y -. Entonces, por divisor de tensión:

$$V_A(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.V_i(s)$$

Considerando la configuración inversora del primer operacional:

$$V_B(s) = -\frac{Z_3}{Z_2}.V_A(s) \Rightarrow V_B(s) = -\frac{Z_3}{Z_2}.\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.V_i(s)$$

Finalmente,

$$\frac{V_B(s) - V_A(s)}{Z_4} = \frac{V_A(s) - V_o(s)}{Z_5} \Rightarrow V_o(s) = V_A(s).\left(1 + \frac{Z_5}{Z_4}\right) - V_B(s).\frac{Z_5}{Z_4}$$

$$\Rightarrow V_o(s) = \left(1 + \frac{Z_5}{Z_4}\right).\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.V_i(s) + \frac{Z_5}{Z_4}.\frac{Z_3}{Z_2}.\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.V_i(s)$$

$$V_o(s) = \left[\left(\frac{Z_4 + Z_5}{Z_4}\right).\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_5}{Z_4}.\frac{Z_3}{Z_2}.\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\right].V_i(s)$$

$$V_o(s) = \left[\frac{Z_2Z_4 + Z_2Z_5 + Z_3Z_5}{Z_1Z_4 + Z_2Z_4}\right].V_i(s)$$

ii) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

De la parte anterior obtenemos

$$H(s) = \frac{Z_2Z_4 + Z_2Z_5 + Z_3Z_5}{Z_1Z_4 + Z_2Z_4}$$

(b) Se eligen las impedancias de forma tal que $H(s)$ se puede escribir así:

$$H(s) = \frac{3\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con ω_n positivo dado y $\zeta = \sqrt{50}$. Hallar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando claramente cómo trabaja.

Tenemos que

$$H(j\omega) = \frac{3\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

En primer lugar, identificamos las frecuencias críticas, hallando las raíces del denominador.

$$x^2 + 2\zeta\omega_n x + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2\zeta\omega_n + \pm\sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n + \pm\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Las raíces son: $-\omega_1 = \left(-\sqrt{50} + \sqrt{49}\right)\omega_n \approx -0,07\omega_n$ y $-\omega_2 = \left(-\sqrt{50} - \sqrt{49}\right)\omega_n \approx -14,07\omega_n$, es decir, tenemos dos raíces reales distintas (eso ya lo sabíamos, por ser $|\zeta|$ mayor que 1) negativas, separadas bastante más de una década.

La transferencia se puede escribir así:

$$H(j\omega) = \frac{3\omega_1\omega_2}{(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_2)}$$

Para hacer los diagramas asintóticos, hacemos un análisis por bandas.

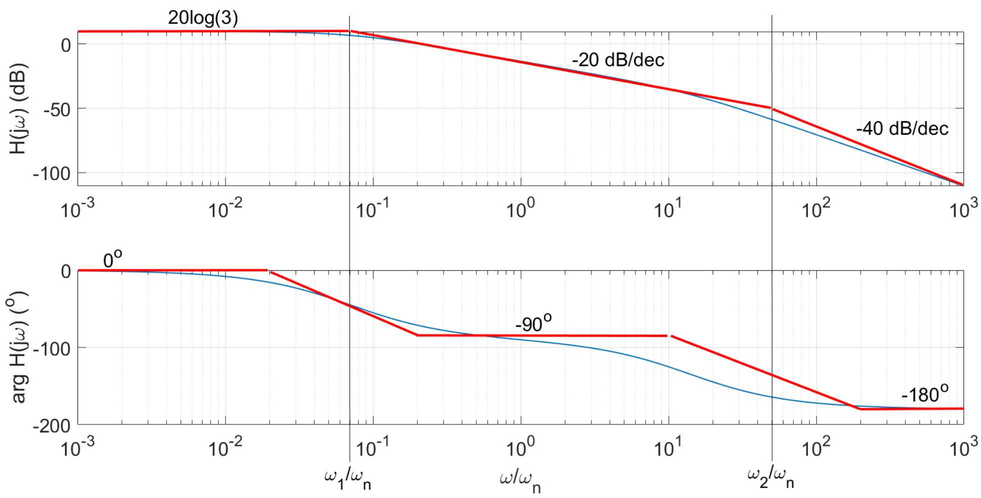
$$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{3\omega_1\omega_2}{(\omega_1)(\omega_2)} = 3 \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(3)\, dB \approx 9,54dB \\ arg(H) & \approx & 0^o \end{cases}$$

$$\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{3\omega_1\omega_2}{(j\omega)(\omega_2)} = \frac{3\omega_1}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(3\omega_1) - 20log(\omega)\, dB \\ arg(H) & \approx & -90^o \; (\text{ó } +270^o) \end{cases}$$

