Teoría de Circuitos

Examen de febrero de 2020

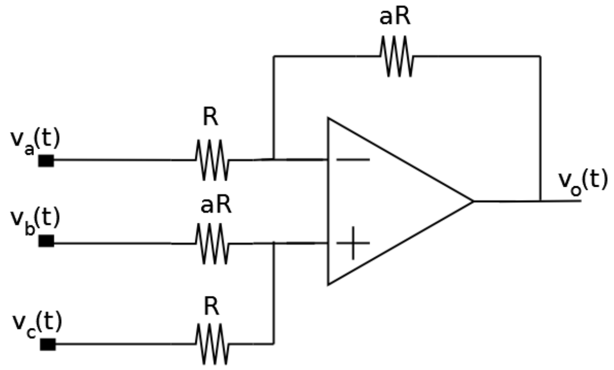
Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

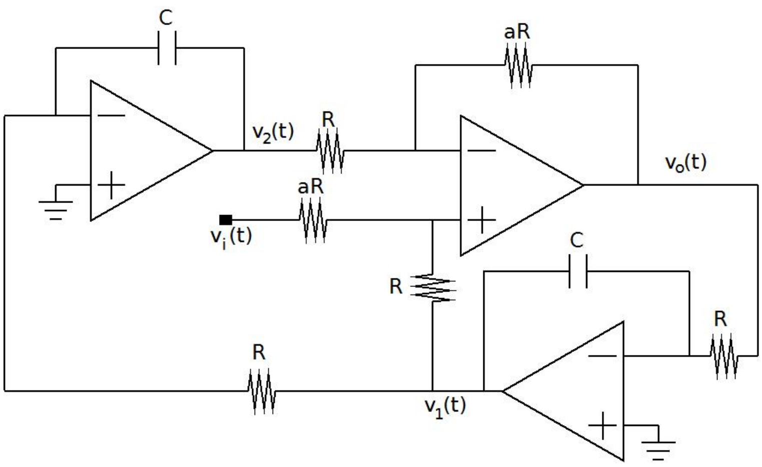
En el circuito de la figura, se cumple que

$v_o(t) = -a.v_a(t) + v_b(t) + a.v_c(t)$.

donde a es un parámetro positivo.



(a) Se considera el siguiente circuito, con $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.



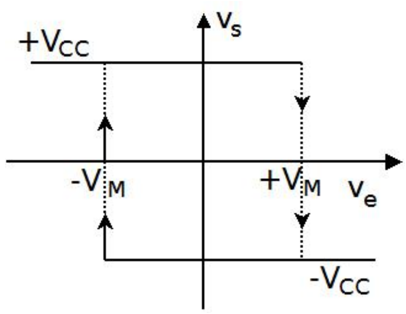
i) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

ii) Hallar $a > 0$ para que $H(s)$ tenga una raíz negativa $-2\omega_0$ doble en el denominador.

iii) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de H, explicando claramente su construcción.

(b) Se excita el circuito de la parte a) con la señal $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t)$, con $A > 0$. La salida en régimen se inyecta en un Schmitt trigger cuya relación entrada-salida se muestra en la figura.

Hallar el mínimo valor de A en función de V_M que asegura que la salida del circuito no lineal es una onda cuadrada. **JUSTIFICAR!!!**



Problema 2

(a) Se considera una fuente de tensión real modelada por su equivalente Thévenin, como una fuente ideal de valor $v_{Th}(t) = \sqrt{2}E_{Th}\cos(\omega_0 t)$ y una impedancia en serie de valor $Z_{Th} = R + jX$. Se la conecta a una línea de transmisión sin pérdidas, de longitud L e impedancia característica Z_0, terminada en una impedancia de carga Z_L. Se recuerda que la impedancia vista al comienzo de la línea es

$$Z_{in} = Z_0.\frac{Z_L + jZ_0\tan(\beta L)}{Z_0 + jZ_L\tan(\beta L)}$$

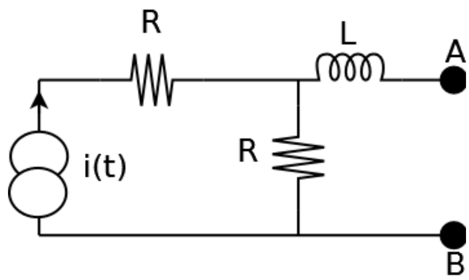
i) Sabiendo que L es un múltiplo entero de la longitud de onda de la señal, hallar el valor eficaz de la tensión a la entrada de la línea.

ii) Hallar Z_L en función de los parámetros de la fuente real para que se disipe la máxima potencia activa posible en Z_L. (Si utiliza un resultado teórico, enúncielo correctamente, sin demostrarlo).

