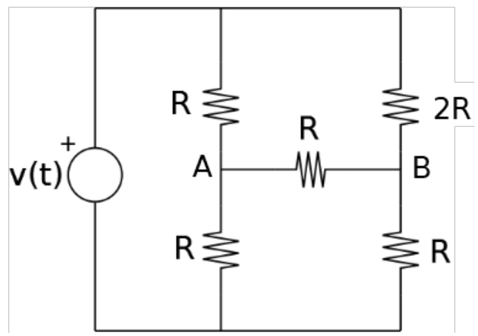
Pregunta 1

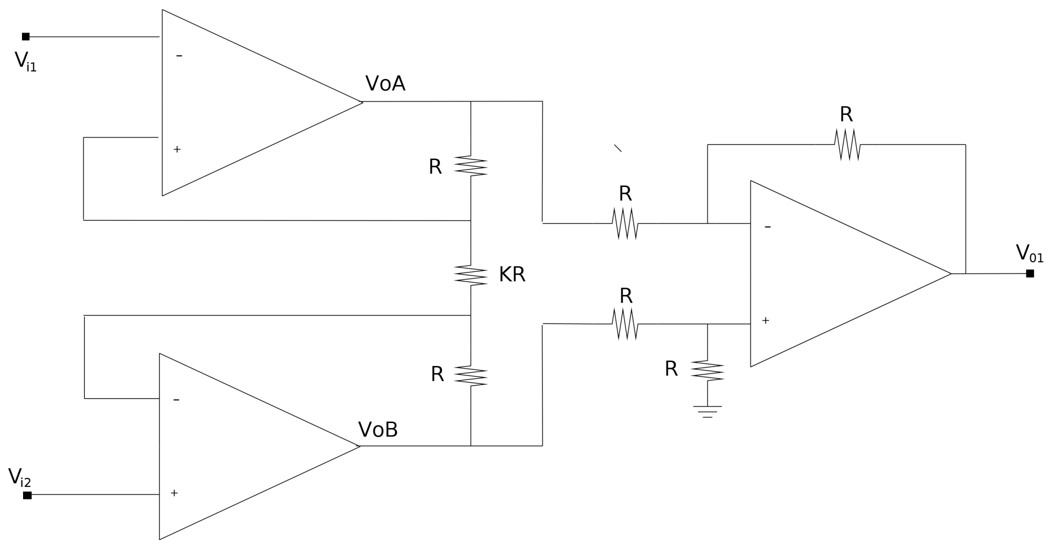


Se considera el circuito de la figura.

(a) Hallar la resistencia equivalente vista por la fuente. (Sugerencia: aplicar transfiguración estrella-triángulo o triángulo-estrella).

(b) Si la fuente es sinusoidal, de valor eficaz $230V$ y frecuencia $50Hz$, hallar la potencia activa que le entrega a la carga.

Pregunta 2



(a) En el circuito de la figura, identificar un amplificador diferencial y hallar la ganancia del mismo.

(b) En el circuito de la figura, hallar la relación entre la salida $V_{o1}(t)$ y las entradas $V_{i1}(t)$ y $V_{i2}(t)$.

Pregunta 3

Se considera un transformador simple, de inductancias de primario L_1 y L_2 respectivamente e inductancia M, funcionando en régimen sinusoidal. Lo analizaremos como un cuadripolo.

(a) Hallar los parámetros Z.

(b) ¿Es recíproco?

(c) Hallar el equivalente T.

Pregunta 4

Se considera un sistema trifásico con un sistema de fuentes en estrella, equilibrado y perfecto. Se define la potencia instantánea que entrega cada fuente de la manera usual , como el producto de la tensión en bornes por la corriente que entrega. Se define la potencia instantánea trifásica como la suma de las potencias instantáneas de cada fuente.

a) Mostrar que si el sistema alimenta una carga equilibrada, entonces la potencia instantánea trifásica es constante.

b) Deducir, para el caso de una carga equilibrada, la fórmula

$$P = \sqrt{3}|U_{12}|.|I_1|.\cos(\varphi)$$

siendo P la potencia activa trifásica, U_{12} el fasor de la tensión compuesta entre las líneas 1 y 2, en valores eficaces, I_1 el fasor de la corriente por la línea 1, en valores eficaces, y $\cos(\varphi)$ el factor de potencia de la carga.

(Recordar que $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}.[cos(a+b) + cos(a-b)]$)

%sectionLINEAS

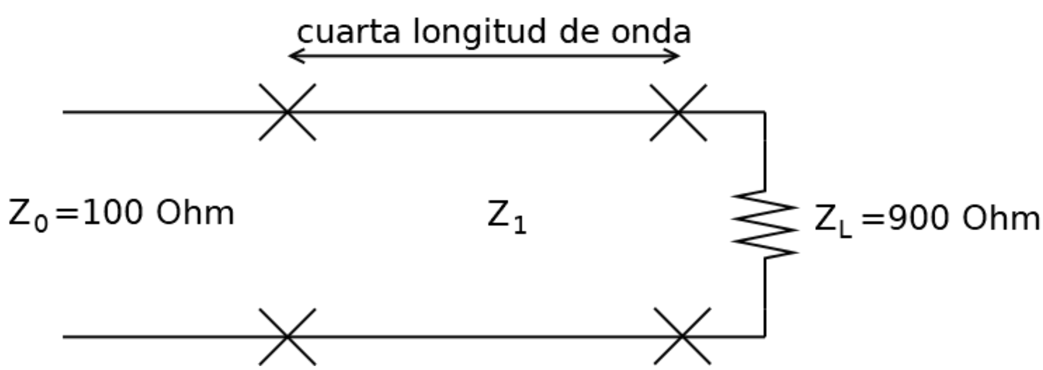
Pregunta 5

(a) Se considera una línea de transmisión sin pérdidas, de impedancia característica Z_{linea}, terminada con una impedancia Z_L. La siguiente expresión representa la impedancia vista a una distancia d de la carga:

$$Z(d) = Z_{linea}.\frac{Z_L + jZ_{linea}.\tan\beta d}{Z_{linea} + jZ_L.\tan\beta d}$$

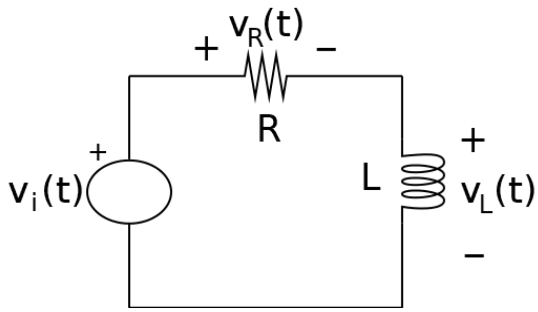
Hallar la expresión de la impedancia vista a la entrada de un transformador de 1/4 longitud de onda, de impedancia característica Z_{transf} cuando se lo termina con una impedancia Z_L.

(b) Se quiere adaptar una impedancia Z_L a una línea de transmisión de impedancia característica Z_0. Para ello se utiliza un transformador de cuarta longitud de onda, de impedancia característica Z_1, como se muestra en la figura. ¿Qué valor debe tener Z_1 para lograr la adaptación de la carga?



Pregunta 6

Se considera el siguiente circuito, en régimen sinusoidal:



(a) Hacer un diagrama fasorial en el que se muestren los fasores V_i, I, V_R y V_L.

(b) En dicho diagrama, representar la ecuación de Kirchhoff de malla del circuito.

(c) Denotemos por O el punto en el que se inicia el fasor V_i e iniciemos el fasor V_R en dicho punto. Sea P el otro extremo del fasor V_R. Bosquejar, justificando, el lugar geométrico que recorre el punto P al variar R desde 0 a $+\infty$.

Pregunta 7

Se considera una componente eléctrica funcionando en régimen sinusoidal, con tensión en bornes $v(t) = A_V.\cos(\omega_0 t)$ y corriente $i(t) = A_I.\cos(\omega_0 t + \Phi)$, medidas en la forma estándar (la corriente en el sentido de la caída).

(a) i) Definir la impedancia de la componente funcionando en régimen sinusoidal.

ii) Expresar la impedancia en función de los datos disponibles.

(b) A partir de la definición de potencia activa de la componente:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t).i(t)dt$$

<u>**demostrar**</u> la fórmula de cálculo $P = re(V\bar{I})$, siendo V e I los fasores (**en valores eficaces**) asociados respectivamente a la tensión $v(t)$ y la corriente $i(t)$.

Pregunta 8

Se considera un sistema **funcionando en régimen sinusoidal**, en el que una fuente de tensión sinusoidal alimenta un motor, que puede pensarse como una impedancia inductiva $Z = R + jX$.

(a) Bosquejar el diagrama fasorial del circuito, donde aparezcan la tensión en bornes del motor y la corriente inyectada al motor.

(b) Muestre que, colocando una componente lineal de manera adecuada, siempre es posible compensar la potencia reactiva que entrega la fuente sin alterar la potencia activa consumida por el motor.

Pregunta 9

Sea un circuito lineal funcionando en régimen sinusoidal, de transferencia en régimen

$$H(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V(j\omega)}$$

siendo $V(j\omega)$ el fasor asociado a la fuente de tensión de entrada del circuito e $I(j\omega)$ el fasor asociado a la corriente que el circuito en régimen le consume a la fuente de tensión de entrada. Sean P_ω y Q_ω las potencias activa y reactiva consumida por el circuito, a la frecuencia de trabajo ω.

