

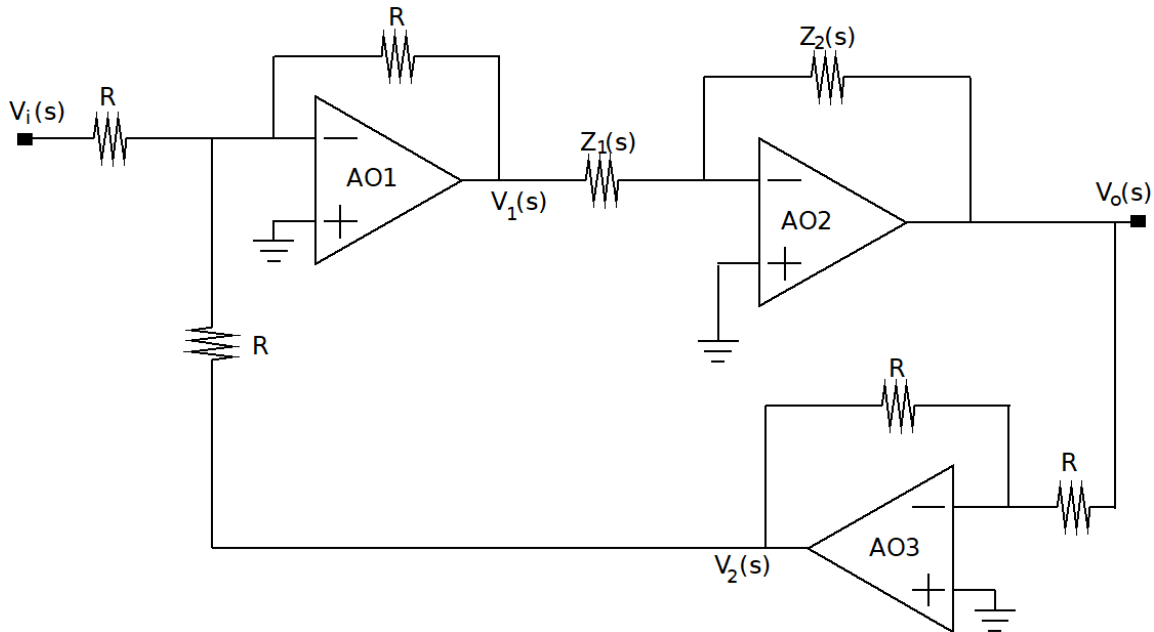
Teoría de Circuitos

Examen de diciembre de 2024

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

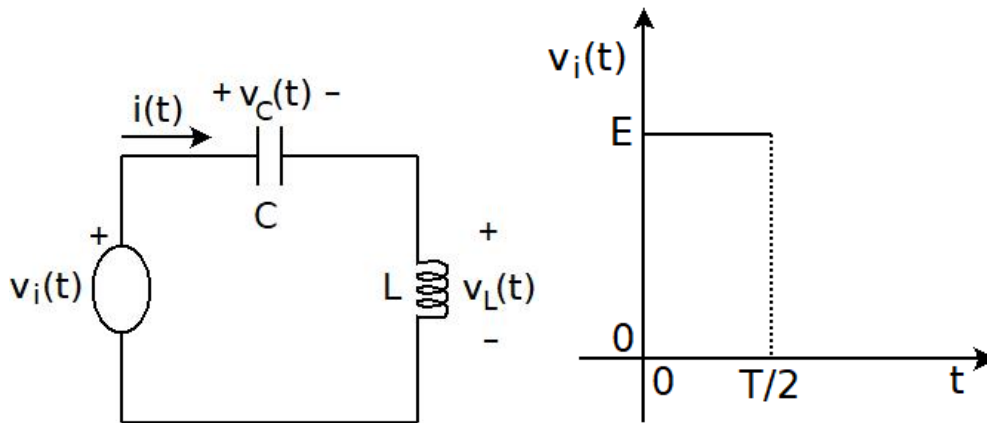
Problema 1

Se considera el circuito en Laplace de la figura.