(b) Se considera el siguiente circuito funcionando en régimen sinusoidal, excitado por una fuente sinusoidal de corriente $i(t)$ de frecuencia ω_0, valor eficaz I_{eff} y fase nula.

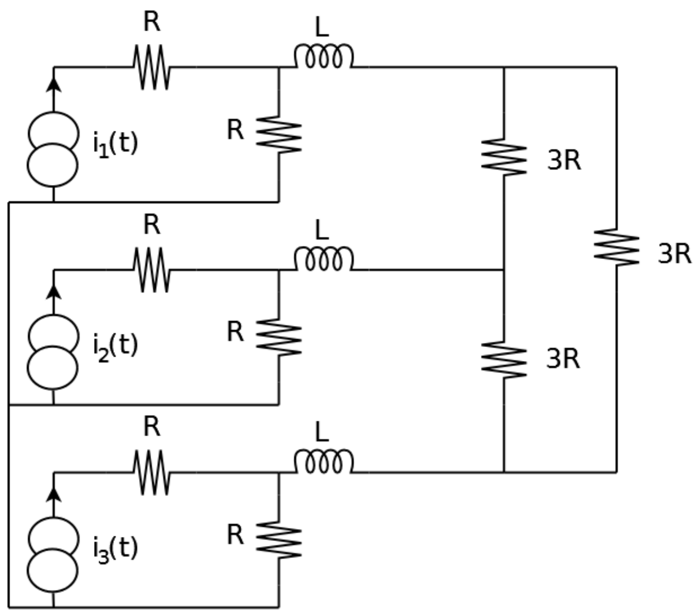
i) Hallar el equivalente Thévenin desde los puntos A y B.

ii) Se conecta una impedancia Z_L a los bornes A y B a través de una línea de transmisión sin pérdidas de longitud L, múltiplo entero de la longitud de onda, e impedancia característica Z_0. Hallar Z_L en función de los parámetros del circuito para que se disipe la máxima potencia activa posible en Z_L.



(c) En el circuito de la figura, se cumple que

$$i_1(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega_0 t) \quad , \quad i_2(t) = \sqrt{2}I\cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad , \quad i_3(t) = \sqrt{2}I\cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right)$$



i) Hallar la expresión temporal de las corrientes por las inductancias.

ii) Describa cualitativamente cómo compensaría la potencia reactiva que entregan las fuentes de corriente.

Teoría de Circuitos

Examen de febrero de 2020

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Definir potencia instantánea $p(t)$

(b) Definir la potencia media P en régimen periódico.

(c) A partir de la definición anterior, probar la expresión $P = re(V\bar{I})$, para la potencia media en régimen sinusoidal, siendo V e I los fasores asociados a la tensión y la corriente involucrados, en valores eficaces.

Pregunta 2

Se tiene la siguiente transferencia en régimen sinusoidal:

$$H(j\omega) = k.\frac{j\omega + \omega_0}{j\omega + k.\omega_0}$$

con k positivo y **mayor que 1**.

a) Bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de H.

b Verificar que la máxima fase que aporta el sistema se da a la frecuencia $\omega_1 = \sqrt{k}\omega_0$.

c) ¿Cuál es la ganancia del sistema a dicha frecuencia?

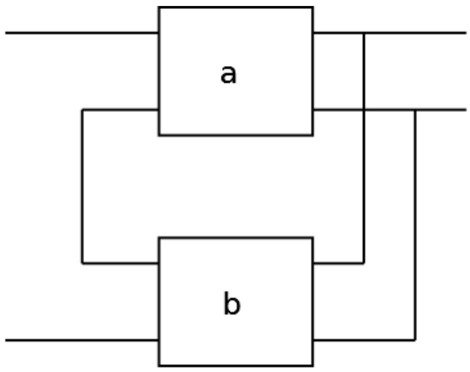
(Recordar que $(atan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.)