¿Qué condiciones debe cumplir $H(j\omega)$ para que las siguientes afirmaciones sean ciertas?

(a) Existe una frecuencia de trabajo ω_1 para la cual $P_{\omega_1} = 0$.

(b) Existe una frecuencia de trabajo ω_2 para la cual $Q_{\omega_2} = 0$.

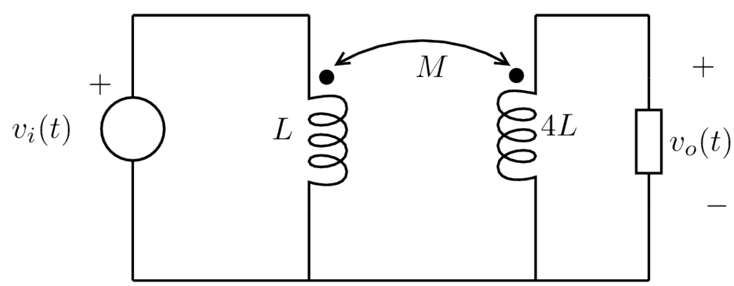
(c) Existe una frecuencia de trabajo ω_3 para la cual $|P_{\omega_3}| = |Q_{\omega_3}|$.

Pregunta 10

Se considera el transformador **perfecto** de la figura. El primario está alimentado por una fuente sinusoidal y en el secundario se ha conectado una impedancia Z.

(a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal en tensión $H_T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. Verificar que no depende de la impedancia conectada al secundario.

(b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal en corriente $H_I(j\omega) = \frac{I_Z(j\omega)}{I_F(j\omega)}$, siendo I_Z el fasor de corriente por la carga del secundario e I_F la corriente entregada al primario.



Pregunta 11

Se considera la siguiente transferencia en régimen de primer orden

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + a}{j\omega + ka}$$

con k y a positivos y $k > 1$.

(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

(b) Bosquejar los diagramas reales.

(c) Mostrar que existe una frecuencia ω_0 (y hallar el valor exacto de la misma) a la cual el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico coinciden.

Pregunta 12

Se considera la siguiente transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

siendo $0 < \zeta^2 < 1$ y $\omega_n > 0$.

(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando su construcción.

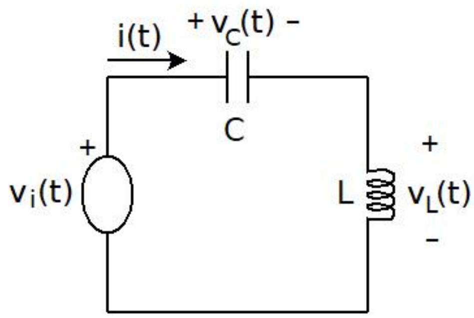
(b) A los diagramas anteriores, incorporarle el valor exacto de la transferencia en la frecuencia de trabajo ω_n, explicando claramente el rol del parámetro ζ. Bosqueje los diagramas reales

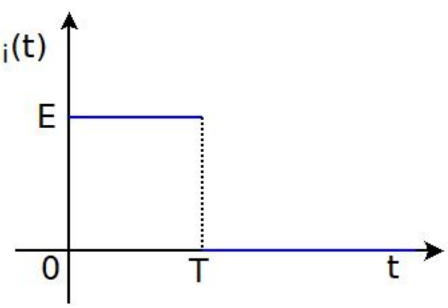
(c) Hallar $\zeta \geq 0$ tal que $|H(j\omega_n)| = 28db$.

Pregunta 13

El circuito de la figura de la izquierda se encuentra inicialmente en reposo. Se aplica la tensión $v_i(t)$ de la figura de la derecha, con $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Resolviendo por tramos, calcular las tensiones $v_L(t)$ y $v_C(t)$ para todo ins-



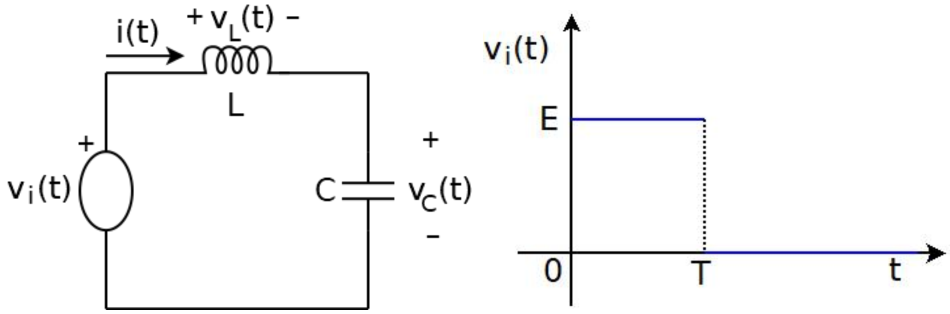


tante positivo.

Pregunta 14

El circuito de la figura de la izquierda se encuentra inicialmente en reposo. Se aplica la tensión $v_i(t)$ de la figura de la derecha, con $T = 4\pi\sqrt{LC}$.

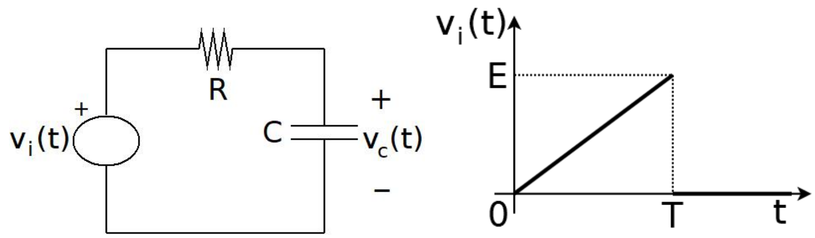
Resolviendo por tramos, calcular las tensiones $v_L(t)$ y $v_C(t)$ para todo ins-



tante positivo.

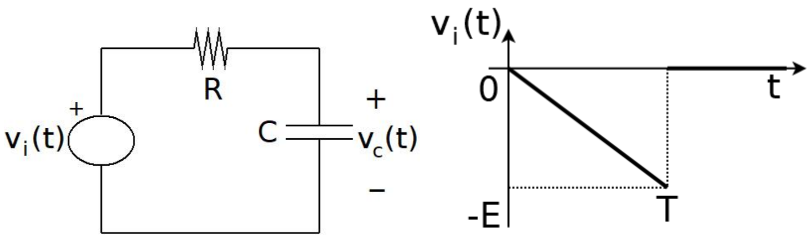
Pregunta 15

Al circuito de la figura, con datos previos nulos, se le aplica a partir de $t = 0$ la tensión de la gráfica, con $T = RC$ segundos. Resolviendo por tramos, calcular la corriente $i(t)$ que entrega la fuente y la tensión $v_C(t)$ para todo instante positivo.



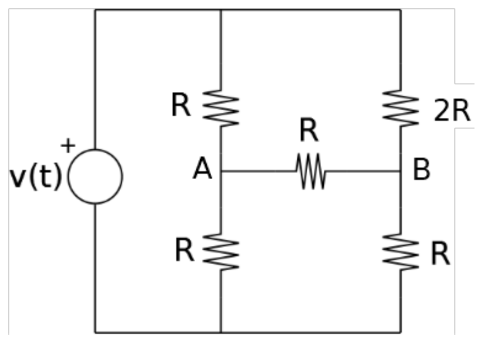
Preguntas 16

Al circuito de la figura, con datos previos nulos, se le aplica a partir de $t = 0$ la tensión de la gráfica, con $T = 2RC$ segundos. Resolviendo por tramos, calcular la corriente $i(t)$ que entrega la fuente y la tensión $v_C(t)$ para todo instante positivo.



0.1. SOLUCIONES

Pregunta 1



Se considera el circuito de la figura.

(a) Hallar la resistencia equivalente vista por la fuente. (Sugerencia: aplicar transfiguración estrella-triángulo o triángulo-estrella).

Hacemos la transfiguración triángulo-estrella en el triángulo de abajo. Al ser tres resistencias iguales de valor R, la estrella resultante está formada por tres resistencias iguales de valor $R/3$. Al dibujar el circuito resultante, vemos que nos queda la impedancia vista por la fuente es la siguiente:

$$R_{eq} = \left(\left(R + \frac{R}{3} \right) \middle\| \left(2R + \frac{R}{3} \right) \right) + \frac{R}{3} = \left(\left(\frac{4R}{3} \right) \middle\| \left(\frac{7R}{3} \right) \right) + \frac{R}{3}$$

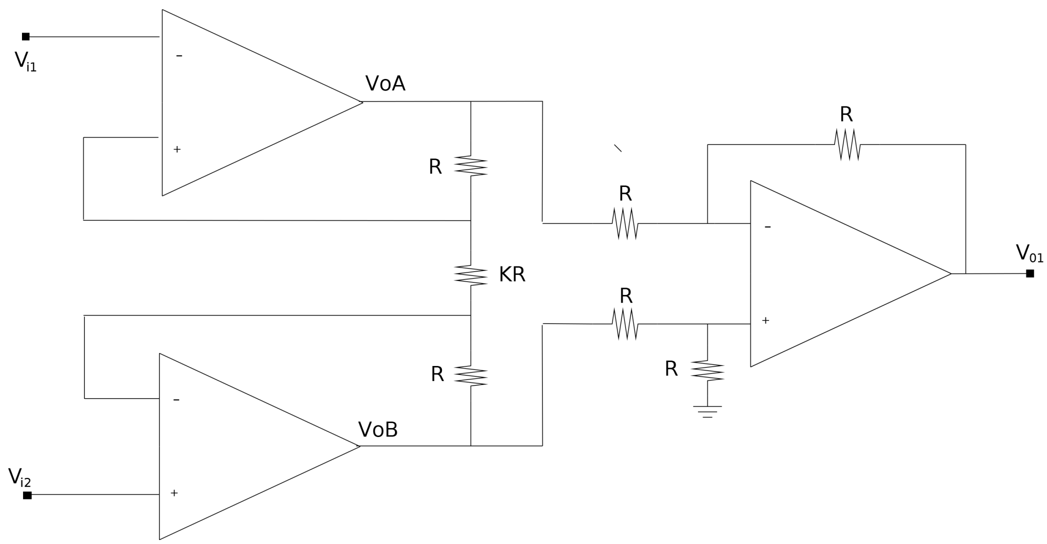
$$R_{eq} = \left(\frac{\frac{4R}{3} \cdot \frac{7R}{3}}{\frac{4R}{3} + \frac{7R}{3}} \right) + \frac{R}{3} = \left(\frac{\frac{28R^2}{9}}{\frac{11R}{3}} \right) + \frac{R}{3} = \left(\frac{28R}{33} \right) + \frac{R}{3} = \frac{13R}{11}$$

(b) Si la fuente es sinusoidal, de valor eficaz $230V$ y frecuencia $50Hz$, hallar la potencia activa que le entrega a la carga.