- (a) Identificar las configuraciones de los operacionales.
- (b) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.
- (c) Se sabe que $Z_1(s) = R + Ls$ y $Z_2(s) = R + \frac{1}{Cs}$ con $\frac{R}{L} = \omega_0$ y que $\frac{1}{RC} = 100\omega_0$.
 - i) Mostrar que la transferencia se puede escribir como $H(s) = \frac{\omega_0(s+100\omega_0)}{s^2+2\omega_0s+100\omega_0^2}$.
 - ii) Hallar módulo y fase de los valores complejos $H(j\omega_0)$, $H(j10\omega_0)$ y $H(j100\omega_0)$. **Expresar los módulos en dB.**
 - iii) Hallar las raíces del denominador
- (d) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(s)$, mediante un análisis por bandas. Para ello se pide:
 - i) Identificar las frecuencias críticas y las bandas de frecuencia de interés.
 - ii) Realizar las aproximaciones asintóticas en cada banda.
 - iii) Explicar claramente como gestiona el tema de las fases en cada banda, teniendo en cuenta que la fase de un número complejo está bien definida a menos de múltiplos enteros de 2π .
 - iv) Bosquejar los diagramas de Bode asintóticos.
 - v) Ubicar en los diagramas los valores exactos de H en las frecuencias críticas.
- (e) Hallar la distancia exacta, expresada en decibeles, entre los diagramas de Bode de módulo real y asintótico de H para la frecuencia ω_0 .
- (f) Si se excita el circuito con una senoide de pulsación $\tilde{\omega} = 100\omega_0$ y valor eficaz E , hallar la expresión temporal exacta de la respuesta en régimen del circuito.

Problema 2



El circuito de la figura de la izquierda se encuentra inicialmente en reposo. Se aplica la tensión $v_i(t)$ de la figura de la derecha, con $T = 2\pi\sqrt{LC}$, que consiste en una tensión constante de valor E durante los primeros $T/2$ segundos, que luego se anula. Se introduce la pulsación $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Se pide hallar **las tensiones** en la inductancia y el condensador y **la corriente** que entrega la fuente para todo instante positivo, resolviendo por tramos el circuito, siguiendo las siguientes partes.

- Resolver el primer tramo $[0, T/2)$, indicando claramente cómo trabaja con los datos previos.
- Resolver el segundo tramo $(T/2, +\infty]$, indicando claramente cómo trabaja con los datos previos.
- Bosquejar en una gráfica las tensiones del condensador y la inductancia y la corriente del condensador.

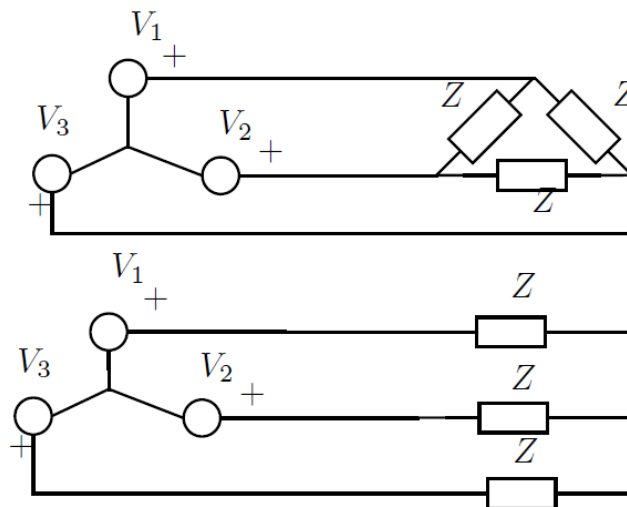
Teoría de Circuitos

Examen de diciembre de 2024

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

En los circuitos en régimen de la figura, las fuentes forman un sistema triásico equilibrado y perfecto.



- a) ¿En cuál configuración las fuentes entregan más potencia activa?
- c) ¿Cuál es la configuración más conveniente si se pretende tener el mayor voltaje sobre las cargas?