Pregunta 3

Se tienen dos cuadripolos conectados como muestra la figura. La interconexión asegura que son válidas las descripciones de los cuadripolos.

¿De los distintos juegos de parámetros que permiten describir un cuadripolo, cuál sería el más adecuado para relacionar los cuadripolos originales con el cuadripolo que surge de la interconexión?

Justificar claramente la respuesta.



Admitancias de cortocircuito	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{cases} I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{cases}$
Impedancias de vacío	$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{cases} V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases}$
Constantes generales (transmisión)	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$	$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$
Híbridos h	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$	$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$

Pregunta 4

Se considera un sistema lineal de transferencia

$$H(s) = \frac{s}{(s+3)(s-5)(s+10)}$$

i) Hallar la expresión en Laplace de $R(s)$, la respuesta al escalón.

ii) Hallar la expresión en el tiempo $r(t)$.

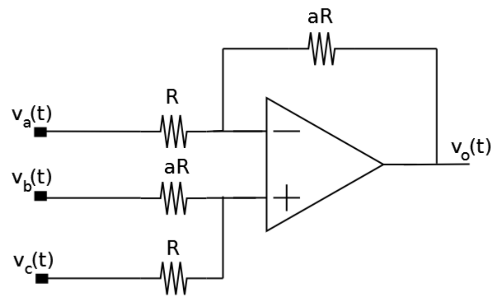
Solución

Problema 1

En el circuito de la figura, se cumple que

$v_o(t) = -a.v_a(t) + v_b(t) + a.v_c(t)$.

done a es un parámetro positivo.



Aplicando superposición, vemos que

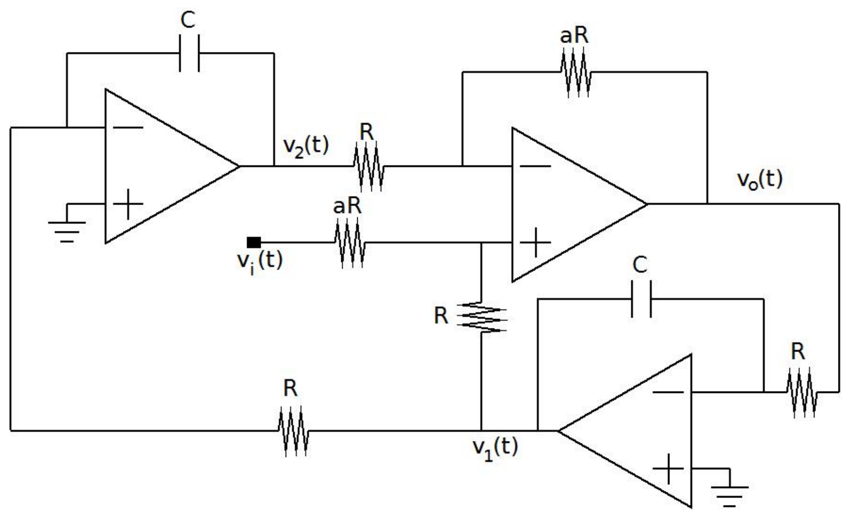
$$e^- = \frac{aR}{(1+a)R}v_a + \frac{R}{(1+a)R}v_o = \frac{av_a + v_o}{1+a}$$

$$e^+ = \frac{R}{(1+a)R}v_b + \frac{aR}{(1+a)R}v_c = \frac{v_b + av_c}{1+a}$$

De la igualdad $e^- = e^+$ obtenemos

$$av_a + v_o = v_b + av_c \Rightarrow \boxed{v_o = -av_a + v_b + av_c}$$

(a) Se considera el siguiente circuito.



i) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

En el circuito podemos identificar tres bloques, Tenemos uno como el de la parte a), con entradas $v_a = v_2$, $v_b = v_i$ y $v_c = v_1$. Por la parte a), sabemos que

$$v_o = -a.v_2 + v_i + a.v_1$$

Los otros dos bloques son integradores, de relación entrada-salida respectiva

$$V_2(s) = -\frac{1}{R_2C_2s}.V_1(s) \quad , \quad V_1(s) = -\frac{1}{R_1C_1s}.V_o(s)$$

Observemos que $V_2(s) = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2}.V_o(s)$. De donde

$$V_o(s) = \frac{-a}{R_1C_1R_2C_2s^2}.V_o(s) + V_i(s) - \frac{a}{R_1C_1s}.V_o(s)$$

$$V_o(s)\left[1+\frac{a}{R_1C_1R_2C_2s^2}+\frac{a}{R_1C_1s}\right]=V_o(s)\left[\frac{R_1C_1R_2C_2s^2+a+aR_2C_2s}{R_1C_1R_2C_2s^2}\right]=V_i(s)$$

y obtenemos la transferencia

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{R_1C_1R_2C_2s^2}{R_1C_1R_2C_2s^2+aR_2C_2s+a}=\frac{s^2}{s^2+\frac{a}{R_1C_1}s+\frac{a}{R_1C_1R_2C_2}}$$

Definiendo $\omega_0=\frac{1}{R_1C_1}=\frac{1}{R_2C_2}$, resulta

$$\boxed{H(s)=\frac{s^2}{s^2+a\omega_0 s+a\omega_0^2}}$$

ii) Hallar $a>0$ para que $H(s)$ tenga una raíz negativa $-2\omega_0$ doble en el denominador.

Se tiene que cumplir que

$$s^2+a\omega_0 s+a\omega_0^2=(s+2\omega_0)^2=s^2+4\omega_0 s+4\omega_0^2\Rightarrow\boxed{a=4}$$

iii) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de H, explicando claramente su construcción.

$$H(s)=\frac{s^2}{(s+2\omega_0)^2}=\frac{s^2}{s^2+4\omega_0 s+4\omega_0^2}\Rightarrow H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2}{(j\omega+2\omega_0)^2}$$

Hacemos un análisis por bandas. La única frecuencia crítica es $2\omega_0$.

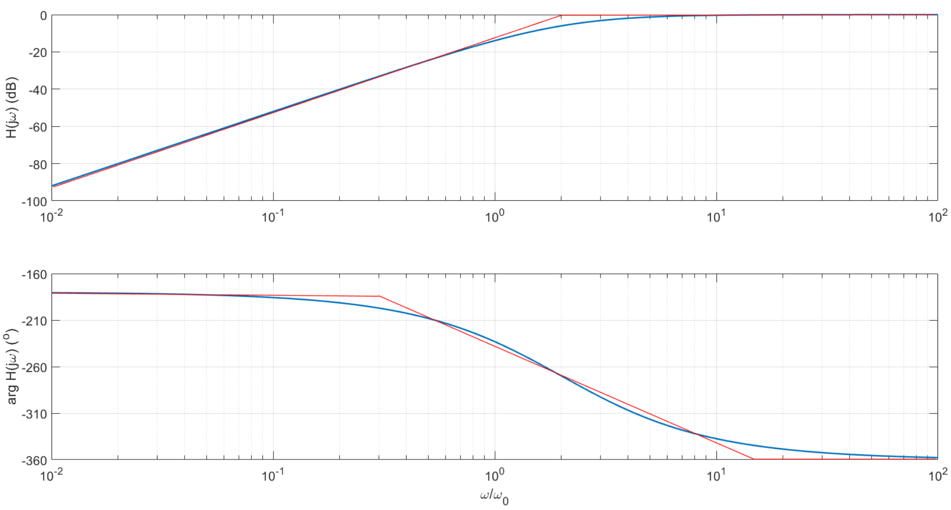
$$\omega\ll 2\omega_0\Rightarrow H(j\omega)\approx\frac{(j\omega)^2}{(2\omega_0)^2}=\frac{-\omega^2}{4\omega_0^2}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccl}|H| & \approx & 40\log(\omega)-20\log(4\omega_0^2)\,dB\\ arg(H) & \approx & -180^o\end{array}\right.$$

$$\omega\gg 2\omega_0\Rightarrow H(j\omega)\approx\frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2}=1\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccl}|H| & \approx & 0\,dB\\ arg(H) & \approx & 0\,(\acute{o}\ -360^o)\end{array}\right.$$