Como $-\omega_1$ es una raíz simple, sólo puede aportar una variación neta de 90 grados, por lo que descartamos los $+270$ grados.

$$\omega_2 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{3\omega_1\omega_2}{(j\omega)(j\omega)} = -\frac{3\omega_1\omega_2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(3\omega_1\omega_2) - 40log(\omega)\, dB \\ arg(H) & \approx & \pm 180^o \end{cases}$$

Nuevamente, como $-\omega_2$ es una raíz simple, sólo puede aportar una variación neta de 90 grados, por lo que descartamos los $+180$ grados. La siguiente figura muestra los diagramas de Bode asintóticos y reales.



(c) Hallar la distancia entre el diagrama de Bode de módulo asintótico y el real para $\omega = \omega_n$. Expresarla en decibeles.

La distancia en decibeles la podemos expresar así:

$$d_{dB} = 20log\left(\frac{|H_{as}(j\omega_n)|}{|H_{real}(j\omega_n)|}\right)$$

Por un lado, evaluando en la zona de ω_n,

$$|H_{as}(j\omega_n)| = \left|\frac{3\omega_1}{j\omega_n}\right| = \left|\frac{3(\sqrt{50}-7)\omega_n}{j\omega_n}\right| = \left|\frac{3(\sqrt{50}-7)}{j}\right| = 3(\sqrt{50}-7)$$

Por otro lado,

$$|H_{real}(j\omega_n)| = \left|\frac{3\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2}\right| = \left|\frac{3}{2j\zeta}\right| = \frac{3}{2\zeta} = \frac{3}{2\sqrt{50}}$$

Entonces

$$d_{dB} = 20\log\left(\frac{|H_{as}(j\omega_n)|}{|H_{real}(j\omega_n)|}\right) = 20log\left(\frac{3(\sqrt{50}-7)}{\frac{3}{2\sqrt{50}}}\right) = 20\log\left(2\sqrt{50}(\sqrt{50}-7)\right) \approx 0,044dB$$

(d) ¿Existe una frecuencia de la trabajo a la cual en régimen el fasor de la salida sea **exactamente** perpendicular al fasor de entrada? **Justificar!!**

Sabemos que en régimen sinusoidal, ante una entrada de la forma $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, el sistema responde en régimen con una señal también sinusoidal, de la misma frecuencia, y con una relación de amplitud y fase respecto de la entrada dada por la expresión

$$v_{o,reg}(t) = A.|H(j\omega_0)|\cos\left(\omega_0 t + \varphi + arg\ H(j\omega_0)\right)$$

Entonces, para que los fasores de la entrada y la salida sean perpendiculares, se debe cumplir que

$$arg\ H(j\omega_0) = \pm\frac{\pi}{2}\ (+\text{ múltiplos enteros de } 2\pi)$$

De la parte anterior, y mirando el diagrama asintótico de fase, vemos que en ω_n, el sistema aporta exactamente $-\pi/2$. Notar que si bien el diagrama asintótico muestra una banda con esa fase, sólo se produce exactamente a una frecuencia, dada la monotonía de la fase.

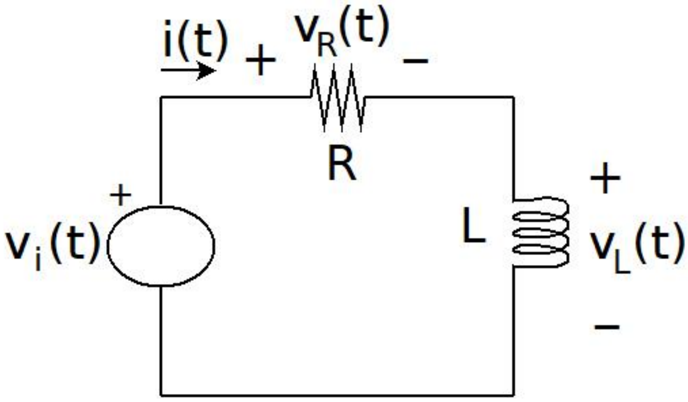
Problema 2

Se considera el circuito de la figura, con $L/R = T$.