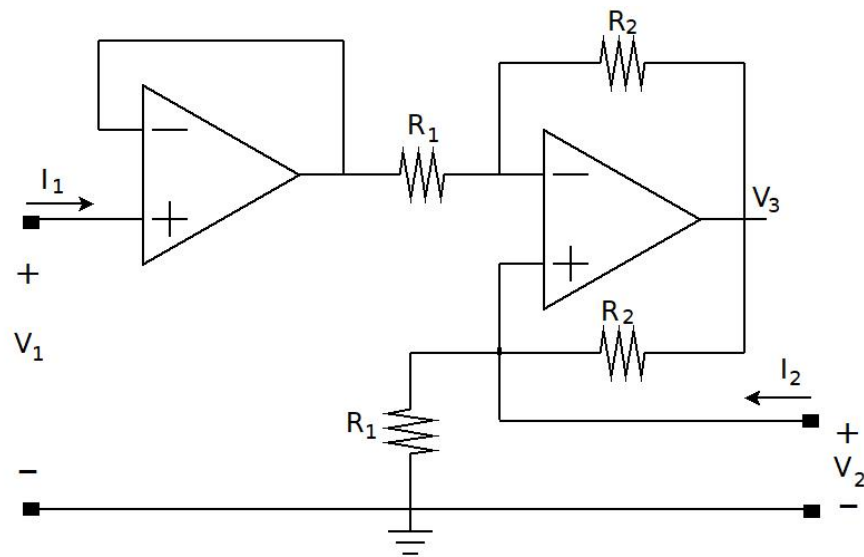
Pregunta 2

- (a) Definir la potencia media para un régimen de funcionamiento periódico (no necesariamente sinusoidal), de periodo τ .
- (b) Deducir, a partir de la definición anterior, las siguientes expresiones para la potencia media de una componente funcionando en régimen sinusoidal:

$$P = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi) = \operatorname{re}[V\bar{I}]$$

donde V_{eff} e I_{eff} son, respectivamente, los valores eficaces de la tensión y la corriente y V e I son, respectivamente, los fasores de tensión y corriente asociados a la componentes, medidos con la convención estándar.

Pregunta 3



En el cuadripolo de la figura, los operacionales son ideales y funcionan en zona lineal. Se recuerda la expresión de las admitancias de cortocircuito.

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{cases}$$

- Hallar las admitancias de cortocircuito del circuito, justificando bien los pasos dados.
- Se conecta al lado 1 una fuente de tensión constante de valor E . Verificar que el circuito funciona desde el lado 2 como una fuente ideal de corriente, es decir, entrega una corriente independiente de la carga que se le conecte del lado 2.

Pregunta 4

La siguiente pregunta evalúa la comprensión del Teorema de máxima potencia. Se tiene una caja negra funcionando en régimen sinusoidal, descrita por su equivalente de Thévenin, con $V_{Th} = Ee^{j\Phi}$ y $Z_{Th} = R_{Th} + X_{Th}$, con X_{Th} positiva. Se coloca una impedancia de carga Z_L cuyo valor maximiza la potencia activa disipada en ella y se **analiza el circuito resultante**.