El denominador aporta $\pm180^o$. Para resolver si sube o baja, evaluamos en la frecuencia intermedia $2\omega_0$:

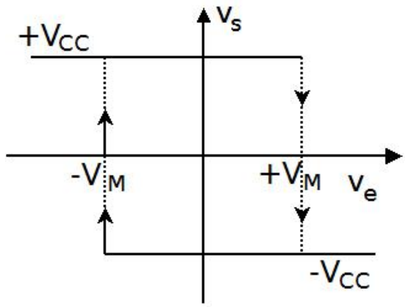
$$H(j2\omega_0)=\frac{(j2\omega_0)^2}{(j2\omega_0+2\omega_0)^2}=\frac{(j)^2}{(j+1)^2}=\frac{-1}{(j+1)^2}=\frac{1}{2}\angle{-270^o}$$

por lo que fase decrece desde -180^o hacia -360^o. La siguiente figura muestra los diagramas de Bode asintóticos (rojo) y reales (azul).



(b) Se excita el circuito de la parte a) con la señal $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t)$, con $A > 0$. La salida en régimen se inyecta en un Schmitt trigger cuya relación entrada-salida se muestra en la figura.

Hallar el mínimo valor de A que asegura que la salida del circuito no lineal es una onda cuadrada. **JUSTIFICAR!!!**



Mirando el diagrama de conmutación del Schmitt trigger, vemos que para generar una conmutación, la entrada tiene que superar V_M o pasar para abajo de $-V_M$. Lo que sabemos de la entrda es que es una sinusoide de pulsación ω_0. Al ser la respuesta en régimen sinusoidal de un sistema lineal de transferencia en régimen $H(j\omega)$, la entrada al comparador es:

$$v_e(t) = A.|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + argH(j\omega_0))$$

Calculemos la ganancia y el desfasaje:

$$H(j\omega_0) = \frac{(j\omega_0)^2}{(j\omega_0 + 2\omega_0)^2} = \frac{(j)^2}{(j+2)^2} = \frac{-1}{(j+2)^2} = \frac{1}{5}\angle -180 - 2atan(1/2) \approx \frac{1}{5}\angle -233^o$$

De donde

$$v_e(t) = \frac{A}{5}\cos(\omega_0 t - 233^o)$$

Para que la sinusoide de entrada excite la banda de conmutación, se debe cumplir que

$$\frac{A}{5} > V_M \Rightarrow A > 5V_M$$

Problema 2

(a) Se considera una fuente de tensión real modelada por su equivalente Thévenin, como una fuente ideal de valor $v_{Th}(t) = \sqrt{2}E_{Th}\cos(\omega_0 t)$ y una impedancia en serie de valor $Z_{Th} = R + jX$. Se la conecta a una línea de transmisión sin pérdidas, de longitud L e impedancia característica Z_0, terminada en una impedancia de carga Z_L. Se recuerda que la impedancia vista al comienzo de la línea es

$$Z_{in} = Z_0 . \frac{Z_L + jZ_0\tan(\beta L)}{Z_0 + jZ_L\tan(\beta L)}$$

i) Sabiendo que L es un múltiplo entero de la longitud de onda de la señal, hallar el valor eficaz de la tensión a la entrada de la línea.

Recordemos que $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$. Entonces, la impedancia vista a la entrada de la línea es

$$Z_{in} = Z_0 . \frac{Z_L + jZ_0\tan(\frac{2\pi}{\lambda}n\lambda)}{Z_0 + jZ_L\tan(\frac{2\pi}{\lambda}n\lambda)} = Z_0 . \frac{Z_L + jZ_0\tan(2n\pi)}{Z_0 + jZ_L\tan(2n\pi)} = Z_L$$

Desde el punto de vista de la fuente ideal, tenemos un divisor de tensión: la tensión de la fuente ideal se divide entre la impedancia Z_{Th} y la impedancia a la entrada de la línea, Z_L.