Al ser el circuito resistivo, podemos trabajar en fasores o en el tiempo indistintamente. Sabemos que $P = V_{eff}.I_{eff}.cos\varphi$, siendo V_{eff} el valor eficaz de la tensión de la fuente, I_{eff} el valor eficaz de la corriente que entrega la fuente y $\cos\varphi$ el factor de potencia de la carga. Al ser la carga resistiva, su factor de potencia es nulo. El valor eficaz de la corriente vale

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{R_{eq}} \Rightarrow \boxed{P = \frac{V_{eff}^2}{R_{eq}} = \frac{11 \times 230^2 V^2}{13R}}$$

Pregunta 2



(a) En el circuito de la figura, identificar un amplificador diferencial y hallar la ganancia del mismo.

El operacional de más a la derecha se encuentra en una configuración diferencial, con entradas VoA y VoB. Hallemos la ganancia. En todo el análisis que sigue, asumimos dos cosas fundamentales: no entra corriente por las patas + y $-$ de los operacionales, por la resistencia de entrada imfinita, y hay cortocircuito virtual de las patas + y $-$, por la ganancia infinita y por trabajar en la zona lineal. Aplicamos superposición. Anulando VoB, nos queda una configuracón inversora, de ganancia -1, ya que la pata + queda a tierra. Al anular VoA, obtebemos una configuración no inversora, de ganancia 2. Es decir, la respectiva salida duplica la tensión en la pata +. Por otro lado, aplicando divisor de tensión, vemos que la tensión en la pata + es la mitad de VoB. Por lo tanto,

$$V_{01} = V_{oB} - V_{oA} = -(V_{oA} - V_{oB}).$$

(b) En el circuito de la figura, hallar la relación entre la salida $V_{o1}(t)$ y las entradas $V_{i1}(t)$ y $V_{i2}(t)$.

Podemos reconocer un amplificador de instrumentación, que consiste en una etapa de antrada seguida de un amplificador diferencial. Si propagamos las entradas V_{i1} y V_{i2}, nos queda que la caída en la resistencia de valor KR es $V_{i1} - V_{i2}$ y, por lo tanto, la corriente por ella vale $I = \frac{V_{i1} - V_{i2}}{KR}$. Observemos que esa corriente circula por toda la serie de resistencias $R+KR+R$. La tensión en dicha serie vale $(2+K).(v_{i1} - v_{i2})$. Esta tensión es la entrada al amplificador diferencial, que tiene sus dos ramas idénticas, lo que le da ganancia diferencial -1. Entonces,

$$V_{01} = -(2 + K).(V_{i1} - V_{i2})$$

Pregunta 3

Se considera un transformador simple, de inductancias de primario L_1 y L_2 respectivamente e inductancia M, funcionando en régimen sinusoidal. Lo analizaremos como un cuadripolo.

(a) Hallar los parámetros Z.

En régimen sinusoidal, las ecuaciones del transformador simple son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_1(j\omega) & = & L_1 j\omega I_1(j\omega) + Mj\omega I_2(j\omega) \\ V_2(j\omega) & = & L_2 j\omega I_2(j\omega) + Mj\omega I_1(j\omega) \end{array} \right.$$

donde las tensiones de primario y secundario están medidas desde los puntos que señalan la mutua y las corrientes son entrantes por los puntos. Notemos entonces que la convención es la misma que para el análisis estándar de un cuadripolo y que, entonces, las impedancias de vacío resultan ser directamente

$$z_{11} = L1j\omega \quad , \quad z_{12} = z_{21} = Mj\omega \quad , \quad z_{22} = L2j\omega$$

ya que dichas impedancias son las que expresan las tensiones en función de las corrientes.

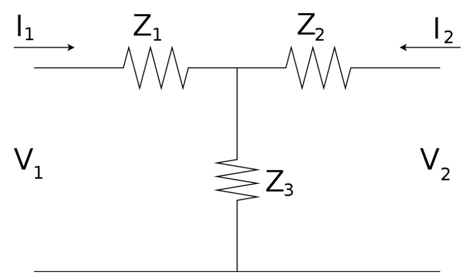
(b) ¿Es recíproco?

La reciprocidad consiste en la identidad de las transferencias cruzadas entre los lados 1 y 2, lo que se traduce en l acondición $z_{12} = z_{21}$, que se cumple en este caso.

(c) Hallar el equivalente T.

Todo cuadripolo recíproco puede ser representado por un cuaripolo equivalente formado por tres impedancias Z_1, Z_2 y Z_3, que forman una T, como se muestra en la figura. El cálculo directo de las impedancias de vacío de este cuadripolo da:

$$z_{11} = Z_1 + Z_3 \quad , \quad z_{12} = z_{21} = Z_3 \quad , \quad z_{22} = Z_2 + Z_3$$



Entonces, los cuadripolos serán equivalentes si tienen las mismas impedancias de vacío, de donde:

$$L_1 j\omega = Z_1 + Z_3 \quad , \quad Mj\omega = Z_3 \quad , \quad L_2 j\omega = Z_2 + Z_3$$

$\Rightarrow$

$$Z_1 = (L_1 - M)j\omega \quad , \quad Z_2 = (L_2 - M)j\omega \quad , \quad Z_3 = Mj\omega$$

Pregunta 4

Se considera un sistema trifásico con un sistema de fuentes en estrella, equilibrado y perfecto. Se define la potencia instantánea que entrega cada fuente de la manera usual, como el producto de la tensión en bornespor la corriente que entrega. Se define la potencia instantánea trifásica como la suma de las potencias instantáneas de cada fuente.

a) Mostrar que si el sistema alimenta una carga equilibrada, entonces la potencia instantánea trifásica es constante.

   Sin pérdida de generalidad, supongamos que las tensiones son:

$$v_1(t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t) \quad , \quad v_2(t) = \sqrt{2}E\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = \sqrt{2}E\cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

   Como la carga es equilibrada, las respectivas corrientes de las fuentes son de la forma

$$i_1(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t - \varphi) \quad , \quad i_2(t) = \sqrt{2}I\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)$$

$$i_3(t) = \sqrt{2}I\cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi\right)$$

   Resaltamos que E e I son los valores eficaces de la tensión y la corriente y φ es el factor de potencia de la carga. La expresión de la potencia instantánea trifásica es:

$$\begin{aligned} p(t) = \sum_{i=1}^{3} v_i(t)i_i(t) = \quad & 2EI\cos(\omega t) \, . \cos(\omega t - \varphi) \\ & +2EI\cos\left(\omega t + \tfrac{2\pi}{3}\right) . \cos\left(\omega t + \tfrac{2\pi}{3} - \varphi\right) \\ & +2EI\cos\left(\omega t + \tfrac{4\pi}{3}\right) . \cos\left(\omega t + \tfrac{4\pi}{3} - \varphi\right) \end{aligned}$$

   Aplicando la identidad de la sugerencia, nos queda

$$\begin{aligned} p(t) = \quad & EI\left(\cos(-\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)\right) \\ & +EI\left(\cos(-\varphi) + \cos\left(2\omega t + \tfrac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right) \\ & +EI\left(\cos(-\varphi) + \cos\left(2\omega t + \tfrac{4\pi}{3} - \varphi\right)\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$p(t) = 3 \times EI \cos(-\varphi) + EI\left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\left(2\omega t + \tfrac{2\pi}{3} - \varphi\right) + \cos\left(2\omega t + \tfrac{4\pi}{3} - \varphi\right)\right]$$

La expresión entre paréntesis rectos se anula, por se la suma de tres sinusoides equilibradas y perfectas, de donde

$$p(t) = 3 \times EI \cos(\varphi)$$

y la potencia instantánea trifásica coincide con la potencia activa trifásica.

b) Deducir, para el caso de una carga equilibrada, la fórmula $P = \sqrt{3}|U_{12}|.|I_1|.\cos(\varphi)$, siendo P la potencia activa trifásica, U_{12} el fasor de la tensión compuesta entre las líneas 1 y 2, en valores eficaces, I_1 el fasor de la corriente por la línea 1, en valores eficaces, y $\cos(\varphi)$ el factor de potencia de la carga.