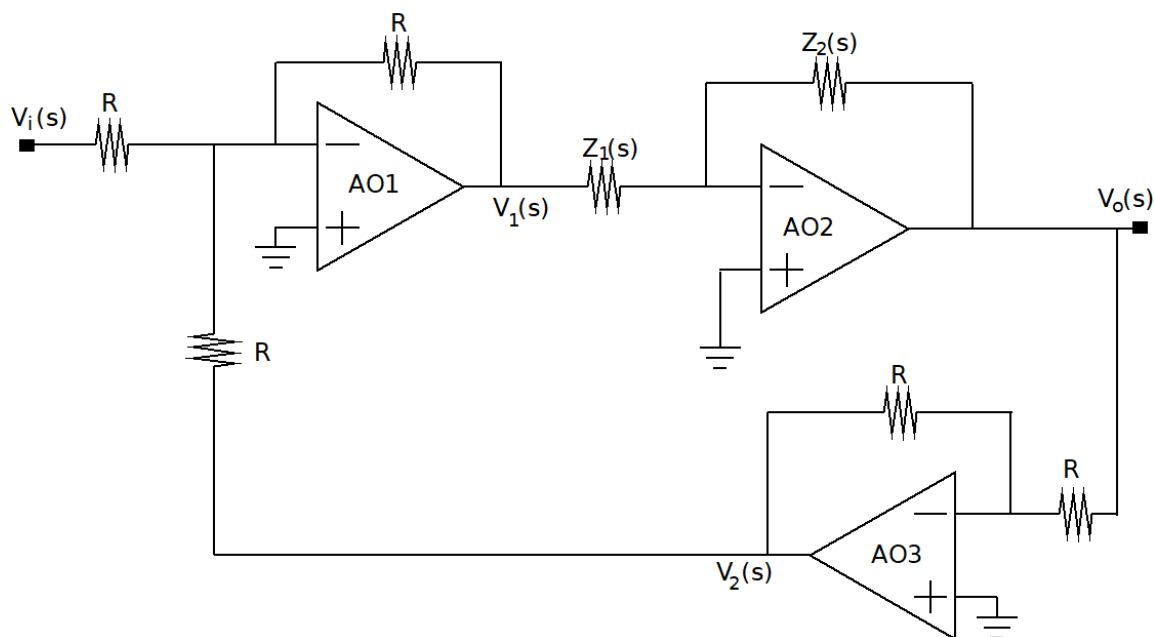
Para cada una de las siguientes afirmaciones, indicar si es verdadera o falsa, **justificando!!!**

- La fuente entrega potencia reactiva no nula.
- Z_L es capacitiva.
- La caída de tensión en Z_L es igual a la caída de tensión en Z_{Th} .

Solución

Problema 1

Se considera el circuito en Laplace de la figura.



- (a) Identificar las configuraciones de los operacionales.

El opamp AO1 está en una configuración sumadora inversora. Los opamps AO2 y AO3 están en una configuración inversora.

- (b) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

Para hallar la transferencia, calculamos primero las ganancias de las configuraciones identificadas y luego vemos cómo se interconectan. Las ganancias salen directamente de plantear los nudos en las patas menos de los operacionales. Tenemos que

$$V_2(s) = -V_o(s) \quad , \quad V_o(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \cdot V_1(s) \Rightarrow V_1(s) = -\frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} \cdot V_o(s)$$

$$V_1(s) = -V_i(s) - V_2(s) \Rightarrow -V_i(s) = V_1(s) + V_2(s)$$

Entonces

$$-V_i(s) = -\frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} \cdot V_o(s) - V_o(s) = -\left[\frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} + 1\right] \cdot V_o(s) = -\left[\frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_2(s)}\right] \cdot V_o(s)$$

De donde

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

- (c) Se sabe que $Z_1(s) = R + Ls$ y $Z_2(s) = R + \frac{1}{Cs}$ con $\frac{R}{L} = \omega_0$ y que $\frac{1}{RC} = 100\omega_0$.

- i) Mostrar que la transferencia se puede escribir como

$$H(s) = \frac{\omega_0(s + 100\omega_0)}{s^2 + 2\omega_0s + 100\omega_0^2}$$

Tenemos que

$$H(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R + \frac{1}{Cs}}{(R + Ls) + (R + \frac{1}{Cs})} = \frac{1 + RCs}{RCs + LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1 + RCs}{LCs^2 + 2RCs + 1}$$

Operamos:

$$H(s) = \frac{RC}{LC} \frac{s + \frac{1}{RC}}{s^2 + 2\frac{RC}{LC}s + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{R}{L} \left(s + \frac{1}{RC}\right)}{s^2 + 2\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0(s + 100\omega_0)}{s^2 + 2\omega_0s + 100\omega_0^2}$$