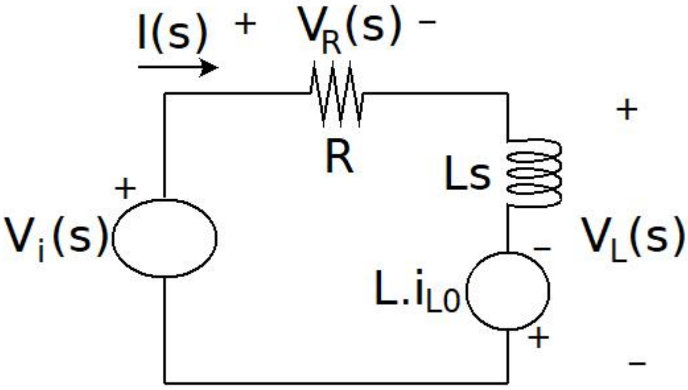
a) Suponiendo un dato previo i_{L0} en la inductancia y una entrada $v_i(t)$ genérica:

   i) Dibujar, explicando, el circuito equivalente en Laplace.

   ii) Hallar la expresión en Laplace ($I(s)$) de la corriente $i(t)$.



El circuito equivalente en Laplace se muestra en la figura de la derecha. La fuente independiente toma el valor de su transformada. Aparece una segunda fuente independiente, con la polaridad indicada, asociada al dato previo i_{L0} de la inductancia (este modelo sale de pasar a Laplace la relación tensión-corriente de la inductancia, usando el teorema de derivación). Aparecen las impedancias asociadas a la resistencia (R) y a la inductancia (Ls). Notar cómo se mide la tensión en bornes de la inductancia en el circuito equivalente en Laplace.



Para hallar $I(s)$ resolvemos el circuito en Laplace, que más allá de tener expresiones en la variable s, es un circuito lineal con relaciones proporcionales entre las corrientes y tensiones involucradas. Planteamos Kirchhoff de mallas. La corriente por la única malla vale

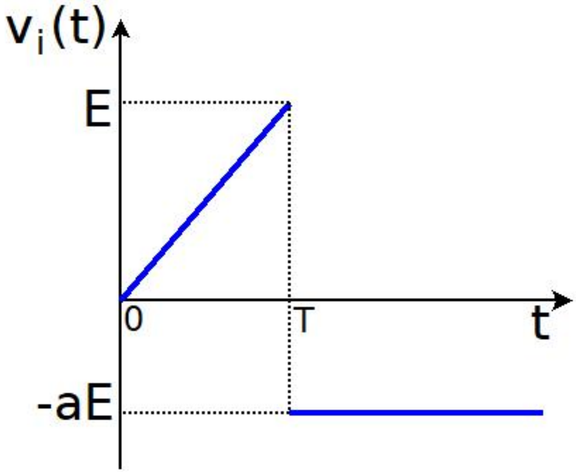
$$I(s) = \frac{V_i(s) + L.i_{L0}}{R + Ls} = \frac{1}{L}.\frac{V_i(s) + L.i_{L0}}{s + \frac{R}{L}} = \frac{i_{L0}}{s + \frac{1}{T}} + \frac{1}{L}.\frac{V_i(s)}{s + \frac{1}{T}}$$

A partir de ahora, se considera la entrada mostrada en la figura, con la inductancia inicialmente descargada. Se hará un análisis por tramos.

b) Analizar el tramo $(0, T)$. En dicho tramo: dibujar el circuito equivalente en Laplace; hallar la expresión temporal de la corriente $i(t)$;

c) Analizar el tramo $(T, +\infty)$, usando la variable auxiliar $t' = t - T$.

d) Hallar a tal que $i(t' = T) = 0$. Este valor de a se mantendrá en el ejercicio.



b) Analizar el tramo $(0, T)$. En dicho tramo: dibujar el circuito equivalente en Laplace; hallar la expresión temporal de la corriente $i(t)$.

Para el primer tramo, el dato previo es nulo y

$$V_i(s) = \frac{E}{Ts^2}$$

ya que la entrada es una rampa. La expresión en Laplace de la corriente es:

$$I(s) = \frac{E}{LT}.\frac{1}{s^2\left(s+\frac{1}{T}\right)} = \frac{E}{LT}.\left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+\frac{1}{T}}\right]$$

Para pasar al tiempo, hacemos fracciones simples, teniendo en cuenta que hay una raíz doble en $s = 0$. Para hallar las constantes A, B y C, podemos hacer común denominador e identificar polinomios, si bien A y C salen por *tapadita*. Obtenemos la identidad:

$$1 = A.\left(s+\frac{1}{T}\right) + B.s.\left(s+\frac{1}{T}\right) + C.s^2 = (B+C).s^2 + \left(A+\frac{B}{T}\right).s + \frac{A}{T}$$