Al ser una carga equilibrada, la relación entre el valor eficaz de la tensión de línea y de la de fase es:

$$|U_{12}| = \sqrt{3}.E$$

de donde

$$p(t) = P = 3 \times \frac{|U_{12}|}{\sqrt{3}} I \cos(\varphi) = \sqrt{3}.|U_{12}|.I\cos(\varphi)$$

(Recordar que $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}.[cos(a+b) + cos(a-b)]$)

Pregunta 5

(a) Se considera una línea de transmisión sin pérdidas, de impedancia característica Z_{linea}, terminada con una impedancia Z_L. La siguiente expresión representa la impedancia vista a una distancia d de la carga:

$$Z(d) = Z_{linea} \cdot \frac{Z_L + jZ_{linea} . \tan \beta d}{Z_{linea} + jZ_L . \tan \beta d}$$

Hallar la expresión de la impedancia vista a la entrada de un transformador de 1/4 longitud de onda, de impedancia característica Z_{transf} cuando se lo termina con una impedancia Z_L.

Para el caso de un transformador de cuarta longitud de onda, de impedancia característica Z_{transf}, terminado con Z_L, la expresión anterior resulta ser

$$Z(l) = Z_{transf} \cdot \frac{Z_L + jZ_{transf} . \tan \beta l}{Z_{transf} + jZ_L . \tan \beta l}$$

con l de la forma $(2n+1)\lambda/4$. Entonces

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} . (2n+1) \frac{\lambda}{4} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \beta l = +\infty$$

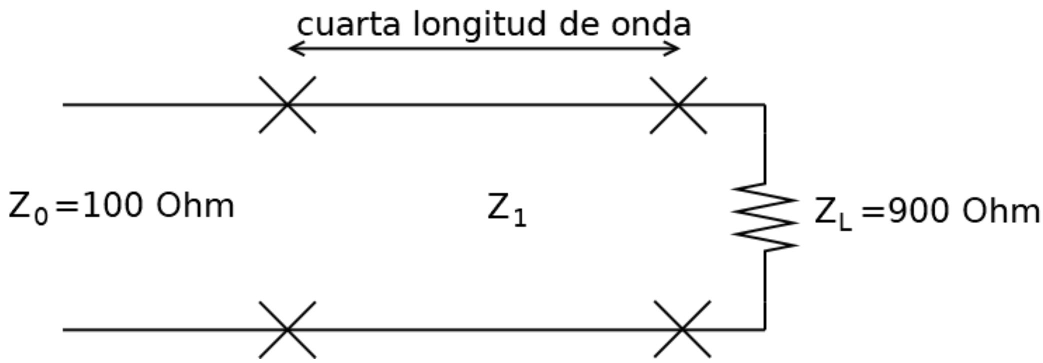
Entonces, la impedancia vista a la entrada del transformador es

$$Z(l) = \frac{Z_{transf}^2}{Z_L}$$

(b) Se quiere adaptar una impedancia Z_L a una línea de transmisión de impedancia característica Z_0. Para ello se utiliza un transformador de cuarta longitud de onda, de impedancia característica Z_1, como se muestra en la figura. ¿Qué valor debe tener Z_1 para lograr la adaptación de la carga?

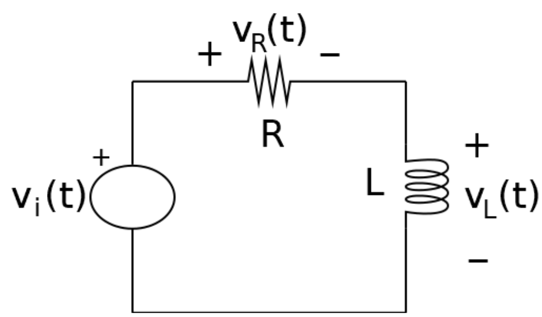
Para lograr la adaptación, se debe cumplir que la impedancia vista a la entrada del transformador sea Z_0, así la línea queda bien terminada y no hay onda reflejada. De donde

$$Z_0 = \frac{Z_1^2}{Z_L} \Rightarrow Z_1 = \sqrt{Z_0 . Z_L} = \sqrt{100 \times 900} \Omega = 300 \Omega$$



Preguntas 6

Se considera el siguiente circuito, en régimen sinusoidal:



(a) Hacer un diagrama fasorial en el que se muestren los fasores V_i, I, V_R y V_L.

Pasamos al circuito equivalente en fasores. Las ecuaciones del circuito son las siguientes:

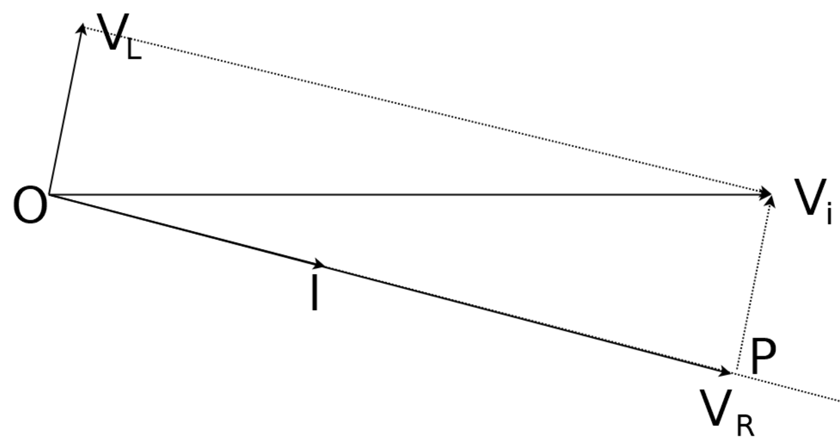
$$V_i(j\omega) = V_R(j\omega) + V_L(j\omega) \quad , \quad I(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{R + Lj\omega}$$

$$V_R(j\omega) = R.I(j\omega) = \frac{R}{R + Lj\omega}.V_i(j\omega)$$

$$V_L(j\omega) = Lj\omega.I(j\omega) = \frac{Lj\omega}{R + Lj\omega}.V_i(j\omega)$$

Observemos que el fasor V_R es colineal con el de la corriente, en tanto el fasor V_L es perpendicular a ella, y la adelanta 90 grados.

Por otra parte, vemos que el fasor de corriente atrasa al de tensión un ángulo agudo, igual a la fase del complejo $R + Lj\omega$ (la impedancia que ve la fuente). El siguiente diagrama representa los fasores anteriores, referidos al fasor de la fuente de tensión.



(b) En dicho diagrama, representar la ecuación de Kirchhoff de malla del circuito.

En el diagrama se muestra el paralelogramo que resume la suma vectorial de los fasores V_L y V_R, cuyo resultado es V_i.

(c) Denotemos por O el punto en el que se inicia el fasor V_i e iniciemos el fasor V_R en dicho punto. Sea P el otro extremo del fasor V_R. Bosquejar, justificando, el lugar greométrico que recorre el punto P al variar R desde 0 a $+\infty$.

Notemos que R es la parte real de la impedancia que ve la fuente. Al variar R, se modifica el divisor de tensión que relaciona V_i con V_R, pero siempre se da que el punto P ve el segmento asociado al fasor de tensión de la fuente bajo un ángulo recto, salvo los casos límite $R = 0$ ($V_R = 0$) y $R = \infty$ ($V_R = V_i$). Por lo tanto, el lugar geométrico que recorre el punto P cuando R varía de 0 a $+\infty$ es una semicircunferencia (lugar geométrico de Thales).

Pregunta 7

Se considera una componente eléctrica funcionando en régimen sinusoidal, con tensión en bornes $v(t) = A_V.\cos(\omega_0 t)$ y corriente $i(t) = A_I.\cos(\omega_0 t + \Phi)$, medidas de la forma estándar (la corriente en el sentido de la caída).

(a) i) Definir la impedancia de la componente funcionando en régimen sinusoidal.

La impedancia Z se define como el cociente entre los fasores de tensión (V) y corriente (I).

$$Z = \frac{V}{I}$$

siendo V eI tales que

$$v(t) = re\left[V.e^{j\omega_0 t}\right] \quad , \quad i(t) = re\left[I.e^{j\omega_0 t}\right]$$

ii) Expresar la impedancia en función de los datos disponibles.

De acuerdo con la definición de fasor asociado a una señal sinusoidal, tenemos que

$$V = A_V.e^{j0} \quad , \quad I = A_I.e^{j\Phi}$$

De donde $Z = \frac{V}{I} = \frac{A_V}{A_I}.e^{-j\Phi}$

(b) A partir de la definición de potencia activa de la componente:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t).i(t)dt$$

<u>demostrar</u> la fórmula de cálculo $P = re(V_{eff}\bar{I}_{eff})$, siendo V_{eff} e I_{eff} los fasores (**en valores eficaces**) asociados respectivamente a la tensión $v(t)$ y la corriente $i(t)$.