- ii) Hallar módulo y fase de los valores complejos $H(j\omega_0)$, $H(j10\omega_0)$ y $H(j100\omega_0)$. **Expresar los módulos en dB.**

$$H(j\omega_0) = \frac{\omega_0(j\omega_0 + 100\omega_0)}{(j\omega_0)^2 + 2\omega_0(j\omega_0) + 100\omega_0^2} = \frac{(j + 100)}{-1 + 2j + 100} = \frac{j + 100}{99 + 2j} \approx 1,01 \angle -0,6^\circ \approx 0,1dB \angle -0,6^\circ$$

$$H(j10\omega_0) = \frac{\omega_0(j10\omega_0 + 100\omega_0)}{(j10\omega_0)^2 + 2\omega_0(j10\omega_0) + 100\omega_0^2} = \frac{(j10 + 100)}{-100 + 20j + 100} = \frac{j10 + 100}{20j}$$

$$\approx 5 \angle -84^\circ \approx 14dB \angle -84^\circ$$

$$H(j100\omega_0) = \frac{\omega_0(j100\omega_0 + 100\omega_0)}{(j100\omega_0)^2 + 2\omega_0(j100\omega_0) + 100\omega_0^2} = \frac{(j100 + 100)}{-10000 + 200j + 100} =$$

$$\frac{j100 + 100}{-9901 + 2j} \approx 0,01 \angle -133^\circ \approx -37dB \angle -133^\circ$$

- iii) Hallar las raíces del denominador

Las raíces del denominador salen de la ecuación:

$$s^2 + 2\omega_0s + 100\omega_0^2 = 0$$

O, equivalentemente:

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 100 = x^2 + 2x + 100 = 0$$

donde hemos introducido la variable auxiliar $x = \frac{s}{\omega_0}$. Hallamos x :

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2 - 400}}{2} \Rightarrow s = \left(\frac{-2 \pm \sqrt{2 - 400}}{2}\right) \cdot \omega_0$$

Observamos que el sistema tiene dos raíces complejas conjugadas.

- (d) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(s)$, mediante un análisis por bandas. Para ello se pide:

- i) Identificar las frecuencias críticas y las bandas de frecuencia de interés.

Las frecuencias críticas vienen dadas por las raíces del numerador y del denominador, por lo que tenemos las siguiente

$$-100\omega_0 \quad , \quad \left(\frac{-2 \pm \sqrt{2 - 400}}{2}\right) \cdot \omega_0$$

Para realizar el análisis en frecuencia, las raíces complejas conjugadas se expresan como un término de segundo orden, caracterizado por dos parámetros: el factor de amortiguamiento ζ y la frecuencia natural ω_n , en un término de la forma $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$. Identificando coeficientes con lo que ya tenemos, resulta que $\omega_n = 10\omega_0$ y que

$$2\zeta\omega_n = 2\zeta 10\omega_0 = 2\omega_0 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{10}$$

Las bandas de interés salen de ordenar las frecuencias críticas por módulo creciente, ya que para los diagramas de Bode solamente consideramos las frecuencias positivas (los diagramas son logarítmicos en las abscisas y ya sabemos qué pasa con las frecuencias negativas para transferencias real-rationales). Para el caso de las raíces complejas conjugadas, consideramos el módulo de las raíces, es decir, la frecuencia natural ω_n . Tenemos entonces tres bandas de interés:

$$w \ll 10\omega_0 = \omega_n \quad , \quad 10\omega_0 = \omega_n \ll \omega \ll 100\omega_0 = 10\omega_n \quad , \quad w \gg 100\omega_0 = 10\omega_n$$

- ii) Realizar las aproximaciones asintóticas en cada banda.

Podemos trabajar con cualquiera de las siguientes expresiones de la transferencia en régimen sinusoidal:

$$H(j\omega) = \omega_0 \cdot \frac{j\omega + 100\omega_0}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n}{10} \cdot \frac{j\omega + 10\omega_n}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

Optamos por trabajar con la segunda, parametrizando todo el análisis en función de la frecuencia natural del denominador. El término de primer orden se va a aproximar por su parte real o por su parte imaginaria, en tanto el término de segundo orden se va a aproximar por ω_n^2 o por $(j\omega)^2$, según corresponda.

Entonces, las aproximaciones asintóticas por banda quedan así.