Trabajando en fasores en valores eficaces, tenemos que el fasor de la tensión a la entrada de la línea es

$$V_{in} = \frac{Z_L}{Z_{Th} + Z_L}V_{Th} \Rightarrow |V_{in}| = \left|\frac{Z_L}{Z_{Th} + Z_L}\right| .|V_{Th}| = \frac{|Z_L|}{|Z_{Th} + Z_L|}.E_{Th}$$

Esta última expresión es el valor eficaz de la tensión a la entrada de la línea.

ii) Hallar Z_L en función de los parámetros de la fuente real para que se disipe la máxima potencia activa posible en Z_L. (Si utiliza un resultado teórico, enúncielo correctamente, sin demostrarlo).

Al ser una línea sin pérdidas, la potencia activa en la carga Z_L vale

$$P_{Z_L} = \frac{|V_{in}|^2}{\overline{Z_L}}$$

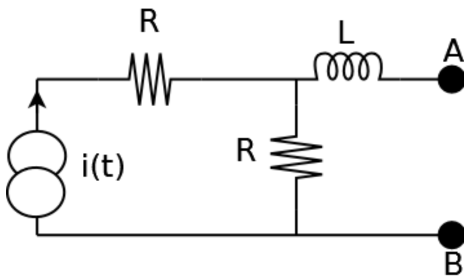
Por otro lado, como la línea es un transformador de media longitud de onda, simplemente *copia* la carga Z_L al comienzo de la línea, por lo que desde el punto de vista práctico, tenemos un equivalente Thévenin, de tensión de vacío V_{Th} e impedancia de salida Z_{Th} cargado con una impedancia Z_L. Un resultado teórico visto en el curso (*Cómo extraer la máxima potencia de un equivalente Thévenin*) nos dice que para que se disipe la máxima potencia activa en Z_L se debe cumplir que $Z_L = \overline{Z_{Th}}$. Entonces debe ser

$$Z_L = R - jX$$

(b) Se considera el siguiente circuito funcionando en régimen sinusoidal, excitado por una fuente sinusoidal de corriente $i(t)$ de frecuencia ω_0, valor eficaz I_{eff} y fase nula.

i) Hallar el equivalente Thévenin desde los puntos A y B.

ii) Se conecta una impedancia Z_L a los bornes A y B a través de una línea de transmisión sin pérdidas de longitud L, múltiplo entero de la longitud de onda, e impedancia característica Z_0. Hallar Z_L en función de los parámetros del circuito para que se disipe la máxima potencia activa posible en Z_L.



i) Para hallar el equivalente de Thévenin, tenemos que hallar la tensión de vacío V_{Th} y la impedancia Z_{Th} vista desde A y B, trabajando en fasores por estar en régimen sinusoidal.

Trabajamos en valores eficaces. Por definición, la tensión de vacío es la tensión entre A y B cuando no se extrae corriente del circuito, es decir, cuando no circula corriente por le inductancia. Entonces

$$V_{Th} = RI$$

siendo I el fasor de la corriente: $I = I_{eff}e^{j0}$.

Para hallar la impedancia vista, anulamos las fuentes independientes y calculamos la impedancia entre A y B. En este caso, anular la fuente de corriente equivale a abrir la respectiv a rama, por lo que