Entonces

$$A = T \quad , \quad B = -T^2 \quad , \quad C = -B = T^2$$

(verificar lo comentado sobre la *tapadita*). La expresión simplificada es:

$$I(s) = \frac{E}{LT}.\left[\frac{T}{s^2} - \frac{T^2}{s} + \frac{T^2}{s+\frac{1}{T}}\right] = \frac{E}{Ls^2} + \frac{ET}{L}.\left[-\frac{1}{s} + \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right] = \frac{E}{RTs^2} + \frac{E}{R}.\left[-\frac{1}{s} + \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]$$

Pasando al tiempo, obtenemos la expresión de la corriente para el primer tramo:

$$i(t) = Y(t).\frac{E}{R}.\frac{t}{T} + Y(t).\frac{E}{R}\left[e^{-t/T} - 1\right]$$

c) Analizar el tramo $(T, +\infty)$, usando la variable auxiliar $t' = t - T$.

Para el segundo tramo, usamos la variable auxiliar $t' = t - T$. La entrada ahora es un escalón de amplitud $-a.E$ y en la inductancia tenemos el dato previo que obtenemos al evaluar la expresión del primer tramo en $t = T$:

$$i_{L0} = i(t=T) = \frac{E}{R}.\frac{T}{T} + \frac{E}{R}\left[e^{-T/T} - 1\right] = \frac{E}{R}.\left[1 + e^{-1} - 1\right] = \frac{E}{R}.e^{-1}$$

Usando nuevamente la expresión genérica de la parte a), tenemos que

$$I(s) = \frac{i_{L0}}{s+\frac{1}{T}} + \frac{1}{L}.\frac{V_i(s)}{s+\frac{1}{T}} = \frac{i_{L0}}{s+\frac{1}{T}} + \frac{1}{L}.\frac{-aE}{s.\left(s+\frac{1}{T}\right)} = \frac{i_{L0}}{s+\frac{1}{T}} - \frac{aE}{R}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]$$

donde nuevamente hemos hecho fracciones simples (y *tapadita*). Pasando al tiempo, en la variable t', obtenemos:

$$i(t') = Y(t').i_{L0}.e^{-t'/T} - Y(t').\frac{aE}{R}.\left(1 - e^{-t'/T}\right)$$

d) Hallar a tal que $i(t' = T) = 0$. Este valor de a se mantendrá en el ejercicio.

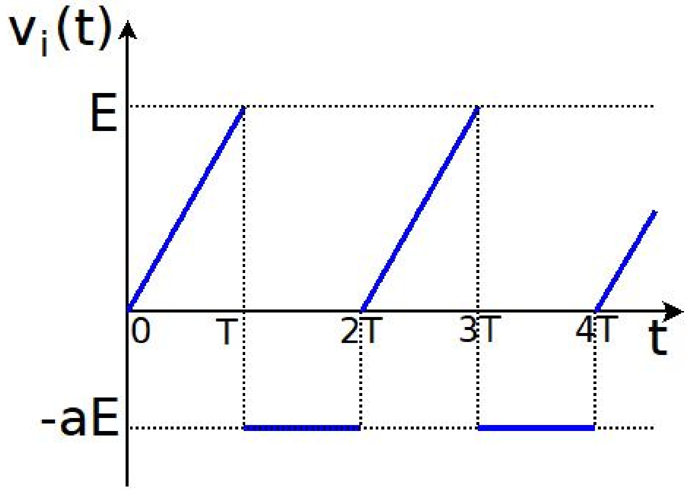
Evaluamos:

$$0 = i(t'=T) = i_{L0}.e^{-T/T} - \frac{aE}{R}.\left(1 - e^{-T/T}\right) = i_{L0}.e^{-1} - \frac{aE}{R}.\left(1 - e^{-1}\right)$$

Entonces

$$i_{L0}.e^{-1} = \frac{aE}{R}.\left(1 - e^{-1}\right) \Rightarrow a = \frac{R.i_{L0}.e^{-1}}{(1-e^{-1}).E} = \frac{R.\frac{E}{R}.e^{-1}.e^{-1}}{(1-e^{-1}).E} = \frac{e^{-2}}{1-e^{-1}}$$

e) Explicar cualitativamente cuál será la respuesta del sistema a la entrada periódica de la figura. **Justificar!!**



La entrada es periódica, de periodo $2T$. Al comienzo del primer periodo, la bobina está descargada. Esta situación se vuelve a repetir al comienzo del segundo periodo (y al comienzo de los periodos siguientes). Al repetirse la entrada y el estado de la inductancia, la respuesta del circuito será esencialmente la analizada en las partes b) y c) (hasta $t' = T$), que se repetirá en cada periodo.