Escribimos la tensión y la corriente en el tiempo en función de los fasores y calculamos la integral.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t).i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T re\left[V.e^{j\omega_0 t}\right].re\left[I.e^{j\omega_0 t}\right].dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{V.e^{j\omega_0 t} + \bar{V}.e^{-j\omega_0 t}}{2}\right].\left[\frac{I.e^{j\omega_0 t} + \bar{I}.e^{-j\omega_0 t}}{2}\right].dt$$

$$= \frac{1}{4T}\int_0^T \left[V.I.e^{j2\omega_0 t} + V.\bar{I} + \bar{V}.I + \bar{V}.\bar{I}.e^{-j2\omega_0 t}\right].dt$$

$$= \frac{1}{4T}\int_0^T \left[V.\bar{I} + \bar{V}.I\right].dt + \frac{1}{4T}\int_0^T \left[V.I.e^{j2\omega_0 t}\right].dt + \frac{1}{4T}\int_0^T \left[\bar{V}.\bar{I}.e^{-j2\omega_0 t}\right].dt$$

Las dos últimas integrales se anulan, ya que esenciamente se integra una sinusoide en dos periodos exactos. Por lo tanto

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t).i(t)dt = \frac{1}{4T}\int_0^T \left[V.\bar{I} + \bar{V}.I\right].dt = \frac{1}{4T}\int_0^T 2re[V.\bar{I}].dt = \frac{re[V.\bar{I}]}{2}$$

Si en lugar de trabajar con fasores asociados a las amplitudes, trabajamos con valores eficaces, se cumple que

$$P = \frac{re[V.\bar{I}]}{2} = \frac{re[\sqrt{2}.V_{eff}.\sqrt{2}.\bar{I}_{eff}]}{2} = re[V_{eff}.\bar{I}_{eff}]$$

Preguntas 8

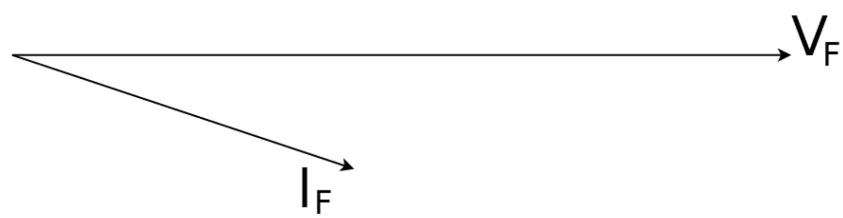
Se considera un sistema **funcionando en régimen sinusoidal**, en el que una fuente de tensión sinusoidal alimenta un motor, que puede modelarse como una impedancia inductiva $Z = R + jX$.

(a) Bosquejar el diagrama fasorial del circuito, donde aparezcan la tensión en bornes del motor y la corriente inyectada al motor.

Aplicamos las leyes de Kirchhoff al circuito equivalente en fasores. Sea V_F el fasor asociado a la tensión de la fuente, que efectivamente es la tensión en bornes del motor, e I_F la corriente que entrega la fuente. Obtenemos que

$$I_F = \frac{V_F}{R + jX}$$

Como la impedancia del motor es inductiva (X positiva), el argumento de $Z = R + jX$ está entre 0 y 90 grados, por lo que la corriente atrasa a la tensión. El diagrama fasorial es el que sigue:



(b) Muestre que, colocando una componente lineal de manera adecuada, siempre es posible compensar la potencia reactiva que entrega la fuente sin alterar la potencia activa consumida por el motor.

La potencia reactiva consumida por el motor a la fuente vale (asumimos que trabajamos con valores eficaces):

$$Q_M = im[V_F \overline{I_F}] = im\left[V_F.\overline{\frac{V_F}{R + jX}}\right] = |V_F|^2.im\left[\frac{1}{R - jX}\right]$$

$$Q_M = |V_F|^2.im\left[\frac{R + jX}{R^2 + X^2}\right] = |V_F|^2.\frac{X}{R^2 + X^2}$$

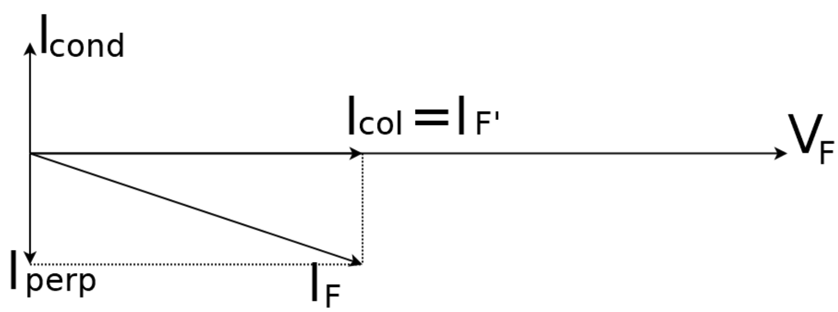
que es positiva pues X es positiva. Para compensar la potencia reactiva, podemos colocar un condensador en paralelo al motor. Conectado de esa manera, el condensador entrega una reactiva igual a

$$Q_C = im[V_F \overline{I_C}] = -|V_F|^2.C\omega$$

siendo ω la frecuencia angular de trabajo. Imponiendo $Q_M = -Q_C$, obtenemos el valor necesario de C:

$$|V_F|^2.\frac{X}{R^2 + X^2} = |V_F|^2.C\omega \Rightarrow C = \frac{X}{\omega(R^2 + X^2)}$$

Geométricamente, agregar el condensador permite hacer que la nueva corriente de la fuente, I'_F, quede colineal con la tensión.



Pregunta 9

Sea un circuito lineal funcionando en régimen sinusoidal, de transferencia en régimen

$$H(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V(j\omega)}$$

siendo $V(j\omega)$ el fasor asociado a la fuente de tensión de entrada del circuito e $I(j\omega)$ el fasor asociado a la corriente que el circuito en régimen le consume a la fuente de tensión de entrada. Sean P_ω y Q_ω las potencias activa y reactiva consumida por el circuito, a la frecuencia de trabajo ω.

¿Qué condiciones debe cumplir $H(j\omega)$ para que las siguientes afirmaciones sean ciertas?

(a) Existe una frecuencia de trabajo ω_1 para la cual $P_{\omega_1} = 0$.

De forma general, sabemos que en régimen sinusoidal, ante una entrada de la forma $v(t) = A_{\omega_0}\cos(\omega_0 t)$, el circuito responde en régimen con una corriente de la forma

$$i(t) = A_{\omega_0}.|H(j\omega_0)|.\cos\left(\omega_0 t + arg\, H(j\omega_0)\right)$$

Las expresiones para las potencias activa y reactiva a esa frecuencia de trabajo resultan ser

$$P_{\omega_0} = \frac{1}{2}.A_{\omega_0}^2.|H(j\omega_0)|\cos\left(arg\, H(j\omega_0)\right)$$

$$Q_{\omega_0} = \frac{1}{2}.A_{\omega_0}^2.|H(j\omega_0)|\sin\left(arg\, H(j\omega_0)\right)$$

Entonces, para tener activa nula, debe existir una frecuencia de tabajo ω_1 tal que $arg.\, H(j\omega_1)$ sea múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$. También es posible si se anula $|H(j\omega_0)|$.

(b) Existe una frecuencia de trabajo ω_2 para la cual $Q_{\omega_2} = 0$.

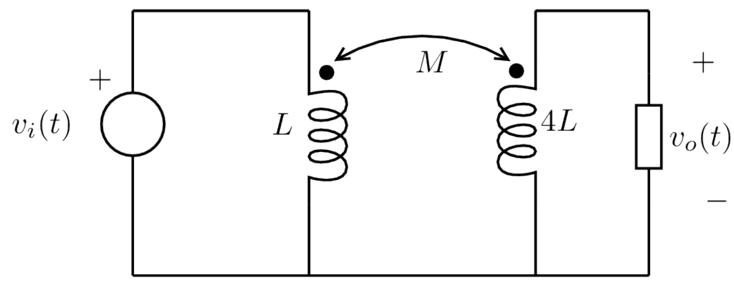
Razonando de forma igual a la parte anterior, para tener reactiva nula, debe existir una frecuencia de tabajo ω_2 tal que $arg\, H(j\omega_2)$ sea múltiplo de π. También es posible si se anula $|H(j\omega_2)|$

(c) Existe una frecuencia de trabajo ω_3 para la cual $|P_{\omega_3}| = |Q_{\omega_3}|$.

Razonando como antes, para que se igualen las potencias activa y reactiva, se debe cumplir que exista una frecuencia de trabajo ω_3 tal que

$$\cos\left(arg\, H(j\omega_3)\right) = \sin\left(arg\, H(j\omega_3)\right) \Rightarrow arg\, H(j\omega_3) = \pm\frac{\pi}{4}\ (\pm 2k\pi)$$

Preguntas 10



Se considera el transformador **perfecto** de la figura. El primario está alimentado por una fuente sinusoidal y en el secundario se ha conectado una impedancia Z.

(a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal en tensión $H_T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. Verificar que no depende de la impedancia conectada al secundario.

Las ecuaciones del transformador son la siguientes:

$$\begin{cases} V_1(j\omega) &= L_1 j\omega I_1(j\omega) + Mj\omega I_2(j\omega) \\ V_2(j\omega) &= L_2 j\omega I_2(j\omega) + Mj\omega I_1(j\omega) \end{cases}$$

donde V_1 y V_2 son respectivamente las tensiones del primario y el secundario, medidas desde los puntos, e I_1 e I_2 son las corrientes del primario y del secundario, entrantes por los puntos. Las inductancias del primario y secundario valen $L_1 = L$, $L_2 = 4L$. Al ser un transformador perfecto, se cumple que $M = \sqrt{L_1.L_2} = \sqrt{4L^2} = 2L$. Entonces

$$\begin{cases} V_1(j\omega) &= Lj\omega I_1(j\omega) + 2Lj\omega I_2(j\omega) \\ V_2(j\omega) &= 4Lj\omega I_2(j\omega) + 2Lj\omega I_1(j\omega) \end{cases}$$

Podemos ver que se cumple $V_2 = 2V_1$. Por cómo es la conexión, tenemos que $V_1 = V_i$ y que

$$V_o = V_2 = -Z.I_2$$

donde el signo de menos se debe a que I_2 es entrante por el punto. Entonces

$$H_T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = 2$$

(b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal en corriente $H_I(j\omega) = \frac{I_Z(j\omega)}{I_F(j\omega)}$, siendo I_Z el fasor de corriente por la carga del secundario e I_F la corriente entregada al primario.