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n}{10} \cdot \frac{10\omega_n}{\omega_n^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx 0 \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx 0^\circ (\text{ó } \pm 360^\circ) \end{cases}$$

$$\omega_n \ll \omega \ll 10\omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n}{10} \cdot \frac{10\omega_n}{(j\omega)^2} = -\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx [40 \log(\omega_n) - 40 \log(\omega)] \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx \pm 180^\circ \end{cases}$$

$$\omega \gg 10\omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n}{10} \cdot \frac{j\omega}{(j\omega)^2} = \frac{\omega_n}{10j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx [20 \log(\omega_n/10) - 20 \log(\omega)] \text{ dB} \\ \arg(H) & \approx -90^\circ (\text{ó } + 270^\circ) \end{cases}$$

- iii) Explicar claramente como gestiona el tema de las fases en cada banda, teniendo en cuenta que la fase de un número complejo está bien definida a menos de múltiplos enteros de 2π .

Tomamos la banda de baja frecuencia como referencia, y para ello elegimos la fase nula (la elección se debe hacer entre las fases posibles!!). Para la segunda banda, tenemos que tener en cuenta que el cambio se debe al término de segundo orden del denominador. Esto implica que puede haber una variación total de fase de $\pm 180^\circ$. En este caso, partimos de 0° y podemos llegar a $+180^\circ$ ó -180° , por lo que haciendo simplemente este análisis no podemos decir si la fase crece hacia $+180^\circ$ o decrece hacia -180° . Para desambiguar, podemos usar el valor exacto de $H(j\omega_n)$ hallado anteriormente. Vemos que la fase debe pasar por -84° , por lo que concluimos que la fase debe decrecer hacia -180° . Para ver la variación de fase entre la segunda y la tercera banda, observamos que la misma se debe a la presencia de una raíz real simple, por lo que solo es admisible una variación de $\pm 90^\circ$. De los valores posibles expresados en el análisis asintótico, decantamos por la fase -90° .

- iv) Bosquejar los diagramas de Bode asintóticos.

Las siguientes figuras muestran los diagramas de Bode reales y asintóticos de H . Se ubican también los valores exactos hallados en la parte anterior. Se ha incluido el sobretiro debido al pequeño valor de ζ y se ha continuizado la fase, ya que, al ser las asíntotas horizontales, quedan naturalmente discontinuas, a diferencia de lo que sucede con la aproximación de módulo. Esta continuización se hace para distinguir este caso, en que sabemos que la fase es continua, de casos en los que hay discontinuidades.

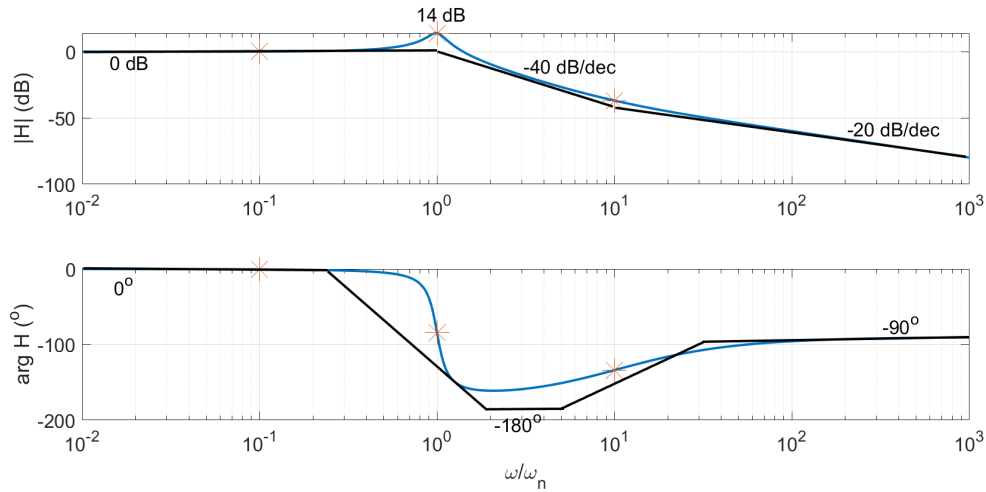
- v) Ubicar en los diagramas los valores exactos de H en las frecuencias críticas.