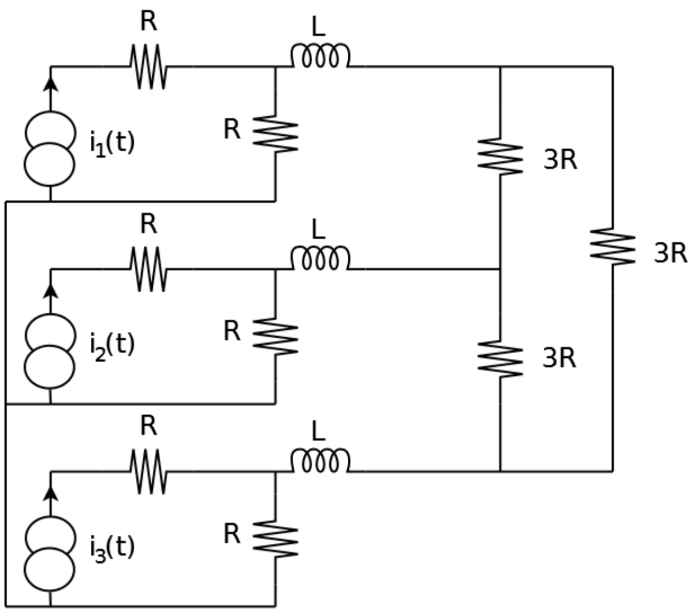
$$Z_{Th} = Lj\omega_0 + R$$

ii) Porla parte a), sabemos que debe ser $Z_L = \overline{Z_{Th}}$, de donde

$$Z_L = R - Lj\omega_0$$

(c) En el circuito de la figura, se cumple que

$$i_1(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega_0 t) \quad , \quad i_2(t) = \sqrt{2}I\cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad , \quad i_3(t) = \sqrt{2}I\cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right)$$



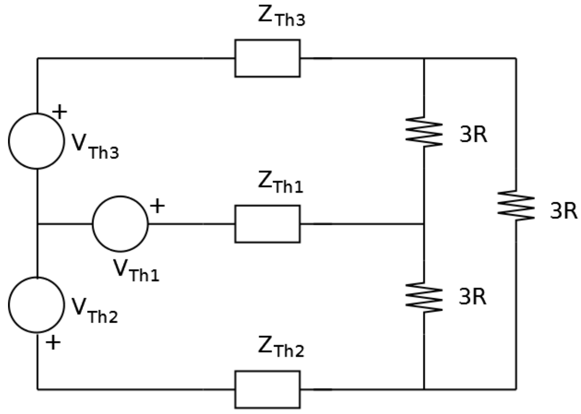
i) Hallar la expresión temporal de las corrientes por las inductancias.

En primer término, usamos el equivalentes de Thévenin hallado antes. Observemos que los desfasajes entre las fuentes de corriente solo introducen desfasajes del mismo tipo entre las fuentes de los equivalentes. Entonces, tenemos un sistema trifásico de fuentes equilibrado y perfect0, como se muestra en la figura. Las corrientes de línea que se pide calcular son las que en el circuito equivalente circulan por las impedancias Z_{Thi}. Para hallarlas, podemos hacer una transfiguración tiríangulo estrella del triángulo formado por las tres resistencias de valor $3R$ y luego pasar el equivalente monofásico. Tenemos entonces que

$$I_{Th1} = \frac{V_{Th1}}{Z_{Th1} + R} \quad , \quad I_{Th2} = \frac{V_{Th2}}{Z_{Th2} + R} \quad , \quad I_{Th3} = \frac{V_{Th3}}{Z_{Th3} + R}$$

De donde

$$i_{L1}(t) = \sqrt{2}|I_{Th1}|.\cos\left(\omega_0 t + arg(I_{Th1})\right)$$



$$i_{L2}(t) = \sqrt{2}|I_{Th1}|.\cos\left(\omega_0 t + arg(I_{Th1}) + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_{L3}(t) = \sqrt{2}|I_{Th1}|.\cos\left(\omega_0 t + arg(I_{Th1}) - \frac{2\pi}{3}\right)$$

ii) Describa cómo compensaría la potencia reactiva que entregan las fuentes de corriente.

Esta parte tiene varias respuestas posibles, ya que es muy descriptiva. A modo de ejemplo, presentamos una posible respuesta. La reactiva entregada por las fuentes de corriente es de tipo inductivo, debido a las inductancias presentes en el circuito. Para compensar la reactiva, enemos que agregar condensadores que entreguen la reactiva que consumen las inductancias. Para no *abrir* el circuito, podemos colocar un triángulo de condensadores en paralelo con el triángulo de resistencias. Observemos que en este caso estaríamos modificando la potencia activa que entregan las fuentes de corriente. La única forma de no alterar la activa que consume el tríngulo de resistencias sería colocando condensadores en serie con las inductancias, teniendo que *abrir* las líneas para intercalar los condensadores.