Para hallar la transferencia en corriente, continuamos el razonamiento de la parte anterior. De la malla del secundario sabemos que $V_o = V_2 = -Z.I_2$. Sabemos que $I_F = I_1$ y que $I_Z = -I_2$. Usando la segunda ecuación del transformador, obtenemos

$$-Z.I_2(j\omega) = Z.I_Z(j\omega) = 4Lj\omega I_2(j\omega) + 2Lj\omega I_1(j\omega) \Rightarrow I_Z(j\omega) = \frac{I_F(j\omega)2Lj\omega}{Z + 4Lj\omega}$$

De donde

$$H_I(j\omega) = \frac{I_Z(j\omega)}{I_F(j\omega)} = \frac{2Lj\omega}{Z + 4Lj\omega}$$

Pregunta 11

Se considera la siguiente transferencia en régimen de primer orden

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + a}{j\omega + ka}$$

con k y a positivos y $k > 1$.

(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

En primer término, identificamos las frecuencias críticas. En este caso, son a y ka. Para hacer la deducción de los diagramas de Bode asintóticos, vamos a hacer un análisis por bandas. Tenemos tres bandas:

$$\omega \ll a \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{a}{ka} = \frac{1}{k} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & -20\log(k)\, dB\ (negativo\, en\, dB) \\ arg(H) & \approx & 0^o \end{cases}$$

$$a \ll \omega \ll ka \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{ka} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(\omega) - 20log(ka)\, dB \\ arg(H) & \approx & +90^o\ (ó\ -270^o) \end{cases}$$

Como $-a$ es una raíz simple, sólo puede aportar una variación neta de 90 grados, por lo que descartamos los -270 grados.

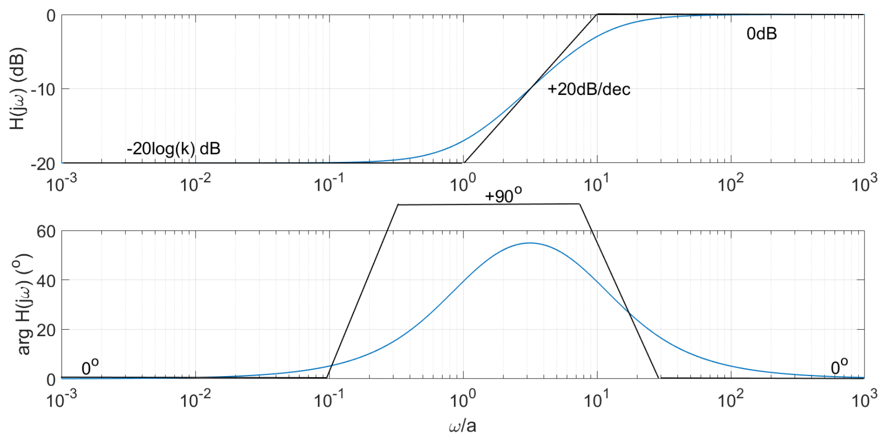
$$ka \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{j\omega} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 0\, dB \\ arg(H) & \approx & 0^o\ (ó\ \pm 360^o) \end{cases}$$

Nuevamente, como $-ka$ es una raíz simple, sólo puede aportar una variación neta de 90 grados, por lo que descartamos los ± 360 grados. La siguiente figura muestra los diagramas de Bode asintóticos y reales.

(b) Bosquejar los diagramas reales.

Se muestran en la misma figura. Observar que por la aproximación asintótica, en baja frecuencia, el diagrama real de módulo está por encima del aproximado, en tanto en alta frecuencia está por debajo.

(c) Mostrar que existe una frecuencia ω_0 (y hallar el valor exacto de la misma) a la cual el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico coinciden.



Observando los bosquejos hechos, podemos ver que entre las frecuencias a y ka es que existe una frecuencia ω_1 donde los diagramas real y asintótico coinciden. Planteamos la identidad algebraica. Tener presente que si k es muy grande, entonces las distancias entre los diagramas real y asintótico en las frecuencias singulares se aproximan al caso de primer orden (3dB).

$$|H_{re}(j\omega_1)| = \left|\frac{j\omega_1 + a}{j\omega_1 + ka}\right| = \left|\frac{j\omega_1}{ka}\right| = |H_{as}(j\omega_1)|$$

Elevamos al cuadrado y operamos:

$$\frac{\omega_1^2 + a^2}{\omega_1^2 + k^2a^2} = \frac{\omega_1^2}{k^2a^2} \Rightarrow k^2a^2.(\omega_1^2+a^2) = \omega_1^2.(\omega_1^2+k^2a^2) \Rightarrow k^2a^4 = \omega_1^4 \Rightarrow \omega_1 = a.\sqrt{k}$$

Recordemos en primer lugar que estamos buscando una solución positiva. Observemos luego que la frecuencia $\omega_1 = a.\sqrt{k}$ está entre a y ak y coincide con la media geométrica de las frecuencias singulares.

Pregunta 12

Se considera la siguiente transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

siendo $0 < \zeta^2 < 1$ y $\omega_n > 0$.

(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando su construcción.

En primer término, identificamos las frecuencias críticas. Al ser $\zeta^2 < 1$, tenemos dos raíces complejas conjugadas, de módulo ω_n. Entonces, tenemos dos bandas de análisis:

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 0\,dB \\ arg(H) & \approx & 0^o \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2} = -\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 40\log(\omega_n) - 40log(\omega)\,dB \\ arg(H) & \approx & \pm 180^o \end{cases}$$

Para ver si la fase crece o decrece, evaluamos en un punto intermedio. Elegimos $\omega = \omega_n$. Entonces

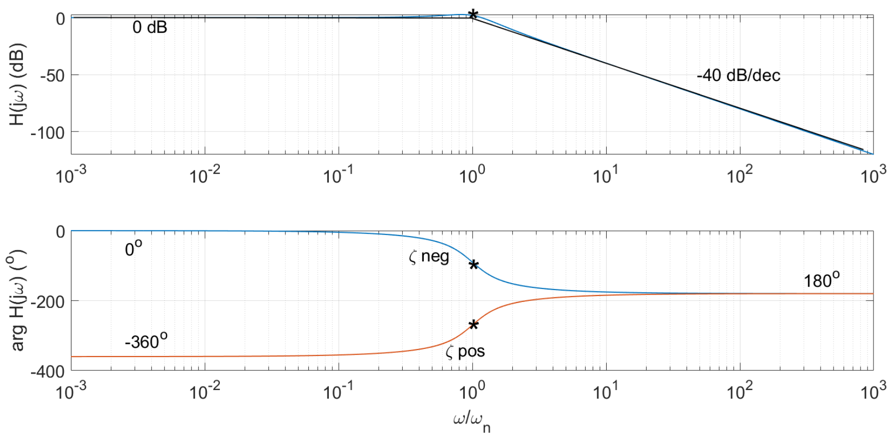
$$H(j\omega_n) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{1}{j2\zeta}$$

cuyo argumento es negativo si ζ es positivo y positivo si ζ es negativo. Con la información que tenemos, hay dos posibles diagramas de fase, según el signo de ζ.

La siguiente figura muestra los diagramas de Bode asintóticos y reales.

(b) A los diagramas anteriores, incorporarle el valor exacto de la transferencia en la frecuencia de trabajo ω_n, explicando claramente e rol del parámetro ζ. Bosqueje los diagramas reales.

Como ya vimos, $H(j\omega_n) = \frac{1}{j2\zeta}$. Agregamos el valor de módulo y fase en esta frecuencia, discutiendo según el signo de ζ.



(c) Hallar $\zeta \geq 0$ tal que $|H(j\omega_n)| = 28db$.

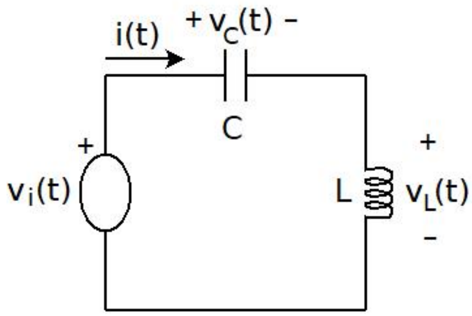
Imponemos la identidad

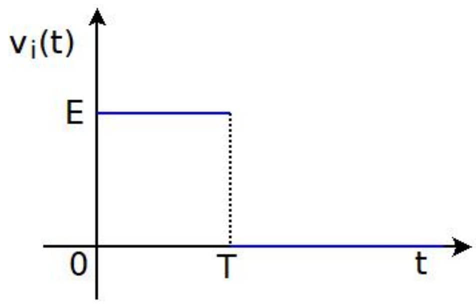
$$20 \log \left(\frac{1}{2\zeta} \right) = 28dB \Rightarrow \log \left(\frac{1}{2\zeta} \right) = 1,4 \Rightarrow \frac{1}{2\zeta} = 10^{1,4} \Rightarrow \zeta \approx 0{,}02$$

Preguntа 13

El circuito de la figura de la izquierda se encuentra inicialmente en reposo. Se aplica la tensión $v_i(t)$ de la figura de la derecha, con $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Resolviendo por tramos, calcular las tensiones $v_L(t)$ y $v_C(t)$ para todo instante positivo.