Se observa la gran diferencia en la frecuencia natural del denominador, fruto de que ζ es muy chico.

- (e) Hallar la distancia exacta, expresada en decibeles, entre los diagramas de Bode de módulo real y asintótico de H para la frecuencia ω_0 .

En $\omega_0 = \omega_n/10$, ya vimos que

$$H_{re}(j\omega_n/10) = \frac{j + 100}{99 + 2j} \quad \text{y} \quad H_{as}(j\omega_n) = 1$$



Notar que para la parte asintótica, hemos tomado la expresión de la primera banda. Entonces

$$\begin{aligned} dist(|H_{re}(j\omega_n/10)|, |H_{as}(j\omega_n/10)|)_{dB} &= 20 \log \left(\frac{|H_{re}(j\omega_n/10)|}{|H_{as}(j\omega_n/10)|} \right) = \\ &= 20 \log \left(\frac{\frac{\sqrt{10^4+1}}{\sqrt{99^2+4}}}{1} \right) \approx 0,08dB \end{aligned}$$

- (f) Si se excita el circuito con una senoide de pulsación $\tilde{\omega} = 100\omega_0$ y valor eficaz E , hallar la expresión temporal exacta de la respuesta en régimen del circuito.

Sabemos que si tenemos un circuito lineal de transferencia en régimen $H(j\omega)$ y lo excitamos con una entrada sinusoidal pura (sin perder generalidad, supongamos un coseno) de pulsación $\tilde{\omega}$, amplitud A y fase φ , la respectiva respuesta en régimen será

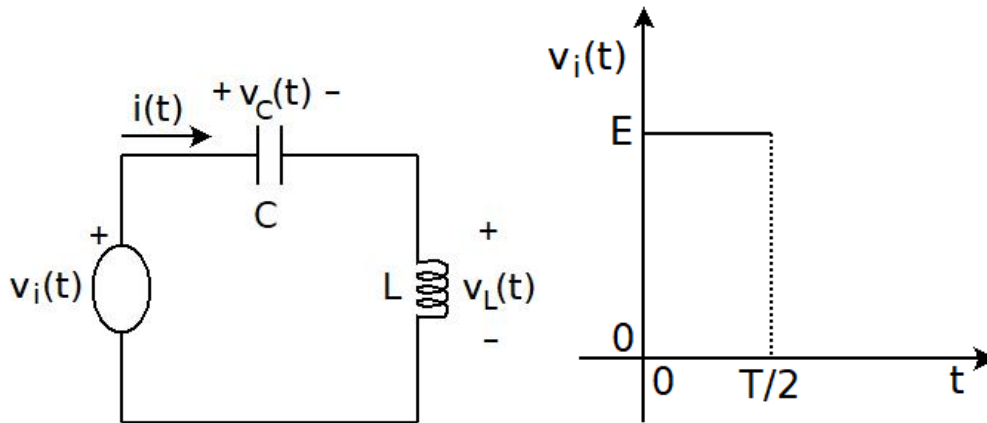
$$v_{o,reg}(t) = A \cdot |H(j\tilde{\omega})| \cdot \cos(\tilde{\omega}t + \varphi + \arg H(j\tilde{\omega}))$$

En este caso, tenemos que $\tilde{\omega} = 10\omega_n = 100\omega_0$. Usando que el valor eficaz de una senoide es su amplitud dividida por $\sqrt{2}$, y con los valores de $H(j100\omega_0)$ ya hallados, tenemos que la expresión pedida es

$$v_{o,reg}(t) \approx \frac{\sqrt{2} \times E}{100} \cdot \cos(100\omega_0 t + \varphi - 2,32)$$

donde observamos una tenación de unos $40dB$.