Mirando el circuito, identificamos dos tramos. Un primer tramo entre $[0, T]$, donde el circuito está con datos previos nulos y la entrada es un escalón de amplitud E. Un segundo tramo en el que la entrada es nula y el circuito tiene datos previos no nulos, iguales los valores de la tensión del condensador y la corriente por la inductancia al final del tramo anterior.

Para resolver cada tramo, pasamos al circuito equivalente en Laplace, considerando los datos previos en los modelos del condensador y la inductancia.

Tramo 1
La corriente por el circuito vale

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{E}{s}Cs}{LCs^2+1} = \frac{CE}{LCs^2+1} = \frac{E}{L}.\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}} = \frac{E\sqrt{C}}{\sqrt{L}}.\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{s^2+\frac{1}{LC}}$$

En el tiempo, definiendo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

$$i(t) = Y(t).\sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) = Y(t).\sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin\left(\omega_0 t\right)$$

La tensión en el condensador la podemos hacer en Laplace o en el tiempo.
En el tiempo:

$$i(t) = C\frac{dv_C}{dt} \Rightarrow v_C(t) = \int_0^t \frac{1}{C}i(x)dx = \int_0^t \frac{1}{C}\sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin(\omega_0 x)\,dx = \int_0^t \omega_0.E.\sin(\omega_0 x)\,dx$$

$$v_C(t) = Y(t).E.\left[1-\cos(\omega_0 t)\right]$$

En Laplace, hacemos divisor de tensión:

$$V_C(s) = V_i(s).\frac{\frac{1}{Cs}}{Ls+\frac{1}{Cs}} = \frac{E}{s}.\frac{1}{LCs^2+1} = \frac{E}{LC}.\frac{1}{s\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)}$$

Para antitransformar, vamos hacia fracciones simples, haciendo aparecer las expresiones estándar de las sinusoidales.

$$V_C(s) = \frac{E}{LC}.\left[\frac{A_1}{s}+\frac{A_2 s + A_3}{s^2+\frac{1}{LC}}\right]$$

Podemos hacer tapadita para sacar A_1 o, directamente, hacer común denominador e igualar coeficientes.

$$A_1.\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)+A_2s^2+A_3s = (A_1+A_2)s^2+A_3s+\frac{A_1}{LC} = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A_1 & = & LC \\ A_2 & = & -A_1 = -LC \\ A_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Entonces

$$V_C(s) = \frac{E}{LC}.\left[\frac{LC}{s}-\frac{LCs}{s^2+\frac{1}{LC}}\right] = E.\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}}\right] \Rightarrow v_C(t) = Y(t).E.[1-\cos(\omega_0 t)]$$

Tramo 2
Calculemos los datos previos para este tramo:

$$v_{C0} = v_C(t=T) = E.[1-\cos(\omega_0 T)] \quad , \quad i_{L0} = i(t=T) = \sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin(\omega_0 T)$$

Como $T = 2\pi\sqrt{LC} = \frac{2\pi}{\omega_0}$, de donde $\omega_0 T = 2\pi$. Entonces

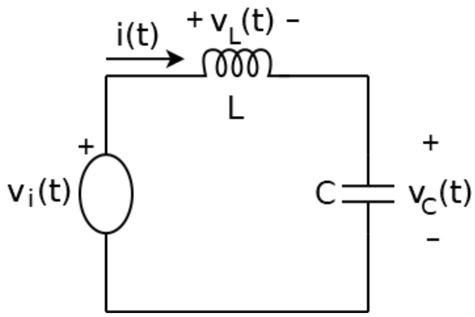
$$v_{C0} = v_C(t=T) = E.[1-\cos(2\pi)] = 0 \quad , \quad i_{L0} = i(t=T) = \sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin(2\pi) = 0$$

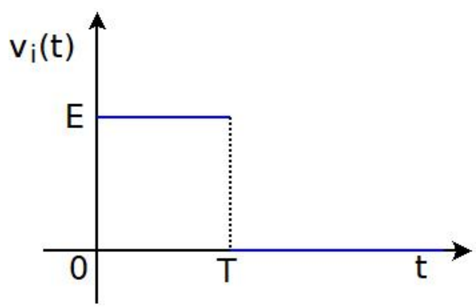
Entonces, en el segundo tramo la entrada es nula y los datos previos son nulos, por lo que el circuito permanece en reposo a partir de T.

Preguntа 14

El circuito de la figura de la izquierda se encuentra inicialmente en reposo. Se aplica la tensión $v_i(t)$ de la figura de la derecha, con $T = 4\pi\sqrt{LC}$.

Resolviendo por tramos, calcular las tensiones $v_L(t)$ y $v_C(t)$ para todo ins-





tante positivo.

Mirando el circuito, identificamos dos tramos. Un primer tramo entre $[0, T]$, donde el circuito está con datos previos nulos y la entrada es un escalón de amplitud E. Un segundo tramo en el que la entrada es nula y el circuito tiene datos previos no nulos, iguales los valores de la tensión del condensador y la corriente por la inductancia al final del tramo anterior.

Para resolver cada tramo, pasamos al circuito equivalente en Laplace, considerando los datos previos en los modelos del condensador y la inductancia.

Tramo 1
La corriente por el circuito vale

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{E}{s}Cs}{LCs^2+1} = \frac{CE}{LCs^2+1} = \frac{E}{L}.\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}} = \frac{E\sqrt{C}}{\sqrt{L}}.\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{s^2+\frac{1}{LC}}$$

En el tiempo, definiendo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

$$i(t) = Y(t).\sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) = Y(t).\sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin(\omega_0 t)$$

La tensión en el condensador la podemos hacer en Laplace o en el tiempo.
En el tiempo:

$$i(t) = C\frac{dv_C}{dt} \Rightarrow v_C(t) = \int_0^t \frac{1}{C} i(x)dx = \int_0^t \frac{1}{C}\sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin(\omega_0 x)\,dx = \int_0^t \omega_0.E.\sin(\omega_0 x)\,dx$$

$$v_C(t) = Y(t).E.\left[1-\cos(\omega_0 t)\right]$$

En Laplace, hacemos divisor de tensión:

$$V_C(s) = V_i(s).\frac{\frac{1}{Cs}}{Ls+\frac{1}{Cs}} = \frac{E}{s}.\frac{1}{LCs^2+1} = \frac{E}{LC}.\frac{1}{s\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)}$$

Para antitransformar, vamos hacia fracciones simples, haciendo aparecer las expresiones estándar de las sinusoidales.

$$V_C(s) = \frac{E}{LC}.\left[\frac{A_1}{s} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2+\frac{1}{LC}}\right]$$

Podemos hacer tapadita para sacar A_1 o, directamente, hacer común denominador e igualar coeficientes.

$$A_1.\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)+A_2s^2+A_3s = (A_1+A_2)s^2+A_3s+\frac{A_1}{LC} = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A_1 & = & LC \\ A_2 & = & -A_1 = -LC \\ A_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Entonces

$$V_C(s) = \frac{E}{LC}.\left[\frac{LC}{s} - \frac{LCs}{s^2+\frac{1}{LC}}\right] = E.\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}}\right] \Rightarrow v_C(t) = Y(t).E.[1-\cos(\omega_0 t)]$$

Tramo 2
Calculemos los datos previos para este tramo:

$$v_{C0} = v_C(t=T) = E.[1-\cos(\omega_0 T)] \quad , \quad i_{L0} = i(t=T) = \sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin(\omega_0 T)$$

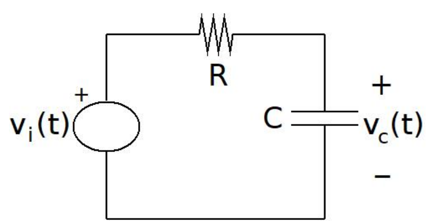
Como $T = 4\pi\sqrt{LC} = \frac{4\pi}{\omega_0}$, de donde $\omega_0 T = 4\pi$. Entonces

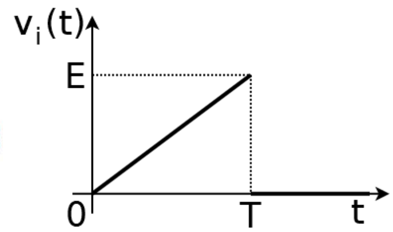
$$v_{C0} = v_C(t=T) = E.[1-\cos(4\pi)] = 0 \quad , \quad i_{L0} = i(t=T) = \sqrt{\frac{C}{L}}.E.\sin(4\pi) = 0$$

Entonces, en el segundo tramo la entrada es nula y los datos previos son nulos, por lo que el circuito permanece en reposo a partir de T.

Preguntа 15

Al circuito de la figura, con datos previos nulos, se le aplica a partir de $t = 0$ la tensión de la gráfica, con $T = RC$ segundos. Resolviendo por tramos, calcular la corriente $i(t)$ que entrega la fuente y la tensión $v_C(t)$ para todo instante positivo.





Mirando el circuito, identificamos dos tramos. Un primer tramo entre $[0, T]$, donde el circuito está con datos previos nulos y la entrada es una rampa de pendiente E/T. Un segundo tramo en el que la entrada es nula y el circuito tiene dato previo no nulo, igual al valor de la tensión del condensador al final del tramo anterior.

Para resolver cada tramo, pasamos al circuito equivalente en Laplace, considerando el dato previo en el modelo del condensador.

Tramo 1
En este tramo, $V_i(s) = \frac{E}{Ts^2}$. La corriente por el circuito vale

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{E}{Ts^2}.Cs}{RCs + 1} = \frac{E}{RT}.\frac{1}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

Para antitransformar, hacemos fracciones simples:

$$I(s) = \frac{E}{RT}.\left[\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \frac{1}{RC}}\right] = \frac{E}{RT}.\left[\frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + \frac{1}{RC}}\right] = \frac{CE}{T}.\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right]$$

Para hallar A_1 y A_2 hemos usado *tapadita*, aunque podríamos haber hecho simplemente común denominador. Pasando al tiempo, obtenemos

$$i(t) = Y(t).\frac{CE}{T}.\left[1 - e^{-t/RC}\right]$$

Podemos hallar la tensión del condensador directamente en el tiempo, integrando la corriente, o en Laplace. En el tiempo,

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx = \frac{E}{T}\int_0^t \left[1 - e^{-x/RC}\right] dx = Y(t).\frac{Et}{T} + Y(t).\frac{E}{T}\ RCe^{-x/RC}\Big|_0^t$$

$$v_C(t) = Y(t).\frac{E}{T}\left[t + RC.\left(e^{-t/RC} - 1\right)\right]$$

En Laplace, hacemos divisor de tensión,

$$V_C(s) = V_i(s).\frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{E}{Ts^2}.\frac{1}{RCs+1} = \frac{E}{RCT}.\frac{1}{s^2\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{E}{RCT}.\left[\frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s + \frac{1}{RC}}\right]$$

Las constantes A_1 y A_3 podemos sacarlas por tapadita, o directamente calcular todas haciendo común denominador.

$$A_1.\left(s + \frac{1}{RC}\right) + A_2.s.\left(s + \frac{1}{RC}\right) + A_3.s^2 = (A_2 + A_3)s^2 + \left(A_1 + \frac{A_2}{RC}\right).s + \left(\frac{A_1}{RC}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 &= RC \\ A_2 &= -A_1.RC = -R^2C^2 \\ A_3 &= -A_2 = R^2C^2 \end{cases}$$

Entonces

$$V_C(s) = \frac{E}{RCT}.\left[\frac{RC}{s^2} - \frac{R^2C^2}{s} + \frac{R^2C^2}{s + \frac{1}{RC}}\right] = \frac{E}{T}.\left[\frac{1}{s^2} + RC.\left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{1}{s}\right)\right]$$

Pasando al tiempo,

$$v_C(t) = Y(t).\frac{E}{T}.\left[t + RC.\left(e^{-t/RC} - 1\right)\right]$$

Tramo 2

Calculemos el dato previo para este tramo, teniendo presente que $T = RC$:

$$v_{C0} = v_C(t = T) = \frac{E}{T}.\left[T + RC.\left(e^{-T/RC} - 1\right)\right] = \frac{E}{T}.\left[T + T.\left(e^{-1} - 1\right)\right] = E.e^{-1}$$

Para el segundo tramo, la entrada se anula y tenemos un circuito que descarga el condensador desde el dato previo $v_{C0} = E.e^{-1}$. Podemos hacer el circuito equivalente en Laplace, con la fuente independiente que representa el dato previo, o podemos resolver todo en el tiempo, ya que es simplemente la descarga exponencial del condensador con constante de tiempo RC, que ya hemos visto varias veces en el curso. Definimos un nuevo origen de tiempos, $t' = 0 = t - T$, para simplificar la notación.

Llegamos a la siguiente expresión para la tensión del condensador en el segundo tramo:

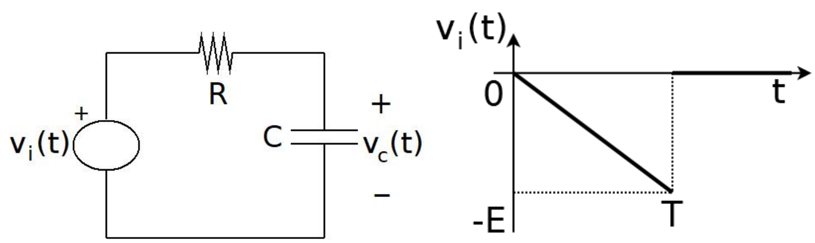
$$v_C(t') = Y(t').v_{C0}.e^{-t'/RC} = E.e^{-1}.e^{-t'/RC}$$

La corriente resulta ser

$$i(t) = C.\frac{dv_C}{dt} = -Y(t').\frac{E.e^{-1}}{R}.e^{-t'/RC}$$

Preguntas 16

Al circuito de la figura, con datos previos nulos, se le aplica a partir de $t = 0$ la tensión de la gráfica, con $T = 2RC$ segundos. Resolviendo por tramos, calcular la corriente $i(t)$ que entrega la fuente y la tensión $v_C(t)$ para todo instante positivo.



Mirando el circuito, identificamos dos tramos. Un primer tramo entre $[0, T]$, donde el circuito está con datos previos nulos y la entrada es una rampa de pendiente $-E/T$. Un segundo tramo en el que la entrada es nula y el circuito tiene dato previo no nulo, igual al valor de la tensión del condensador al final del tramo anterior.

Para resolver cada tramo, pasamos al circuito equivalente en Laplace, considerando el dato previo en el modelo del condensador.

Tramo 1
En este tramo, $V_i(s) = -\frac{E}{Ts^2}$. La corriente por el circuito vale

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{-\frac{E}{Ts^2}.Cs}{RCs + 1} = -\frac{E}{RT}.\frac{1}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

Para antitransformar, hacemos fracciones simples:

$$I(s) = -\frac{E}{RT}.\left[\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \frac{1}{RC}}\right] = -\frac{E}{RT}.\left[\frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + \frac{1}{RC}}\right] = -\frac{CE}{T}.\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right]$$

Para hallar A_1 y A_2 hemos usado *tapadita*, aunque podríamos haber hecho simplemente común denominador. Pasando al tiempo, obtenemos

$$i(t) = -Y(t).\frac{CE}{T}.\left[1 - e^{-t/RC}\right]$$

Podemos hallar la tensión del condensador directamente en el tiempo, integrando la corriente, o en Laplace. En el tiempo,

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx = -\frac{E}{T}\int_0^t \left[1 - e^{-x/RC}\right] dx = -Y(t).\frac{Et}{T} - Y(t).\frac{E}{T}\, RCe^{-x/RC}\Big|_0^t$$

$$v_C(t) = -Y(t).\frac{E}{T}\left[t + RC.\left(e^{-t/RC} - 1\right)\right]$$

En Laplace, hacemos divisor de tensión,

$$V_C(s) = V_i(s).\frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{-E}{Ts^2}.\frac{1}{RCs+1} = \frac{-E}{RCT}.\frac{1}{s^2\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{-E}{RCT}.\left[\frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s + \frac{1}{RC}}\right]$$

Las constantes A_1 y A_3 podemos sacarlas por tapadita, o directamente calcular todas haciendo común denominador.

$$A_1.\left(s + \frac{1}{RC}\right) + A_2.s.\left(s + \frac{1}{RC}\right) + A_3.s^2 = (A_2 + A_3)s^2 + \left(A_1 + \frac{A_2}{RC}\right).s + \left(\frac{A_1}{RC}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A_1 & = & RC \\ A_2 & = & -A_1.RC = -R^2C^2 \\ A_3 & = & -A_2 = R^2C^2 \end{array}\right.$$

Entonces

$$V_C(s) = \frac{-E}{RCT}.\left[\frac{RC}{s^2} - \frac{R^2C^2}{s} + \frac{R^2C^2}{s + \frac{1}{RC}}\right] = -\frac{E}{T}.\left[\frac{1}{s^2} + RC.\left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{1}{s}\right)\right]$$

Pasando al tiempo,

$$v_C(t) = -Y(t).\frac{E}{T}.\left[t + RC.\left(e^{-t/RC} - 1\right)\right]$$

Tramo 2

Calculemos el dato previo para este tramo, teniendo presente que $T = 2RC$:

$$v_{C0} = v_C(t = T = 2RC) = -\frac{E}{2RC}.\left[2RC + RC.\left(e^{-2RC/RC} - 1\right)\right] = -\frac{E}{2}.\left[2 + \left(e^{-2} - 1\right)\right]$$

$$v_{C0} = -E.\left(1 + e^{-2}\right)$$

Para el segundo tramo, la entrada se anula y tenemos un circuito que descarga el condensador desde el dato previo v_{C0}. Podemos hacer el circuito equivalente en Laplace, con la fuente independiente que representa el dato previo, o podemos resolver todo en el tiempo, ya que es simplemente la descarga exponencial del condensador con constante de tiempo RC, que ya hemos visto varias veces en el curso. Definimos un nuevo origen de tiempos, $t' = 0 = t - T$, para simplificar la notación.

Llegamos a la siguiente expresión para la tensión del condensador en el segundo tramo:

$$v_C(t') = Y(t').v_{C0}.e^{-t'/RC} = -E.\left(1 + e^{-2}\right).e^{-t'/RC}$$

La corriente resulta ser

$$i(t) = C.\frac{dv_C}{dt} = Y(t').\frac{E.\left(1 + e^{-2}\right)}{R}.e^{-t'/RC}$$