Problema 2



El circuito de la figura de la izquierda se encuentra inicialmente en reposo. Se aplica la tensión $v_i(t)$ de la figura de la derecha, con $T = 2\pi\sqrt{LC}$, que consiste en una tensión constante de valor E durante los primeros $T/2$ segundos, que luego se anula. Se introduce la pulsación $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Se pide hallar **las tensiones** en la inductancia y el condensador y **la corriente** que entrega la fuente para todo instante positivo, resolviendo por tramos el circuito, siguiendo las siguientes partes.

- (a) Resolver el primer tramo $[0, T/2)$, indicando claramente cómo trabaja con los datos previos.

Pasamos al circuito equivalente en Laplace, con datos previos nulos. La entrada es $V_i(s) = \frac{E}{s}$. Las tensiones en la bobina y el condensador podemos obtenerlas por el divisor de tensión. Solamente calcularemos la tensión en la bobina, ya que la del condensador la saquemos aplicando la malla:

$$v_C(t) = v_i(t) - v_L(t)$$

Entonces

$$V_L(s) = \frac{Ls}{Ls + \frac{1}{Cs}} \cdot \frac{E}{s} = \frac{ELCs}{1 + LCs^2} = E \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \Rightarrow v_L(t) = Y(t) \cdot E \cdot \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) = Y(t) \cdot E \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Definiendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, nos queda

$$v_L(t) = Y(t) \cdot E \cdot \cos(\omega_0 t) \quad , \quad v_C(t) = Y(t) \cdot E \cdot [1 - \cos(\omega_0 t)]$$

La corriente podemos hallarla en el tiempo o en Laplace. Parece más sencillo en el tiempo. Igualmente, lo hacemos primero en Laplace:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{CE}{LCs^2 + 1} = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{E}{L} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot s^2 + \frac{1}{LC}} = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

De donde

$$i(t) = Y(t) \cdot E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Verificamos derivando en el tiempo:

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{d}{dt} Y(t) \cdot E \cdot [1 - \cos(\omega_0 t)] = Y(t) \cdot CE \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t) = Y(t) \cdot CE \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$i(t) = Y(t) \cdot E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Todo esto vale hasta $t = T/2$. A partir de allí, comienza un nuevo tramo.

- (b) Resolver el segundo tramo ($T/2, +\infty$), indicando claramente cómo trabaja con los datos previos.

Para este segundo tramo, fijamos un nuevo origen de tiempos $t' = t - T/2$. La entrada será idénticamente nula y tendremos datos previos en la inductancia y el condensador. Para calcular los mismos, evaluamos las expresiones y obtenidas para la corriente en la inductancia y la tensión en el condensador en el instante final del tramo anterior ($t = T/2$):

$$v_{C0} = v_C(T) = E \cdot \left[1 - \cos\left(\omega_0 \frac{T}{2}\right) \right] = E \cdot [1 - \cos(\pi)] = 2E$$

$$i_{L0} = i(T) = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin\left(\omega_0 \frac{T}{2}\right) = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin(\pi) = 0$$

Entonces, solamente tendremos dato previo no nulo en el condensador. El circuito en Laplace resultante es similar al de la parte anterior, salvo que la fuente vale $-\frac{v_{C0}}{s} = -\frac{2E}{s}$ y la diferencia de potencial que representa la tensión en el tiempo en bornes del condensador se obtiene sumando la caída en la impedancia $\frac{1}{Cs}$ con el valor del dato previo $\frac{v_{C0}}{s}$ o, más directamente, será el opuesto de la tensión en la inductancia!!! Esta última se calcula como un divisor de tensión, exactamente igual que en la parte anterior, dado que no ya dato previo no nulo asociado. Entonces

$$V_L(t') = -Y(t')2E \cdot \cos(\omega_0 t') = -v_C(t')$$

Algo similar sucede con la corriente, que vale

$$i_L(t') = -Y(t')2E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t')$$

- (c) Bosquejar en una gráfica las tensiones del condensador y la inductancia y la corriente del condensador.

Tanto la tensión en bornes del condensador como la corriente del circuito quedan continuas en $t = T/2$, cosa que no ocurre con la tensión en la inductancia. Queda pendiente realizar las respectivas gráficas.